

Планиметрия

Задание 6

Решение прямоугольного треугольника

В треугольнике ABC угол C равен 90 градусов, AC=4,8,
 $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AB.

ТЕОРИ

Я

Решение:

$$\sin A = \frac{CB}{AB} = \frac{7}{25}$$

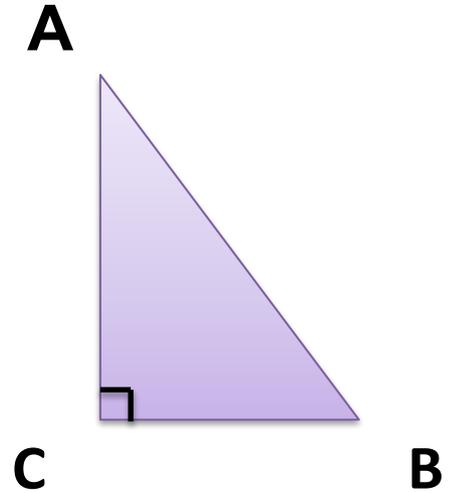
$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$$

$$\cos \alpha = \frac{24}{25}$$

$$AB = AC : \cos A = 4,8 \cdot \frac{25}{24} = 5$$

Ответ: 5



Теория

- Синусом острого угла, прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.
- Косинусом острого угла, прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.
- Основное тригонометрическое тождество:
$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$



В треугольнике ABC угол C равен 90 градусов, CH – высота, $AB = 13$, $\operatorname{tg}A = \frac{1}{5}$. Найдите AH .

ТЕОРИ

Я

Решение:

1) Рассмотрим треугольник ACH

$$\cos A = \frac{AH}{AC}$$

$$AH = AC \cos A$$

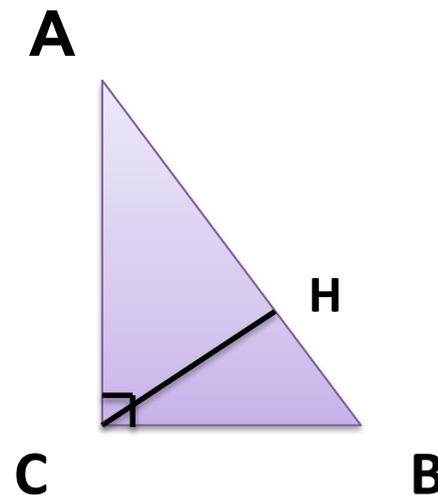
2) Рассмотрим треугольник ABC

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$AC = AB \cos A$$

$$3) AH = AB \cos^2 A = AB \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 A} = 13 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{25}} = 12,5$$

Ответ: 12,5



Теория

- Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
- $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}$



Решение равнобедренного треугольника

В треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $\sin A = \frac{7}{25}$.

Найдите AB.

ТЕОРИ

Я

Решение:

$$\sin A = \frac{CH}{AC}$$

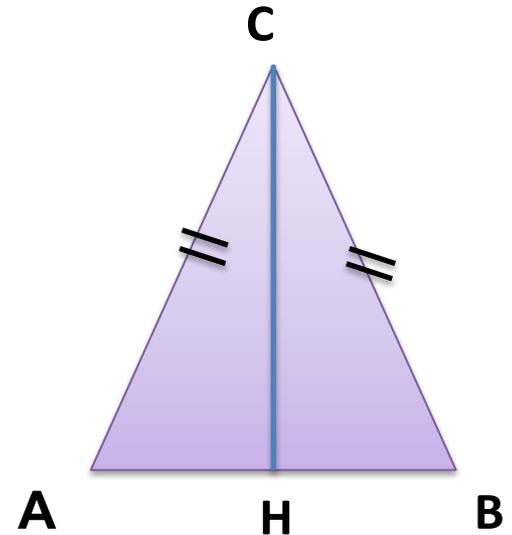
$$\cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{24}{25}$$

$$AB = 2AH$$

$$AH = 4,8 \text{ из отношения } \frac{24}{25} = \frac{AH}{5}$$

$$AB = 9,6$$

Ответ: 9,6

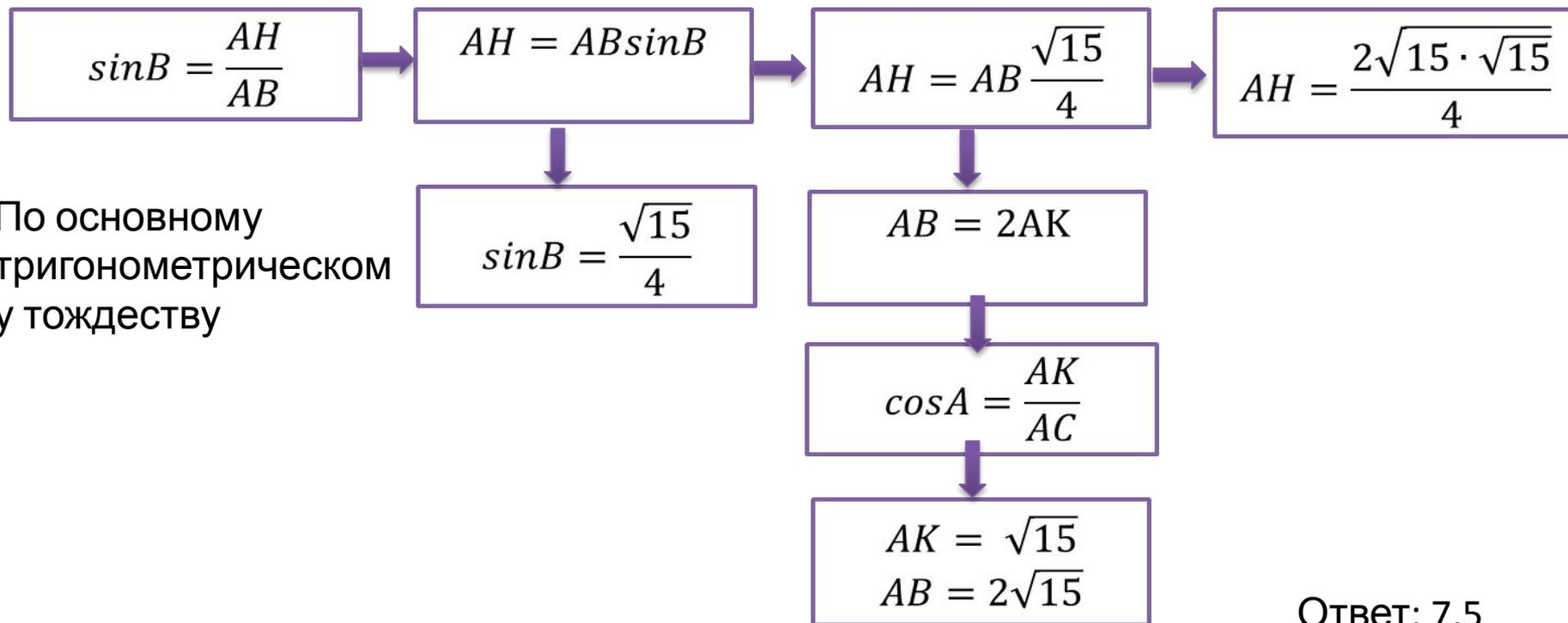
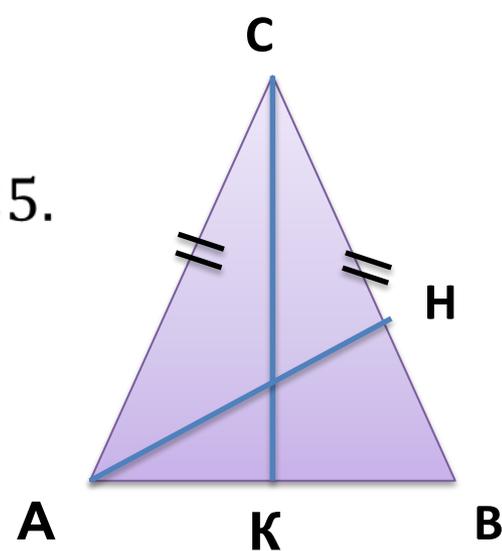


Теория

- Равнобедренный треугольник – это треугольник, у которого боковые стороны равны.
- Свойства равнобедренного треугольника:
 - Углы при основании равны
 - Биссектриса (делит угол пополам), проведенная к основанию, является и медианой (делит сторону пополам) и высотой (перпендикуляр).



В треугольнике ABC $AC = BC = 4\sqrt{15}$, $\cos BAC = 0,25$.
 Найдите высоту AH.



Ответ: 7,5

Треугольники общего вида

ТЕОРИ

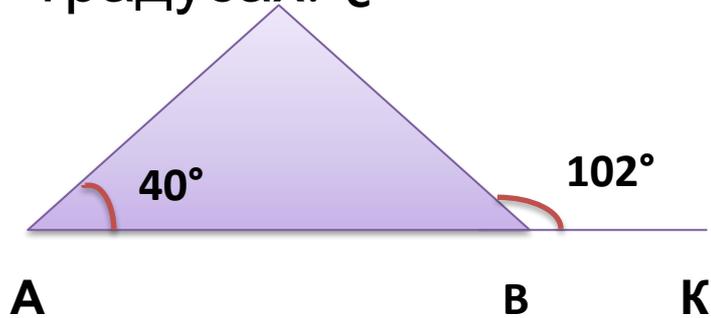
Я

- Сумма углов в треугольнике равна 180°
- $S = \frac{1}{2} ah$ (половина произведения основания, на высоту)
- $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$ (половина произведения сторон, на синус угла между ними)
- Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Она параллельна третьей стороне, а ее длина равна половине длины этой стороны.
- Внешний угол треугольника равен сумме несмежных с ним углов этого треугольника.
- Напротив большего угла лежит большая сторона и наоборот.

	Равенство треугольников	Подобие треугольников
1 признак	По двум сторонам и углу между ними	По двум углам
2 признак	По стороне и прилежащим к ней углам	По пропорциональным сторонам и углу между ними
3 признак	По трем сторонам (равенство)	По трем сторонам (пропорциональность)
		<i>Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия.</i>
		<i>Периметры подобных фигур относятся как коэффициент подобия</i>

Примеры заданий

В треугольнике ABC угол A равен 40° , внешний угол при вершине B равен 102° . Найдите угол C. Ответ дайте в градусах. с



Решение 1:

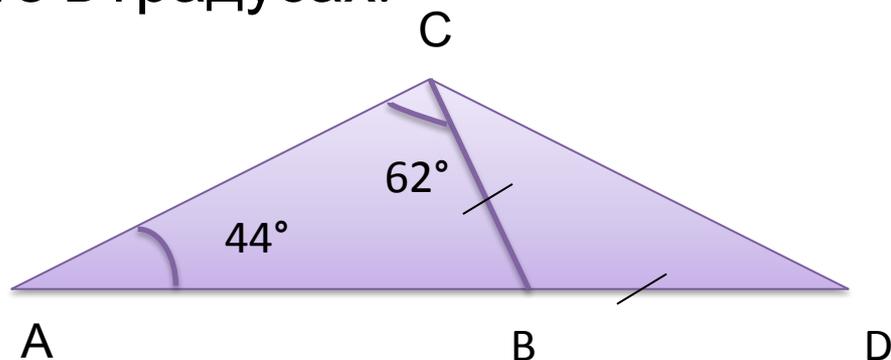
Так как внешний угол треугольника равен сумме углов не смежных с ним, то

$$\angle C = 102^\circ - 40^\circ = 62^\circ$$

Решение 2:

- 1) $\angle CBK$ и $\angle CBA$ смежные, а значит в сумме дают 180° .
 $\angle CBA = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$
- 2) Сумма углов в треугольнике равна 180° . Значит $\angle C = 180^\circ - (78^\circ + 40^\circ) = 62^\circ$

В треугольнике ABC угол A равен 44° , а угол C равен 62° . На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD, равный стороне BC. Найдите угол D треугольника BCD. Ответ дайте в градусах.



Решение:

- 1) $\angle CBD$ – внешний угол для треугольника ABC, значит $\angle CBD = 44^\circ + 62^\circ = 106^\circ$
- 2) По свойству равнобедренного треугольника $\angle C = \angle D$, треугольника CBD, а сумма углов в треугольнике равно 180°
Следовательно $\angle D = (180^\circ - 106^\circ) / 2 = 37^\circ$

Ответ: 37°

Параллелограмм

ТЕОРИ

Я

- Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.
- Частными случаями пар-ма являются прямоугольник, квадрат и ромб.
- Свойства параллелограмма:
 - Противоположные стороны попарно равны
 - Сумма углов равна 360°
 - Противоположные углы равны
 - Сумма углов прилежащих к одной стороне равна 180°
- $S = ah, S = ab \sin \alpha$

Параллелограмм

ТЕОРИ

Я

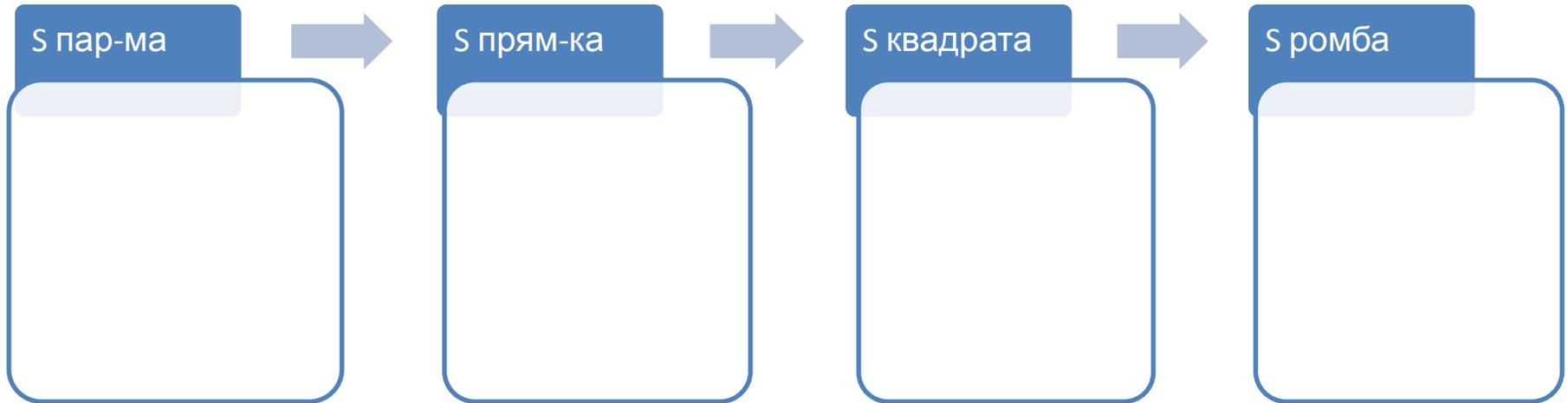
- Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.
- Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.
- Квадрат – это параллелограмм, у которого все углы прямые и стороны равны.

Или

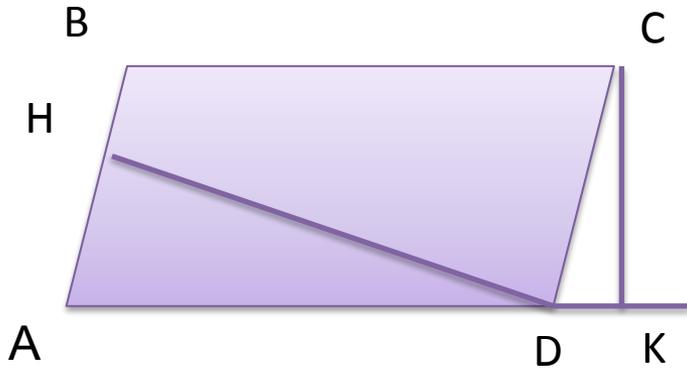
- Квадрат – это ромб, у которого все углы прямые.

Параллелограмм

ТЕОРИ
Я



Примеры заданий



В параллелограмме ABCD $AB = 3$, $AD = 21$,
 $\sin A = \frac{6}{7}$.
Найдите большую высоту параллелогра

Решение:

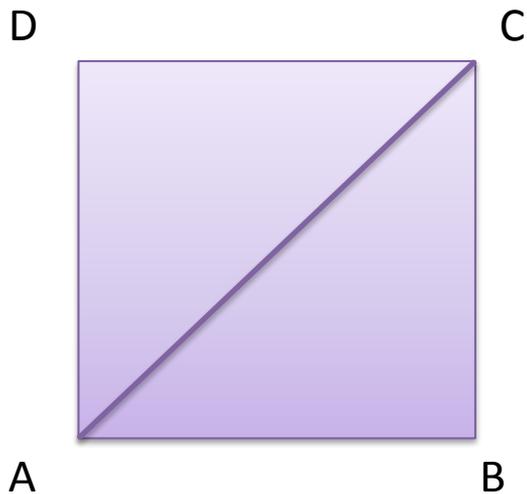
Большая высота проведена к меньшей стороне. Значит находим высоту HD.
Рассмотрим треугольник AHD.

$$\sin A = \frac{HD}{AD}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{HD}{21}$$

$$HD = 18$$

Ответ: $HD = 18$



Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 1.

Решение:

Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей.

Ответ: 0,5

Решение:

$$AB = CB = x$$

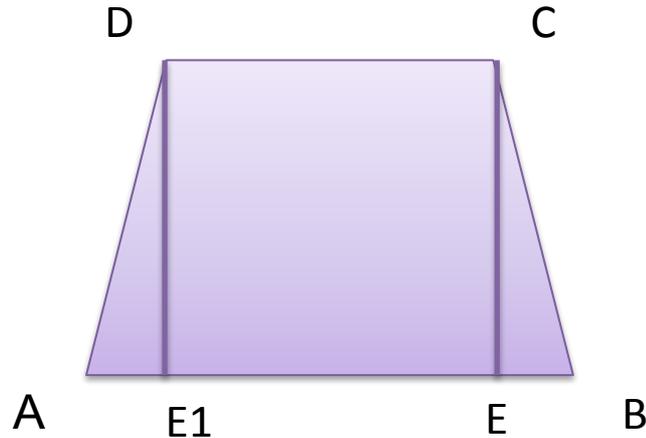
По теореме Пифагора: $x^2 + x^2 = 1$, откуда $x = 0,5$

Трапеция

ТЕОРИ Я

- Трапеция – это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие нет.
- Виды: прямоугольная, равнобедренная
- У равнобедренной трапеции, углы при основании равны.
- Сумма углов в трапеции равно 360° .
- Средняя линия трапеции – это отрезок соединяющий середины боковых сторон. Она параллельна основаниям и равна их полусумме.
- $$S = \frac{a+b}{2} h$$

Примеры заданий



Основания равнобедренной трапеции равны 43 и 73. Косинус острого угла трапеции равен $\frac{5}{7}$.
Найдите боковую сторону.

Решение:

$$1) \cos B = \frac{EB}{CB} \text{ (по определению косинуса)}$$

$$2) EB = (AB - DC) / 2 = 15 \text{ (так как трапеция равнобедренная)}$$

$$3) \frac{5}{7} = \frac{15}{CB}; CB = 21$$

Ответ: 21

Центральные и вписанные углы

ТЕОРИ

Я

- Центральный угол – это угол, вершина которого лежит в центре окружности.
- Центральный угол равен дуге, на которую он опирается.
- Вписанный угол – это угол, вершина которого лежит на окружности.
- Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.
- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
- Теорема об угле, опирающемся на диаметр окружности:
Угол, опирающийся на диаметр окружности – **прямой**.

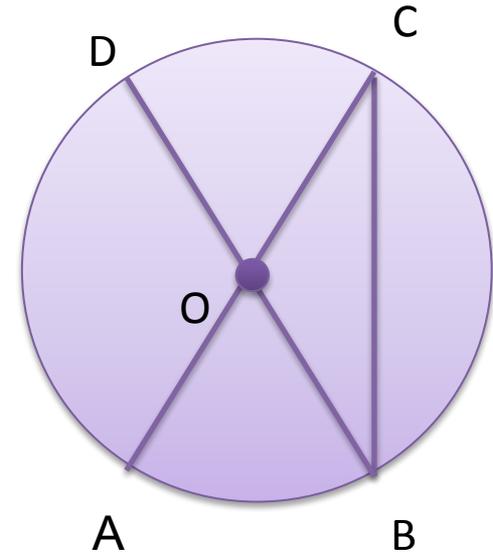
Пример заданий

В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD – диаметры. Вписанный угол ACB равен 38° . Найдите центральный угол AOD . Ответ дайте в градусах.

Решение:

- 1) $\angle ACB$ и $\angle AOB$ – опираются на одну и ту же дугу AB .
- 2) Дуга AB равна $38^\circ \cdot 2 = 76^\circ$, так как $\angle ACB$ – вписанный угол, значит $\angle AOB = 76^\circ$, так как он центральный угол и равен дуге, на которую он опирается.
- 3) $\angle AOB$ и $\angle AOD$ – смежные, а значит в сумме дают 180° .
 $\angle AOD = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$

Ответ: 104°



Касательная, хорда, секущая

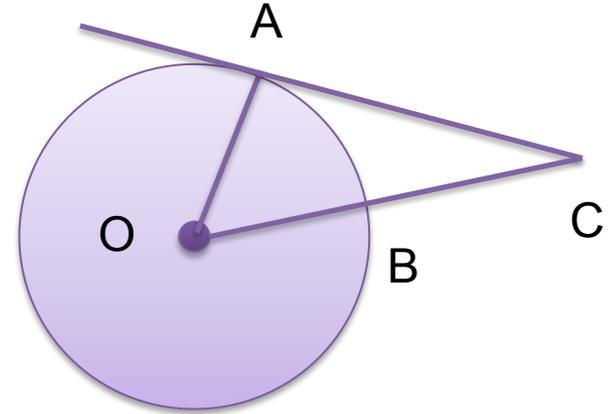
ТЕОРИ

Я

- Касательная – это прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.
- Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
- Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
- Секущая – прямая, пересекающая окружность в двух точках.
- Хорда – это отрезок соединяющий точки на окружности (хорда проходящая через центр окружности называется диаметром)

Пример заданий

Найдите угол АСО, если его сторона СА касается окружности, дуга АВ - равна 64° .
Ответ дайте в градусах.



Решение:

- 1) Дуга АВ равна 64° , значит $\angle AOC = 64^\circ$, так как является центральным углом.
- 2) Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, значит треугольник АОС – прямоугольный, сумма острых углов равна 90° .
- 3) $\angle ASC = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$

Ответ: 26

Вписанные окружности

ТЕОРИ

- Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник — описанным около этой окружности.
- Площадь любого многоугольника можно найти как произведение полупериметра на радиус вписанной окружности.
- В равнобедренном треугольнике вписанная окружность точкой касания делит основание пополам.
- В равностороннем треугольнике радиус вписанной окружности равен трети высоты данного треугольника.
- В прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен:
$$r = \frac{a + b - c}{2},$$
 где a и b — катеты, c — гипотенуза
- В трапеции и ромбе центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов, радиус вписанной окружности равен половине высоты.
- В квадрате радиус вписанной окружности равен половине стороны.

Описанные окружности

ТЕОРИ

- Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник- вписанным в эту окружность.
- В равностороннем треугольнике радиус описанной окружности равен две трети высоты данного треугольника.
- В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы и радиус равен половине гипотенузы.
- Радиус описанной окружности можно найти как:

$$R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

- Около четырехугольника не всегда можно описать окружность. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то только тогда около него можно описать окружность.
- В прямоугольнике и квадрате центр описанной окружности лежит в точке пересечения диагоналей, а радиус описанной окружности равен половине диагонали.

Спасибо за внимание!