Первообразная

$$F'(x) = f(x)$$

Содержание

Определение первообразной

Функция F называется ***первообразной*** для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

Пример:

$F(x) = x^3/3$ есть первообразная для функции $f(x)=x^2$ на интервале (-∞; ∞), так как

$$F'(x) = (x^3/3)' = 1/3(x^3)' = 1/3*3x^2 = x^2 = f(x)$$

для всех $x \in (-\infty; \infty)$.

Основное свойство первообразной

Любая первообразная для функции *f* на промежутке *I* может быть записана в виде

$$F(x) + C,$$

Где *F(x)* – одна из первообразных для функции *f(x)* на промежутке *I*, а *C* – произвольная постоянная.

Признак постоянства функции

Если $F'(x) = 0$ на некотором промежутке *I*, то функция *F* – постоянная на этом промежутке.

Свойства:

1. Какое бы число не подставить в формулу *C* получим первообразную для функции *f* на промежутке *I*.

2. Какую бы первообразную *F* для *f* на промежутке *I* не взять, можно подобрать такое чисто *C*, что для всех значений *x* из промежутка *I* выполнится равенство

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

График двух любых первообразных для функции получается путем параллельного переноса вдоль оси *OY*.

Таблица первообразных

Функция f	k (постоянная)	x^n ($n \in Z$, $n \neq 1$)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	sin x	cos x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Общий вид первообразных	$kx + C$	$\frac{xn + 1}{n + 1} + C$	$2\sqrt{x} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$

Примеры:

Пример 1

$f(x) = -x^3$, найти $F(x)$

$F'(x) = -x^4/4$, так как $(-x^4/4)' = -x^3$

Общий вид первообразной:

$$F(x) = -x^4/4 + C$$

Пример 2

$f(x) = 1/x^2$, найти $F_0(x)$ на $(0; \infty)$, $F(1) = 1$

$F(x) = -1/x + C$

$-1/1 + C = 1$

$-1 + C = 1$

$C = 2$

$$F_0(x) = -1/x + 2$$

Три правила нахождения первообразных

Правило 1

Если *F* есть первообразная для *f*, а *G* – первообразная для *g*, то *F + G* есть первообразная для *f + g*:

$$(F + G)' = F' + G' = f + g$$

Пример

$f(x) = x^3 + 1/x^2$, найти $F(x)$

$(x^3)' = x^4/4$

$(1/x^2)' = -1/x$, =>

$$F(x) = x^4/4 - 1/x + C$$

Правило 2

Если F есть первообразная для f, а k - постоянная, то функция kF – первообразная для kf:

$$(kF)' = kF' = kf$$

Пример

$f(x) = 5\cos x$, найти $F(x)$

$(\cos x)' = \sin x$, =>

$$F(x) = 5\sin x + C$$

Правило 3

Если *F(x)* есть первообразная для *f(x)*, а *k* и *b* – постоянные, причем $k \neq 0$, то $1/k*F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$:

$$(1/k*F(kx + b))' = 1/k*F'(kx + b) * k = f(kx + b)$$

Пример

$f(x) = 1/(7 - 3x)^5$, найти $F(x)$

$(1/x^5)' = -1/4x^4$

$F(x) = -1/3 * (-1)/4(7 - 3x)^4 = 1/12(7 - 3x)^4$

$$F(x) = 1/12(7 - 3x)^4 + C$$