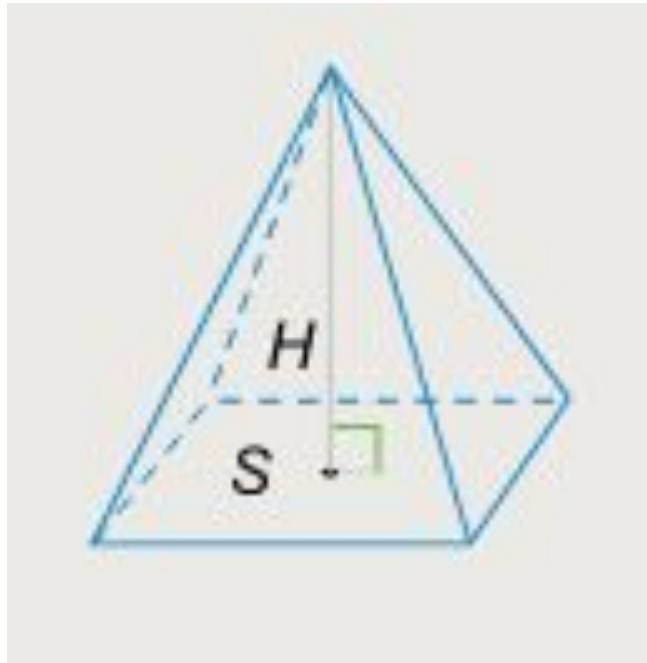


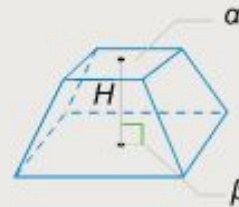
# Пирамида

**Пирамида** — это многогранная объемная фигура, ограниченная плоским многоугольником (**основой**) и треугольниками, имеющих общую **вершину**, не лежащую в плоскости основания.

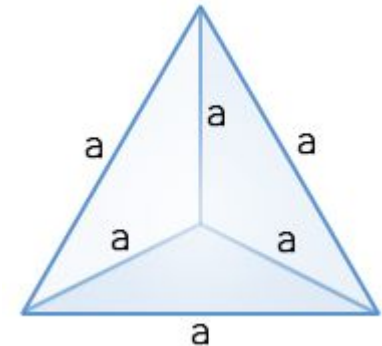


# Виды пирамид

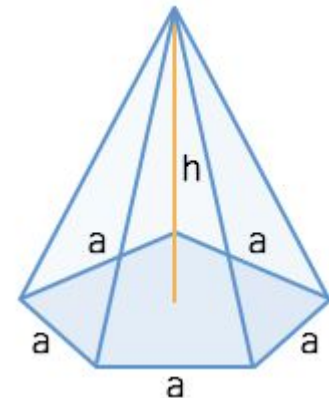
**Усечённая пирамида** — часть пирамиды, заключенная между её основанием, боковыми гранями и сечением этой пирамиды плоскостью, параллельной основанию.



**Тетраэдр** — простейший многогранник, гранями которого являются четыре треугольника, треугольная пирамида. У тетраэдра 4 грани, 4 вершины и 6 рёбер.  
**Тетраэдр**, у которого все грани — равносторонние треугольники...



**Правильная пирамида** — это пирамида, основанием которой является **правильный** многоугольник, а вершина пирамиды проецируется в центр этого многоугольника



# Основные определения

- **Боковая грань** - это треугольник, у которого один угол лежит в вершине пирамиды, а противоположная ему сторона совпадает со стороной основания (многоугольника).
- **Боковые ребра** - это общие стороны боковых граней. У пирамиды столько ребер сколько углов у многоугольника.
- **Высота пирамиды** - это перпендикуляр, опущенный из вершины на основание пирамиды.
- **Апофема** - это перпендикуляр боковой грани пирамиды, опущенный из вершины пирамиды к стороне основания.
- **Диагональное сечение** - это сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и диагональ основания.
- **Правильная пирамида** - это пирамида, в которой основой является правильный многоугольник, а высота опускается в центр основания.
- **Боковая поверхность пирамиды** - это совокупная площадь всех боковых граней пирамиды.
- **Полная поверхность пирамиды** - это совокупность площадей боковой поверхности и площади основания пирамиды.

# Свойства пирамиды

- Если все боковые ребра равны, то вокруг основания пирамиды можно описать окружность, а центр основания совпадает с центром окружности. Также перпендикуляр, опущенный из вершины, проходит через центр основания (круга).
- Если все боковые ребра равны, то они наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами.
- Боковые ребра равны тогда, когда они образуют с плоскостью основания равные углы или если вокруг основания пирамиды можно описать окружность.
- Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то в основание пирамиды можно вписать окружность, а вершина пирамиды проектируется в ее центр.
- Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то апофемы боковых граней равны.

•

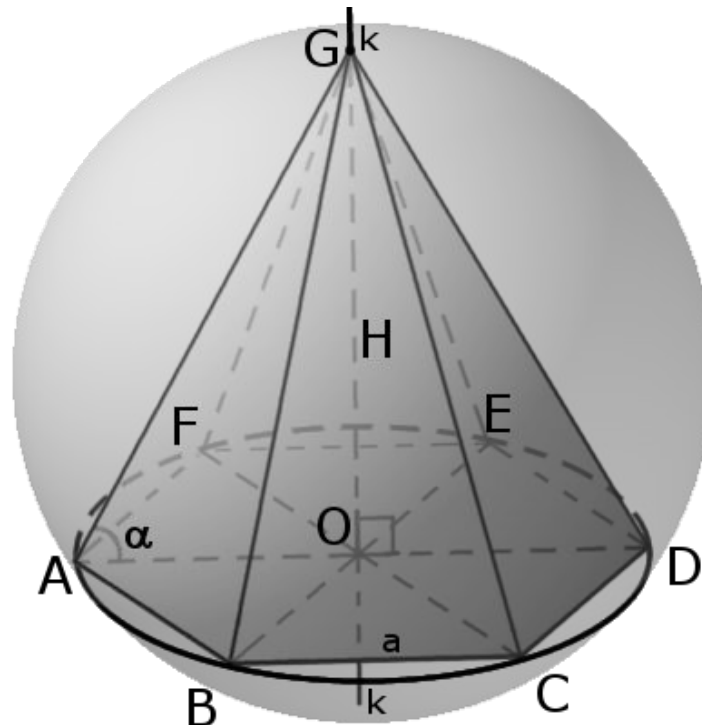
# Свойства правильной пирамиды

- Вершина пирамиды равноудалена от всех углов основания.
- Все боковые ребра равны.
- Все боковые ребра наклонены под одинаковыми углами к основанию.
- Апофемы всех боковых граней равны.
- Площади всех боковых граней равны.
- Все грани имеют одинаковые двугранные (плоские) углы.
- Вокруг пирамиды можно описать сферу. Центром описанной сферы будет точка пересечения перпендикуляров, которые проходят через середину ребер.
- В пирамиду можно вписать сферу. Центром вписанной сферы будет точка пересечения биссектрис, исходящие из угла между ребром и основанием.
- Если центр вписанной сферы совпадает с центром описанной сферы, то сумма плоских углов при вершине равна  $\pi$  или наоборот, один угол равен  $\pi/n$ , где  $n$  - это количество углов в основании пирамиды.

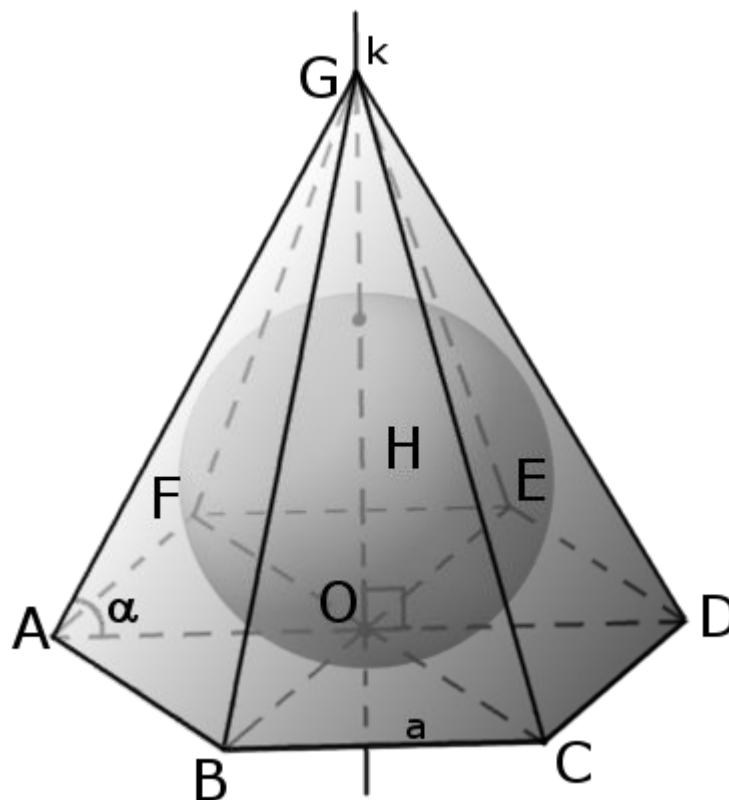
# Связь пирамиды со сферой

- Вокруг пирамиды можно описать сферу тогда, когда в основании пирамиды лежит многогранник вокруг которого можно описать окружность (необходимое и достаточное условие). Центром сферы будет точка пересечения плоскостей, проходящих перпендикулярно через середины боковых ребер пирамиды.

Вокруг любой треугольной или правильной пирамиды всегда можно описать сферу.



- В пирамиду можно вписать сферу, если биссекторные плоскости внутренних двугранных углов пирамиды пересекаются в одной точке (необходимое и достаточное условие). Эта точка будет центром сферы.



# Связь пирамиды с конусом

- Конус называется вписанным в пирамиду, если их вершины совпадают, а основание конуса вписано в основание пирамиды.
- Конус можно вписать в пирамиду, если апофемы пирамиды равны между собой.
- Конус называется описанным вокруг пирамиды, если их вершины совпадают, а основание конуса описано вокруг основания пирамиды.
- Конус можно описать вокруг пирамиды если, все боковые ребра пирамиды равны между собой.

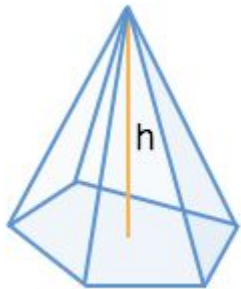


# Связь пирамиды с цилиндром

- Пирамида называется вписанной в цилиндр, если вершина пирамиды лежит на одной основе цилиндра, а основание пирамиды вписано в другую основу цилиндра.
- Цилиндр можно описать вокруг пирамиды если вокруг основания пирамиды можно описать окружность.

# Формулы объема

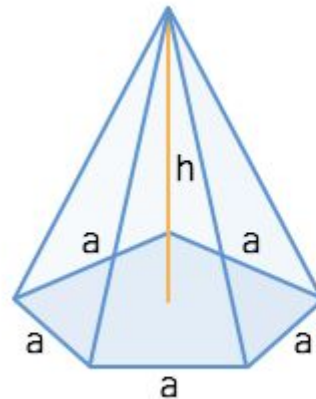
Пирамида



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h$$

$S_{\text{осн.}}$  - площадь основания  
 $h$  - высота пирамиды

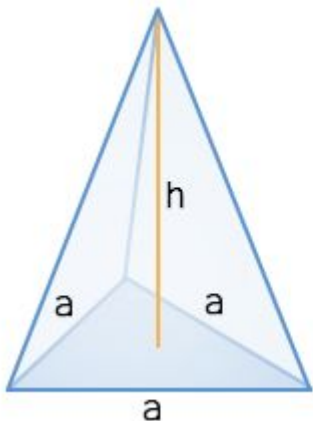
Правильная пирамида



$$V = \frac{na^2h}{12 \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

$h$  - высота пирамиды  
 $a$  - сторона основания пирамиды  
 $n$  - количество сторон многоугольника в основании

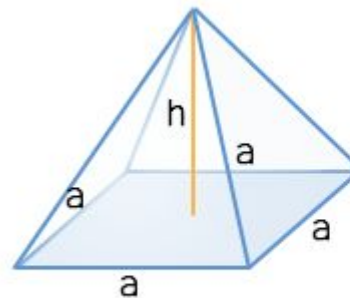
Правильная треугольная пирамида



$$V = \frac{ha^2}{4\sqrt{3}}$$

$h$  - высота пирамиды  
 $a$  - сторона основания пирамиды

Правильная четырехугольная пирамида



$$V = \frac{1}{3} ha^2$$

$h$  - высота пирамиды  
 $a$  - сторона основания пирамиды

# Формулы площадей

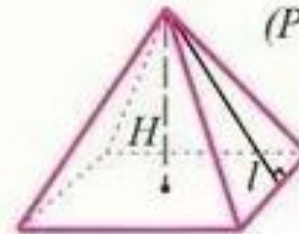
Произвольная пирамида



( $S_{осн}$  – площадь основания)

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$$

Правильная пирамида

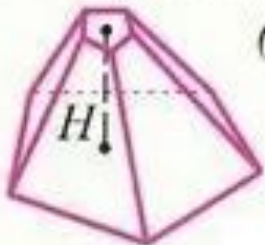


( $P$  – периметр основания)

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot l$$

( $l$  – апофема)

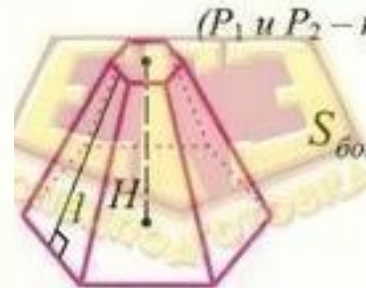
Произвольная усечённая пирамида



( $S_1$  и  $S_2$  – площади оснований)

$$S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2;$$

Правильная усечённая пирамида



( $P_1$  и  $P_2$  – периметры оснований)

$$S_{бок} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \cdot l$$

( $l$  – апофема)

# Задачи

## Условие

Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 4, высота равна 2. Найдите объем пирамиды.

## Решение

Объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

где  $S$  – площадь основания;  $h$  – высота пирамиды

Для нахождения площади, найдем диагональ квадрата основания пирамиды. Рассмотрим прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является сторона пирамиды, а одним из катетов высота пирамиды. По теореме Пифагора диагональ будет равна:

$$d = 2 \cdot \sqrt{4^2 - 2^2} = 2 \cdot \sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

Зная угол  $CAB = 45^\circ$  прямоугольного треугольника  $ABC$  мы можем найти сторону  $AB$ :

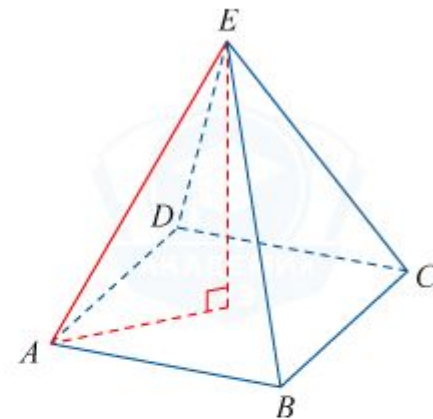
$$AB = d \cdot \cos 45^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$$

Площадь основания равна:

$$S = (2\sqrt{6})^2 = 4 \cdot 6 = 24$$

Объем пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 2 = 16$$



**Ответ**

16



