

Первообразная и интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Исторические сведения

Интегральное исчисление возникло из потребности создать общий метод Разыскания площадей , объемов и центров тяжести.

В зародышевой форме такой метод применялся ещё Архимедом . Систематическое развитие он получил в 17-м веке в работах Кавальери , Торричелли, Ферма, Паскаля. В 1659 г. И. Барроу установил связь между задачей о разыскании площади и задачей о разыскании касательной. Ньютон и Лейбниц в 70-х годах 17-го века отвлекли эту связь от упомянутых частных геометрических задач. Тем самым была установлена связь между интегральным и дифференциальным исчислением.

Эта связь была использована Ньютоном , Лейбницем и их учениками для развития техники интегрирования. Своего нынешнего состояния методы интегрирования в основном достигли в работах Л. Эйлера. Труды М. В. Остроградского и П. Л. Чебышева завершили развитие этих методов.

Понятие об интеграле.

Пусть линия MN дана уравнением $y = f(x)$ и надо найти площадь F «криволинейной трапеции» aABb. Разделим отрезок ab на n частей

$ax_1, x_1x_2, \dots, x_{n-1}b$ (равных или неравных) и построим ступенчатую фигуру, показанную штриховкой на черт. 1

Её площадь, её площадь равна

$$F_n = y_0(x_1 - a) + y_1(x_2 - x_1) + \dots + y_{n-1}(b - x_{n-1}). (1)$$

Если ввести обозначения

$$x_1 - a = dx_0, \quad x_2 - x_1 = dx_1, \quad \dots, \quad b - x_{n-1} = dx_{n-1},$$

То формула (1) примет вид

$$F_n = y_0 dx_0 + y_1 dx_1 + \dots + y_{n-1} dx_{n-1}. (3)$$

Искомая площадь есть предел суммы (3) при бесконечно большом n.

Лейбниц ввёл для этого предела обозначение $\int y dx$ (4)

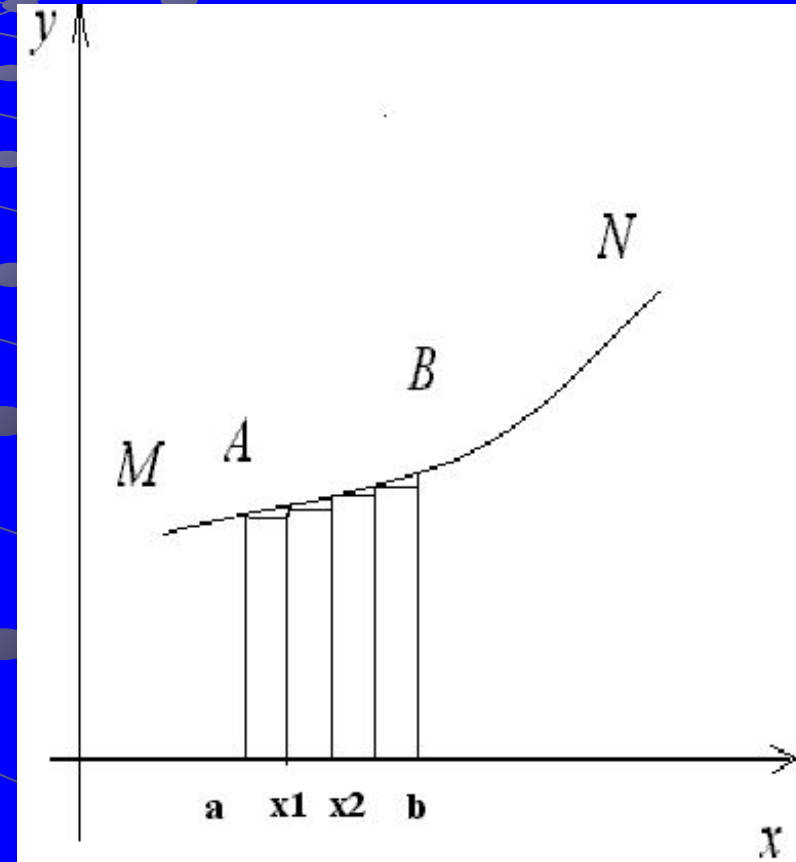
В котором \int (курсивное s) – начальная буква слова summa (сумма),

а выражение $y dx$ указывает типичную форму отдельных слагаемых.

Выражение $\int y dx$ Лейбниц стал называть интегралом – от латинского слова integralis – целостный. Ж.Б.Фурье усовершенствовал обозначение Лейбница, придав ему вид

$$\int_a^b y dx$$

Здесь явно указаны начальное и конечное значения x.



Связь между интегрированием и дифференцированием.

Будем считать a постоянной, а b – переменной величиной.

Тогда интеграл $\int_a^b f(x)dx$ будет функцией от b .

Дифференциал этой функции равен dx

$$d \int_a^b f(x)dx = f(b)db$$

Первообразная функция.

Пусть функция $f(x)$ есть производная от функции $F(x)$,

т.е. $f(x)dx$ есть дифференциал функции $F(x)$:

$$f(x)dx = dF(x)$$

Тогда функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$

Пример нахождения первообразной.

Функция $3x^2$ есть первообразная от x^3

Т.С. $3x^2 dx$ Есть дифференциал функции x^3

$$3x^2 dx = d(x^3)$$

Функция x^3 является первообразной для функции $3x^2$

Неопределённый интеграл.

$$\int f(x)dx$$

Неопределённым интегралом данного выражения $f(x)dx$

Называется наиболее общий вид его первообразной функции.

Неопределённый интеграл выражения $f(x)dx$

обозначается $\int f(x)dx$

Выражение $f(x)dx$ называется подинтегральным выражением,

Функция $f(x)$ - подинтегральной функцией, переменная x – переменной интегрирования. Разыскание неопределённого интеграла данной функции называется интегрированием.

Пример нахождения неопределённого интеграла.

Наиболее общий вид первообразной функции для выражения

$2x dx$ есть $x^2 + C$. Эта функция является

Неопределённым интегралом выражения $2x dx$:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

Где $C = const$.

Неопределённые интегралов от тригонометрических функций.

$$1) \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$5) \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$2) \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$6) \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$3) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$7) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

Неопределённые интегралы от некоторых функций.

1)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

2)
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

3)
$$\int e^x dx = e^x + C$$

4)
$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

5)
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

6)
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$