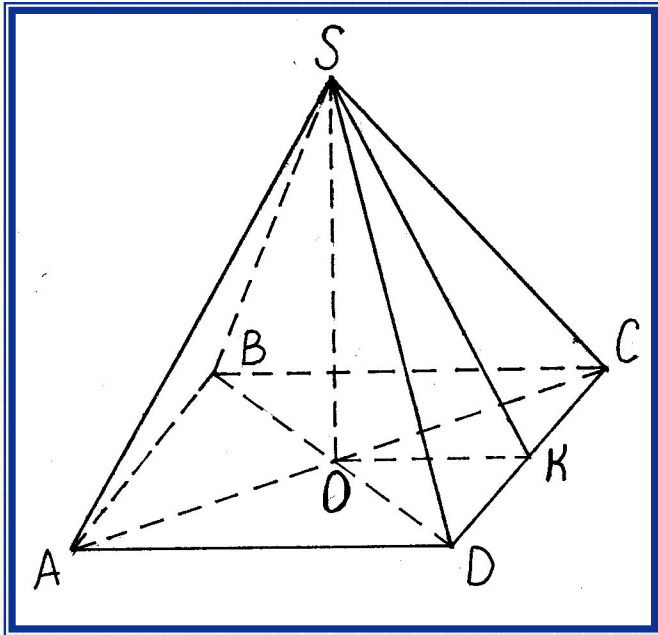


# Пирамиды



Выполнила Емельянова  
Валентина

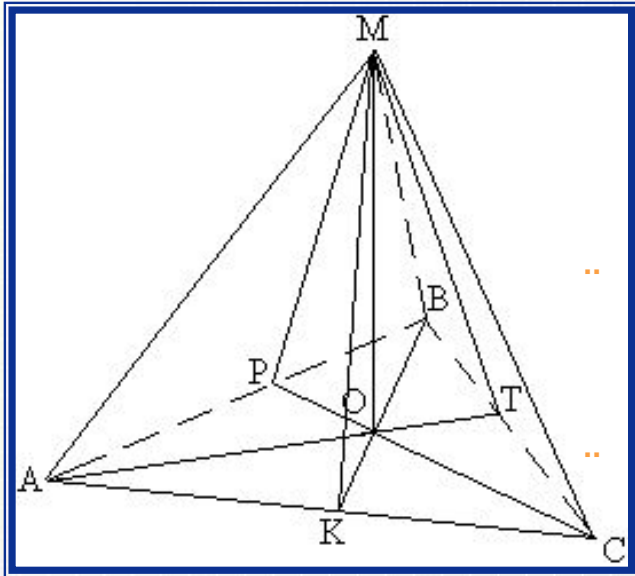
# Что такое?



- ✓ **Пирамидой** ( $SABCD$ ) называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника - **основания пирамиды** ( $ABCD$ ), **точка  $S$** , не лежащая в плоскости основания, - **вершиной пирамиды** и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.
- ✓ Треугольники  $SAB$ ,  $SBC$ ,  $SCD$ ,  $SDA$  - **боковые грани**.
- ✓ Прямые  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$  - **боковые ребра** пирамиды.
- ✓ Перпендикуляр  $SO$ , опущенный из вершины на основание, называется **высотой** пирамиды и обозначается  $H$ .
- ✓ Пирамида называется **правильной**, если ее основание - правильный многоугольник, а высота ее проходит через центр основания.
- ✓ Боковые грани правильной пирамиды - равнобедренные треугольники, равные между собой.
- ✓ Высота боковой грани правильной пирамиды - **апофема** пирамиды.
- ✓ Треугольная пирамида называется **тетраэдром**.

# Правильная пирамида

Отметим некоторые свойства правильной  $n$ -угольной пирамиды на примере треугольной пирамиды. Как известно центр правильного треугольника совпадает с центром вписанной и описанной около него окружности. Поэтому отрезки  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  равны как радиусы. Поэтому прямоугольные треугольники  $AOM$ ,  $BOM$  и  $COM$  равны по двум катетам ( $MO$ -общая). Из равенства этих треугольников следует равенство соответствующих сторон:  $AM=BM=CM$



... **Свойство 1:** В правильной  $n$ -угольной пирамиде все боковые ребра равны между собой.

Из равенства ребер следует и равенство боковых граней. Треугольники  $ABM$ ,  $BCM$  и  $ACM$  равны по трем сторонам.

... **Свойство 2:** Все боковые грани правильной  $n$ -угольной пирамиды суть равные равнобедренные треугольники, поэтому все плоские углы при вершине равны, все плоские углы при основании равны.

Из равенства прямоугольных треугольников  $OPM$ ,  $OTM$  и  $OKM$  ( $OT=OP=OK$  как радиусы вписанной окружности;  $MO$  - общая) следует равенство всех двугранных углов при основании пирамиды  $\angle POM = \angle OTM = \angle OKM$

... **Свойство 3:** В правильной  $n$ -угольной пирамиде все двугранные углы при основании равны.

# Формулы для пирамид

- ★ *Площадью полной поверхности* пирамиды называется сумма площадей всех её граней

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}};$$

- ★ *Площадь боковой поверхности пирамиды* – сумма площадей её боковых граней;

- ★ *Площадь боковой грани*

$$S_{\text{бок.гр}} = 1/2 \times m \times |g|,$$

где  $m$  – апофема,  $|g|$  – основание грани;

- ★ *Теорема:* Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему

$$S_{\text{бок}} = 1/2 \times (P_{\text{осн}} \times m),$$

где  $m$  – апофема,  $P$  – периметр многоугольника основания;

- ★ *Объём пирамиды*

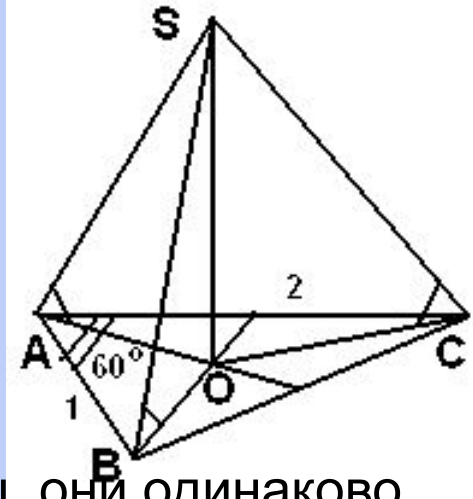
$$V = (1/3) \times S_{\text{осн}} \times h.$$



# Задача

❖ **Задача 1:** Основание пирамиды – треугольник, две стороны которого равны 1 и 2, а угол между ними равен  $60^\circ$ . Каждое боковое ребро равно  $\sqrt{13}$ .

Найдите объем пирамиды.



**Решение.** Так как все ребра (боковые) пирамиды равны, они одинаково наклонены к основанию, и вершина пирамиды проектируется в центр описанной вокруг основания окружности. (см. чертеж).

Объем пирамиды:  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$ ,  $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \angle A$ ,  $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Высоту SO можно найти по т. Пифагора например, из треугольника ASO. Для этого нужно найти AO – радиус описанной окружности основания.

Воспользуемся теоремой синусов:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ . Но сначала по

теореме косинусов найдем сторону BC:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$ ,

$$BC^2 = 1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \quad BC = \sqrt{3}$$

Теперь вычислим радиус описанной окружности:  $R = \frac{BC}{2 \sin \angle A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}/2} = 1$

Найдем SO:  $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{13 - 1} = 2\sqrt{3}$ .

Вычислим объем:  $V = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$ .

**Ответ:**  $V=1$ .

# А ПОД КОНЕЦ...

*Слово «пирамида» в геометрию ввели греки, которые, как полагают, заимствовали его у египтян, создавших самые знаменитые пирамиды в мире. Другая теория выводит этот термин из греческого слова «пирос» (рожь) – считают, что греки выпекали хлебцы, имевшие форму пирамиды*

