



Первообразная и неопределенный интеграл

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке X , если

$$\forall x \in X \quad F'(x) = f(x)$$

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \in X$, то для $f(x)$ существует первообразная $F(x)$ на X .

Замечание 1: Условие непрерывности не является необходимым для существования первообразной. Пример разрывной функции, имеющей первообразную:

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Пример:

Найдите первообразную функции $f(x) = |x-1| \cdot (2x-1)$ на $\mathbb{R}$.

Решение. Данная функция может быть записана в виде:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x - 1, & \text{если } x < 1, \\ 2x^2 - 3x + 1, & \text{если } x \geq 1. \end{cases} \quad \begin{aligned} F_1(x) &= -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C_1, & \text{если } x < 1; \\ F_2(x) &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C_2, & \text{если } x \geq 1. \end{aligned}$$

Найдем соотношение между C_1 и C_2 , при котором $F_1(1) = F_2(1)$:

$$C_1 = \frac{1}{3} + C_2.$$

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{3} + C, & \text{если } x < 1, \\ \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

Замечание 2: Если функция $f(x)$ определена на промежутке X и $x_0 \in X$ — точка, в которой функция имеет разрыв в виде скачка, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

, то функция $f(x)$ не имеет первообразной на любом промежутке, содержащем точку x_0 .

Теорема 2: Если $F(x)$ одна из первообразных функции $f(x)$, на промежутке X , то любая первообразная на этом промежутке имеет вид $F(x) + C$.

Определение: Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается

$$\int f(x) dx$$

Основные свойства неопределенного интеграла.

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

$$2. \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

$$3. \int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

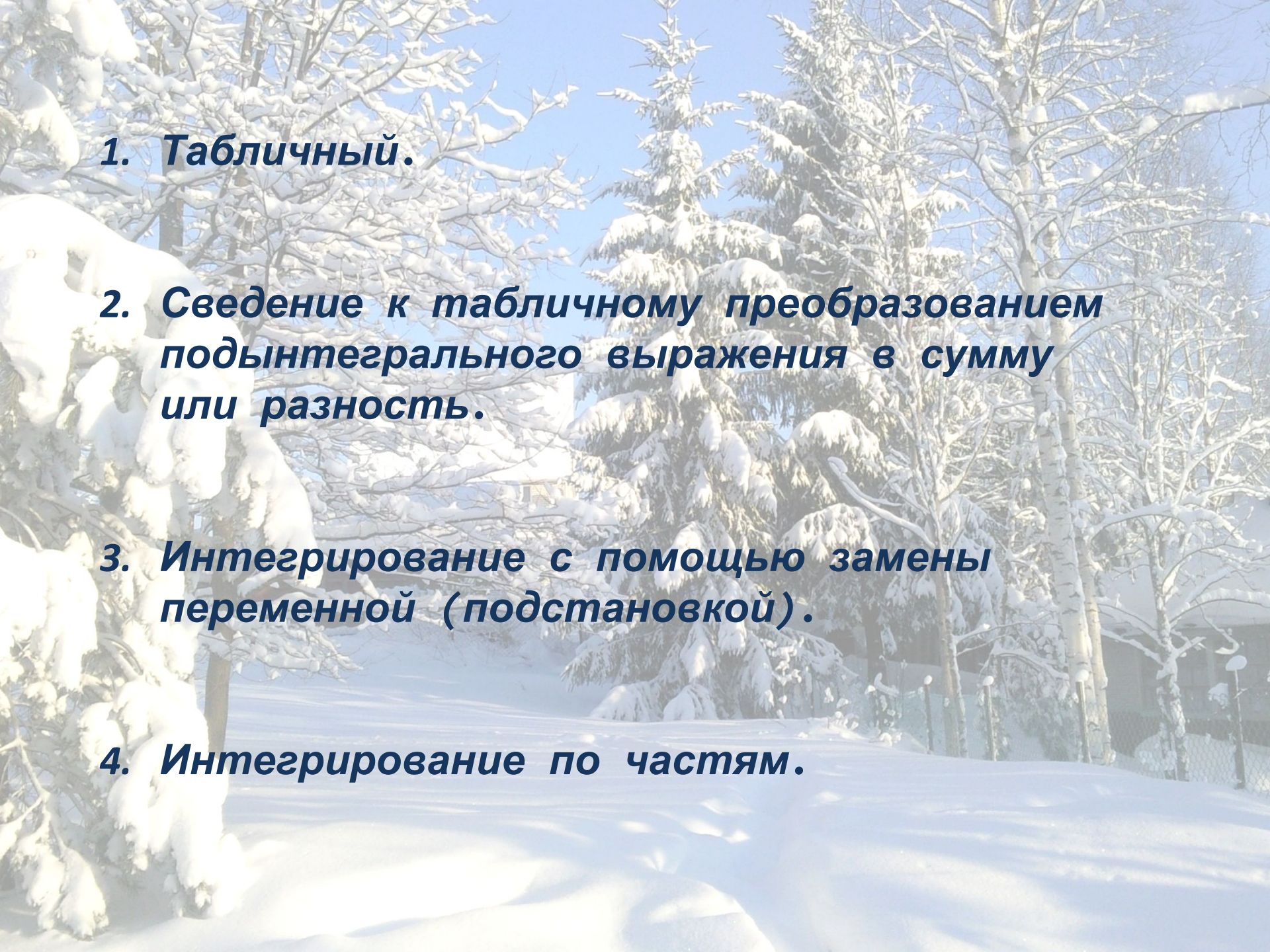
$$4. \int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

$$5. \int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

$$6. \int f(x) d(g(x)) = f(x)g(x) - \int g(x) d(f(x)).$$

A photograph of a winter landscape. In the foreground, there is a thick layer of snow. Several trees are visible, their branches heavily laden with snow. The sky is a clear, bright blue. The overall scene is peaceful and serene.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ Интегрирования.



1. Табличный.

2. Сведение к табличному преобразованием подынтегрального выражения в сумму или разность.

3. Интегрирование с помощью замены переменной (подстановкой).

4. Интегрирование по частям.

**Нахождение интеграла методом
преобразования подынтегральной функции в
сумму или разность.**

$$1. \int \sin 3x \cos x = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sin^2 5x \cos^2 5x} = \int \frac{(\cos^2 5x + \sin^2 5x) dx}{\sin^2 5x \cos^2 5x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 5x} + \frac{1}{\cos^2 5x} \right) dx = \\ = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} 5x + \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C.$$

$$3. \int \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(x^2 + 2 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{3} x^3 + 2x - \operatorname{arctg} x + C.$$

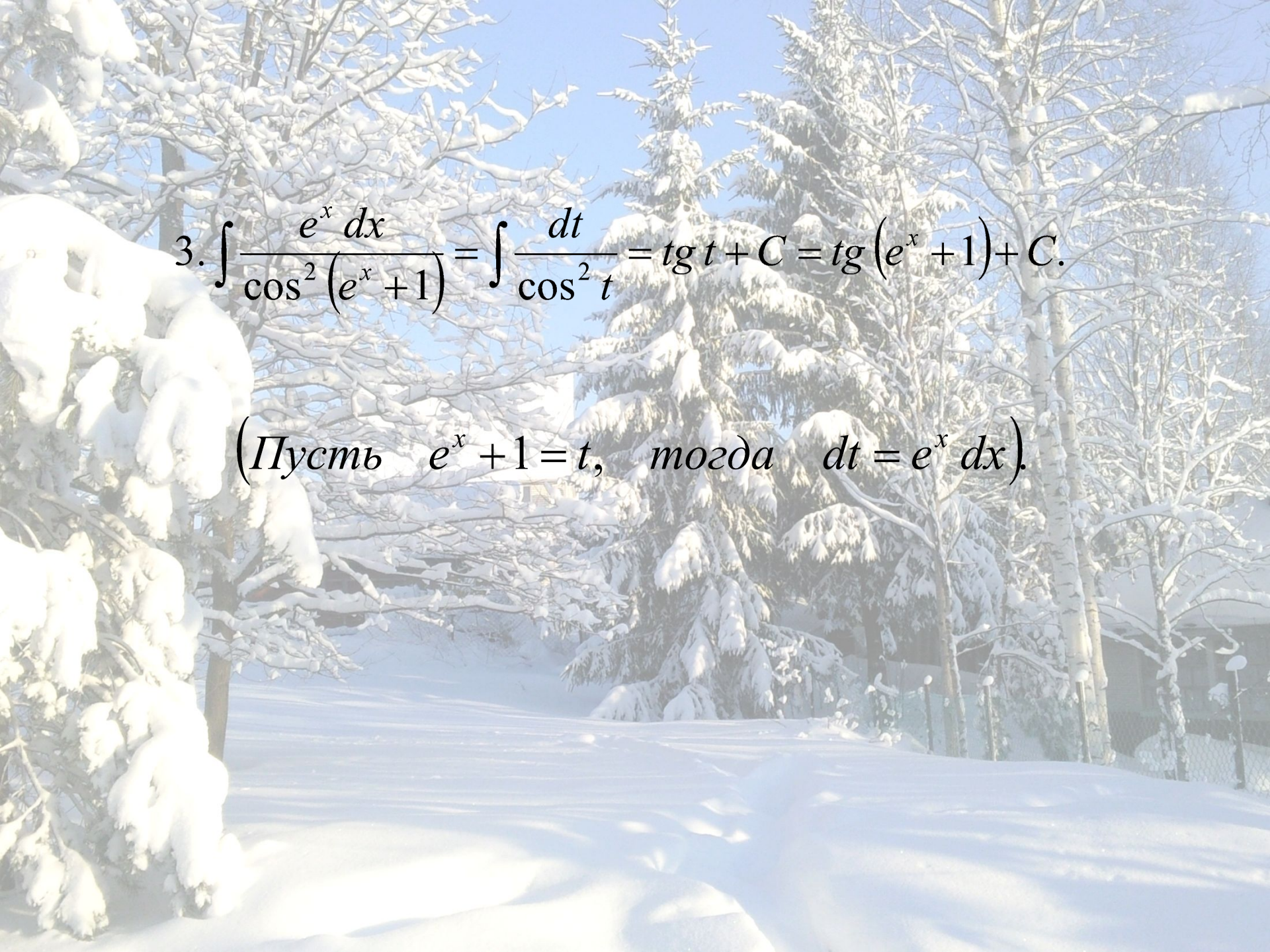
Интегрирование методом замены переменной.

$$1. \int x \sqrt{3x^2 - 1} dx = \frac{1}{6} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9} (3x^2 - 1) \sqrt{3x^2 - 1} + C.$$

$$\left(\text{Пусть } 3x^2 - 1 = t, \text{ тогда } 6x dx = dt, \text{ т.е. } x dx = \frac{1}{6} dt \right).$$

$$2. \int \frac{\sin 2x dx}{\cos^7 2x} = -\frac{1}{2} \int t^{-7} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-6}}{-6} + C = \frac{1}{12 \cos^6 2x} + C.$$

$$\left(\text{Пусть } \cos 2x = t, \text{ тогда } dt = -2 \sin 2x dx, \text{ т.е. } \sin 2x dx = -\frac{1}{2} dt \right).$$



3.
$$\int \frac{e^x dx}{\cos^2(e^x + 1)} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}(e^x + 1) + C.$$

(Пусть $e^x + 1 = t$, тогда $dt = e^x dx$).

**Интегрирование выражений, содержащих
радикалы,
методом подстановки.**

$$1. \int x \sqrt{2x-1} dx = \int \frac{t^2+1}{2} t \cdot t dt = \frac{1}{2} \int (t^4 + t^2) dt = \frac{1}{10} t^5 + \frac{1}{6} t^3 + C =$$

$$= \frac{1}{10} (2x-1)^2 \sqrt{2x-1} + \frac{1}{6} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C.$$

$$\left(\text{Пусть } \sqrt{2x-1} = t, \text{ тогда } x = \frac{t^2+1}{2}, \quad dx = t dt \right).$$

$$\begin{aligned}
 2. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{2-x}} &= \int \frac{(2-t^3)^2 \cdot (-3t^2) dt}{t} = -3 \int (4t - 4t^4 + t^7) dt = \\
 &= -6t^2 + \frac{12}{5}t^5 - \frac{3}{8}t^8 + C = \\
 &= -6\sqrt[3]{(2-x)^2} + \frac{12}{5}(2-x)\sqrt[3]{(2-x)^2} - \frac{3}{8}(2-x)^2\sqrt[3]{(2-x)^2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Пусть } \sqrt[3]{2-x} = t, \text{ тогда } x = 2 - t^3, \\ \text{т.е. } dx = -3t^2 dt \end{array} \right).$$

Интегрирование алгебраических дробей.

$$1. \int \frac{x+3}{x^2-4} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} (5 \ln|x-2| - \ln|x+2|) + C.$$

$$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2};$$

$$x+3 = a(x+2) + b(x-2);$$

$$x+3 = (a+b)x + 2a - 2b;$$

$$\begin{cases} a+b=1; \\ 2a-2b=3. \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{5}{4}; \\ b=-\frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right).$$

Интегрирование по частям.

$$1. \int x \cos x \, dx = \int x \, d \sin x = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

$$2. \int x e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} \int x \, de^{2x} = \frac{1}{2} \left(x e^{2x} - \int e^{2x} \, dx \right) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

$$\begin{aligned} 3. \int x^2 \sin 2x \, dx &= -\frac{1}{2} \int x^2 \, d(\cos 2x) = -\frac{1}{2} \left(x^2 \cos 2x - \int \cos 2x \, dx^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} \int x \, d(\sin 2x) = \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} \left(x \sin 2x - \int \sin 2x \, dx \right) = \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int e^x \sin x \, dx &= \int \sin x \, de^x = e^x \sin x - \int e^x d(\sin x) = \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int \cos x \, d(e^x) = \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d(\cos x) = \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Получили:

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx.$$

Таким образом: $2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) + C,$

значит $\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$

Используемая литература:

1. Л.И.Звавич; А.Р. Рязановский; А.М.Поташник «Сборник задач по алгебре и математическому анализу для 10-11 классов» (учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. Москва Новая школа, 1996.
2. Н.Я. Виленкин; О.С. Ивашев-Мусатов; С.И. Шварцбург «Алгебра и математический анализ для 10 классов». М.:Просвещение, 1995.
3. Н.Я. Виленкин; О.С. Ивашев-Мусатов; С.И. Шварцбург «Алгебра и математический анализ для 11 классов». М.:Просвещение, 1995.