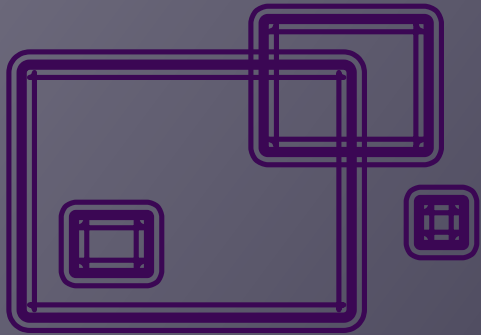


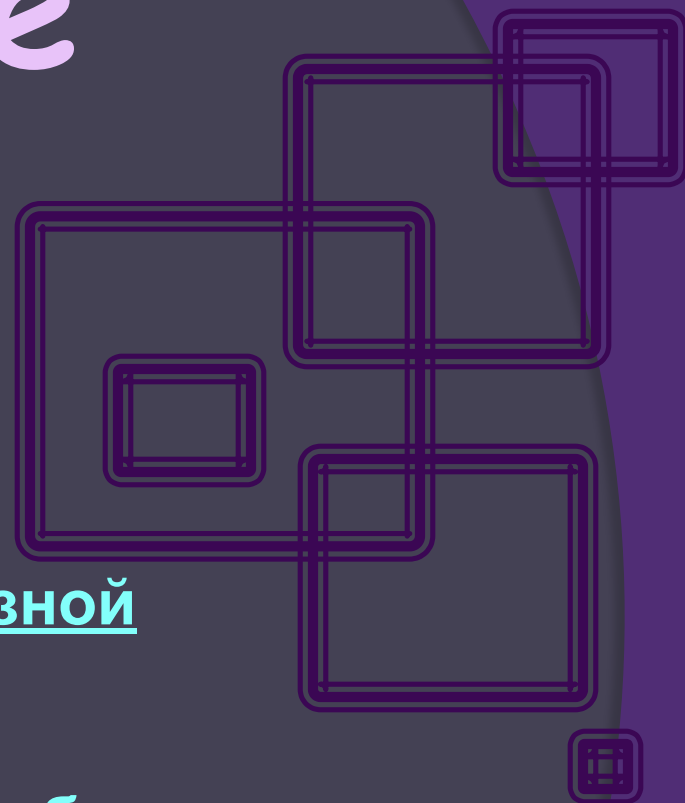
Первообразная



$$F'(x) = f(x)$$

Содержание

1. Определение первообразной
2. Основное свойство первообразной
3. Три правила нахождения первообразных



Определение первообразной

Функция F называется *первообразной* для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

Пример:

$F(x) = x^3/3$ есть первообразная для функции $f(x)=x^2$ на интервале $(-\infty; \infty)$, так как

$$F'(x) = (x^3/3)' = 1/3(x^3)' = 1/3 * 3x^2 = x^2 = f(x)$$

для всех $x \in (-\infty; \infty)$.



Основное свойство первообразной

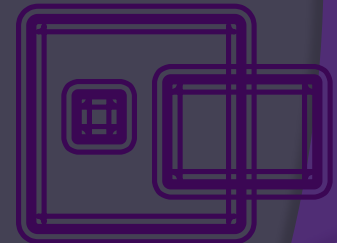
Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде

$$F(x) + C,$$

Где $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I , а C – произвольная постоянная.

Признак постоянства функции

Если $F'(x) = 0$ на некотором промежутке I , то функция F – постоянная на этом промежутке.



Свойства:

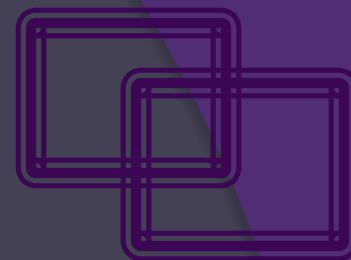
1. Какое бы число не подставить в формулу C получим первообразную для функции f на промежутке I .
2. Какую бы первообразную F для f на промежутке I не взять, можно подобрать такое число C , что для всех значений x из промежутка I выполняется равенство

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

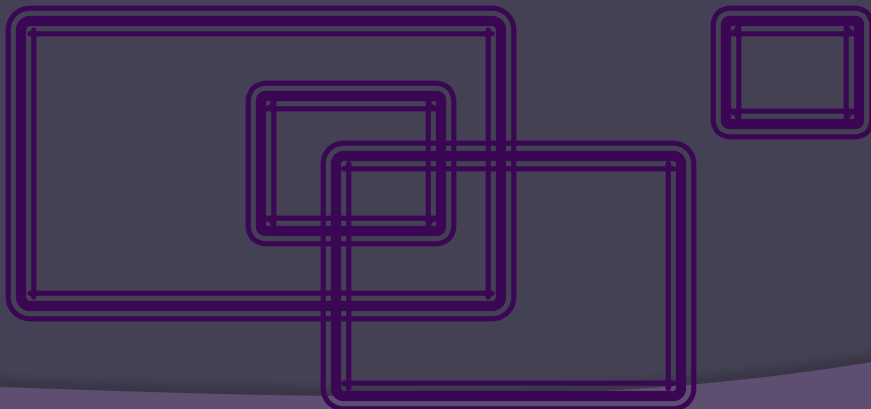
График двух любых первообразных для функции получается путем параллельного переноса вдоль оси OY .



Таблица первообразных



| Функция f | k (постоянная) | x^n ($n \in \mathbb{Z}, n \neq 1$) | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\frac{1}{\sin^2 x}$ |
|-------------------------|---------------------|---|----------------------|---------------|--------------|---------------------------|-----------------------------|
| Общий вид первообразных | $kx + C$ | $\frac{xn + 1}{n + 1} + C$ | $2\sqrt{x} + C$ | $-\cos x + C$ | $\sin x + C$ | $\operatorname{tg} x + C$ | $-\operatorname{ctg} x + C$ |



Примеры:

Пример 2

$f(x) = 1/x^2$, найти $F_0(x)$ на $(0; \infty)$, $F(1) = 1$

$$F(x) = -1/x + C$$

$$-1/1 + C = 1$$

$$-1 + C = 1$$

$$C = 2$$

$$F_0(x) = -1/x + 2$$

Пример 1

$f(x) = -x^3$, найти $F(x)$

$F'(x) = -x^4/4$, так как $(-x^4/4)' = -x^3$

Общий вид первообразной:

$$F(x) = -x^4/4 + C$$



Три правила нахождения первообразных

Правило 1

Если F есть первообразная для f , а G – первообразная для g , то $F + G$ есть первообразная для $f + g$:

$$(F + G)' = F' + G' = f + g$$

Пример

$f(x) = x^3 + 1/x^2$, найти $F(x)$

$$(x^3)' = 3x^2/4$$

$$(1/x^2)' = -2/x^3, \Rightarrow$$

$$F(x) = x^4/4 - 1/x + C$$



Правило 2

Если F есть первообразная для f , а k - постоянная, то функция kF – первообразная для kf :

$$(kF)' = kF' = kf$$

Пример

$f(x) = 5\cos x$, найти $F(x)$

$$(\cos x)' = \sin x, \Rightarrow$$

$$F(x) = 5\sin x + C$$



Правило 3

Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то $1/k * F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$:

$$(1/k * F(kx + b))' = 1/k * F'(kx + b) * k = f(kx + b)$$

Пример

$f(x) = 1/(7 - 3x)^5$, найти $F(x)$

$$(1/x^5)' = -1/4x^4$$

$$F(x) = -1/3 * (-1)/4(7 - 3x)^4 = 1/12(7 - 3x)^4$$

$$F(x) = 1/12(7 - 3x)^4 + C$$

