

# Планиметрия

## Задание 6

# Решение прямоугольного треугольника

В треугольнике ABC угол C равен 90 градусов, AC=4,8,  
 $\sin A = \frac{7}{25}$ . Найдите AB.

**ТЕОРИ**

**Я**

Решение:

$$\sin A = \frac{CB}{AB} = \frac{7}{25}$$

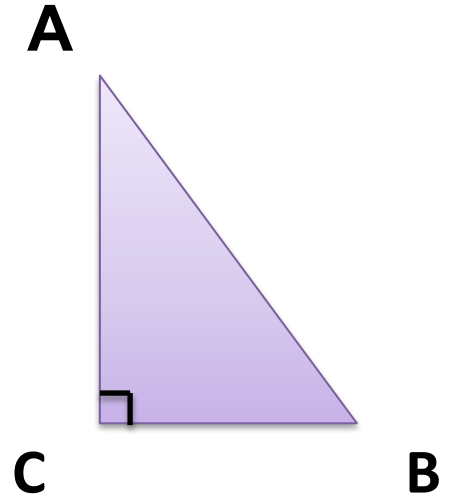
$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$$

$$\cos \alpha = \frac{24}{25}$$

$$AB = AC : \cos A = 4,8 \cdot \frac{25}{24} = 5$$

Ответ: 5



# Теория

- Синусом острого угла, прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.
- Косинусом острого угла, прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.
- Основное тригонометрическое тождество:  
$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$



В треугольнике ABC угол C равен 90 градусов, CH – высота,  $AB = 13$ ,  $\operatorname{tg}A = \frac{1}{5}$ . Найдите  $AH$ .

**ТЕОРИ**

**Я**

Решение:

1) Рассмотрим треугольник ACH

$$\cos A = \frac{AH}{AC}$$

$$AH = AC \cos A$$

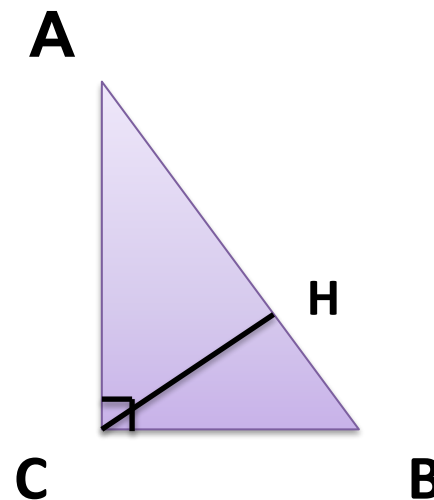
2) Рассмотрим треугольник ABC

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$AC = AB \cos A$$

$$3) AH = AB \cos^2 A = AB \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 A} = 13 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{25}} = 12,5$$

Ответ: 12,5



# Теория

- Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
- $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}$



# Решение равнобедренного треугольника

В треугольнике ABC  $AC = BC = 5$ ,  $\sin A = \frac{7}{25}$ .

Найдите AB.

ТЕОРИ

Я

Решение:

$$\sin A = \frac{CH}{AC}$$

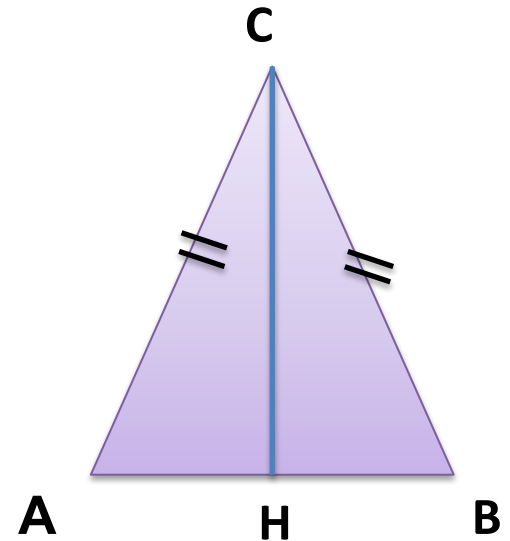
$$\cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{24}{25}$$

$$AB = 2AH$$

$$AH = 4,8 \text{ из отношения } \frac{24}{25} = \frac{AH}{5}$$

$$AB = 9,6$$

Ответ: 9,6

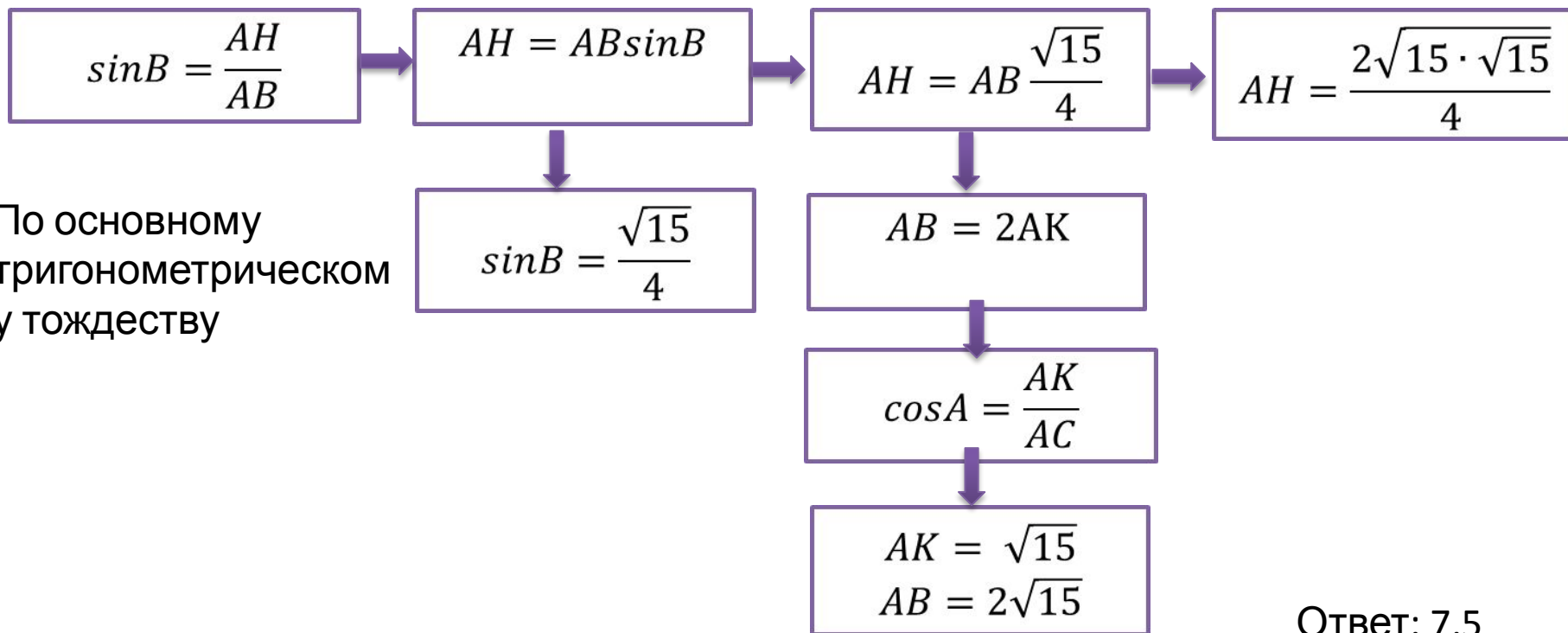
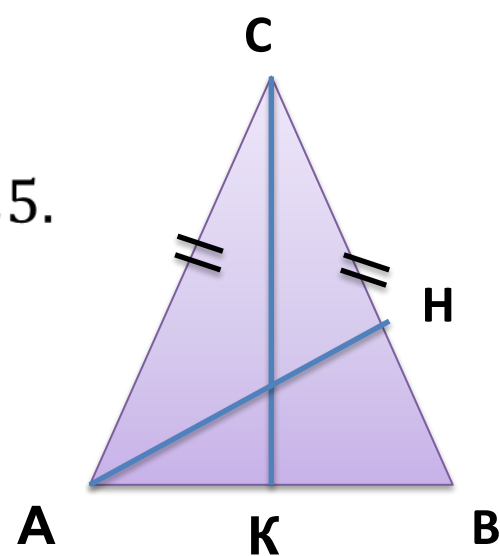


# Теория

- Равнобедренный треугольник – это треугольник, у которого боковые стороны равны.
- Свойства равнобедренного треугольника:
  - Углы при основании равны
  - Биссектриса (делит угол пополам), проведенная к основанию, является и медианой (делит сторону пополам) и высотой (перпендикуляр).



В треугольнике ABC  $AC = BC = 4\sqrt{15}$ ,  $\cos BAC = 0,25$ .  
 Найдите высоту AH.



Ответ: 7,5



# Треугольники общего вида

## ТЕОРИ

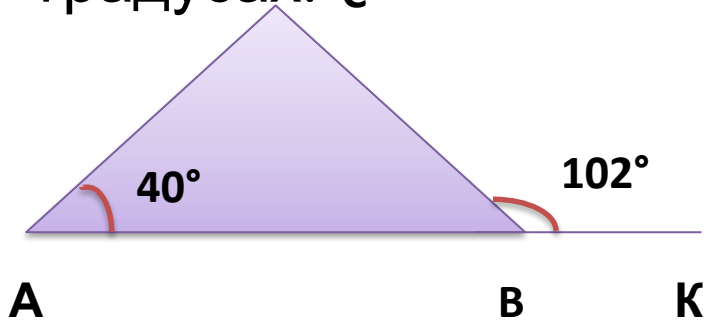
Я

- Сумма углов в треугольнике равна  $180^\circ$
- $S = \frac{1}{2} ah$  (половина произведения основания, на высоту)
- $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$  (половина произведения сторон, на синус угла между ними)
- Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Она параллельна третьей стороне, а ее длина равна половине длины этой стороны.
- Внешний угол треугольника равен сумме несмежных с ним углов этого треугольника.
- Напротив большего угла лежит большая сторона и наоборот.

	<b>Равенство треугольников</b>	<b>Подобие треугольников</b>
<b>1 признак</b>	<b>По двум сторонам и углу между ними</b>	<b>По двум углам</b>
<b>2 признак</b>	<b>По стороне и прилежащим к ней углам</b>	<b>По пропорциональным сторонам и углу между ними</b>
<b>3 признак</b>	<b>По трем сторонам (равенство)</b>	<b>По трем сторонам (пропорциональность)</b>
		<i>Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия.</i>
		<i>Периметры подобных фигур относятся как коэффициент подобия</i>

# Примеры заданий

В треугольнике ABC угол A равен  $40^\circ$ , внешний угол при вершине B равен  $102^\circ$ . Найдите угол C. Ответ дайте в градусах. с



Решение 1:

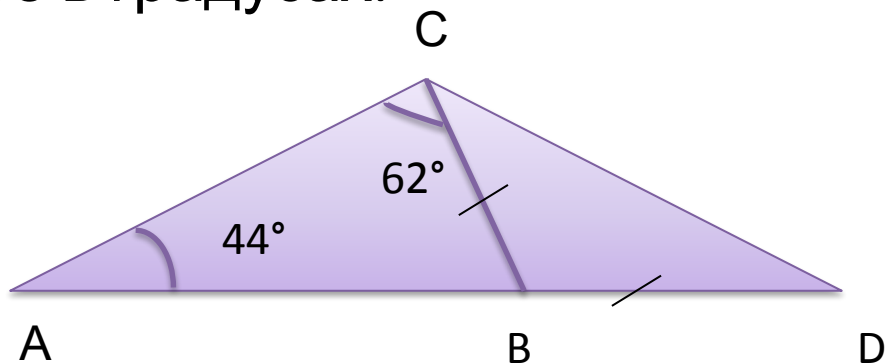
Так как внешний угол треугольника равен сумме углов не смежных с ним, то

$$\angle C = 102^\circ - 40^\circ = 62^\circ$$

Решение 2:

- 1)  $\angle CBK$  и  $\angle CBA$  смежные, а значит в сумме дают  $180^\circ$ .  
 $\angle CBA = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$
- 2) Сумма углов в треугольнике равна  $180^\circ$ . Значит  $\angle C = 180^\circ - (78^\circ + 40^\circ) = 62^\circ$

В треугольнике ABC угол A равен  $44^\circ$ , а угол C равен  $62^\circ$ . На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD, равный стороне BC. Найдите угол D треугольника BCD. Ответ дайте в градусах.



Решение:

- 1)  $\angle CBD$  – внешний угол для треугольника ABC, значит  $\angle CBD = 44^\circ + 62^\circ = 106^\circ$
- 2) По свойству равнобедренного треугольника  $\angle C = \angle D$ , треугольника CBD, а сумма углов в треугольнике равно  $180^\circ$   
Следовательно  $\angle D = (180^\circ - 106^\circ) / 2 = 37^\circ$

Ответ:  $37^\circ$

# Параллелограмм

## ТЕОРИ

Я

- Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.
- Частными случаями пар-ма являются прямоугольник, квадрат и ромб.
- Свойства параллелограмма:
  - Противоположные стороны попарно равны
  - Сумма углов равна  $360^\circ$
  - Противоположные углы равны
  - Сумма углов прилежающих к одной стороне равна  $180^\circ$
- $S = ah, S = ab \sin \alpha$

# Параллелограмм

ТЕОРИ

Я

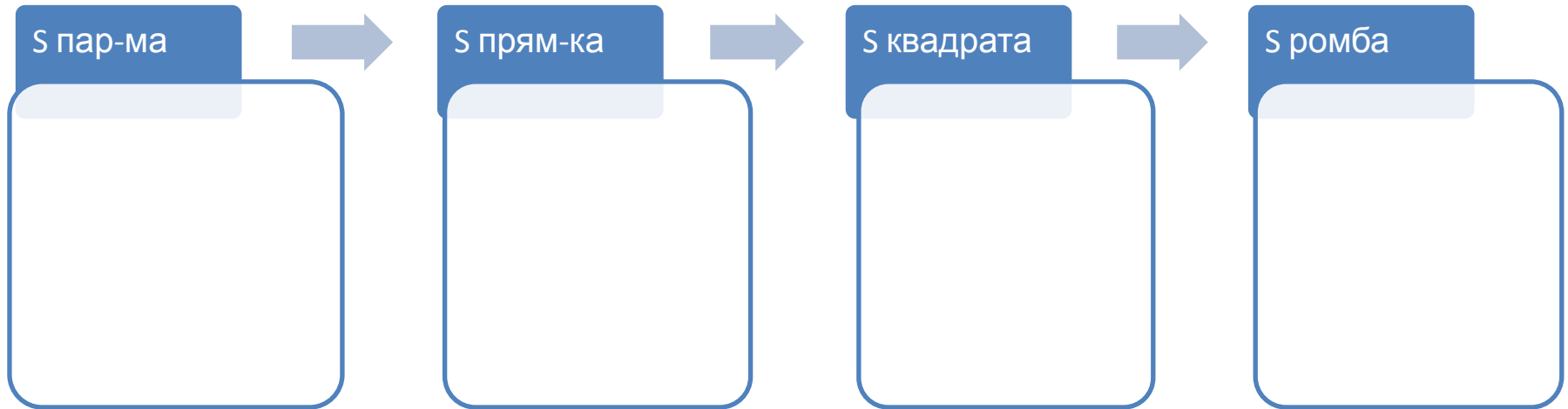
- Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.
- Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.
- Квадрат – это параллелограмм, у которого все углы прямые и стороны равны.

Или

- Квадрат – это ромб, у которого все углы прямые.

# Параллелограмм

ТЕОРИ  
Я



# Примеры заданий



В параллелограмме ABCD  $AB = 3$ ,  $AD = 21$ ,  
 $\sin A = \frac{6}{7}$ .  
Найдите большую высоту параллелогра

Решение:

Большая высота проведена к меньшей стороне. Значит находим высоту HD.  
Рассмотрим треугольник AHD.

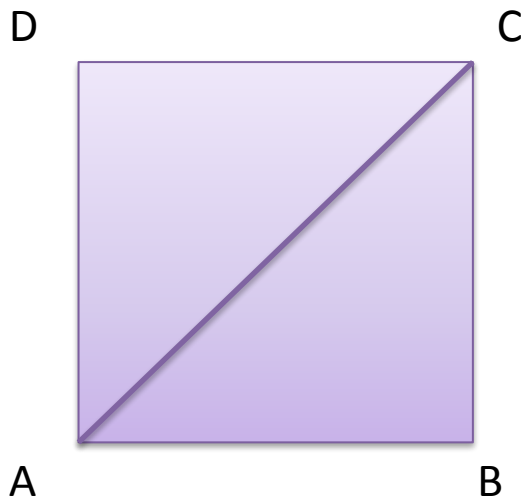
$$\sin A = \frac{HD}{AD}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{HD}{21}$$

$$HD = 18$$

Ответ:  $HD = 18$





Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 1.

Решение:

Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей.

Ответ: 0,5

Решение:

$$AB = CB = x$$

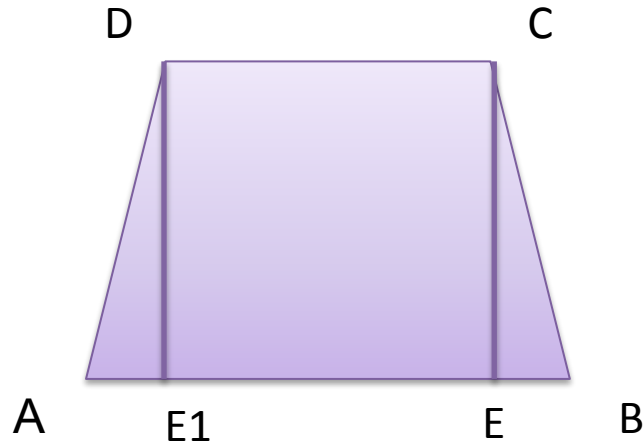
По теореме Пифагора:  $x^2 = 1$ , откуда  $x = 0,5$

# Трапеция

## ТЕОРИ Я

- Трапеция – это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие нет.
- Виды: прямоугольная, равнобедренная
- У равнобедренной трапеции, углы при основании равны.
- Сумма углов в трапеции равно  $360^\circ$ .
- Средняя линия трапеции – это отрезок соединяющий середины боковых сторон. Она параллельна основаниям и равна их полусумме.
- $$S = \frac{a+b}{2} h$$

# Примеры заданий



Основания равнобедренной трапеции равны 43 и 73. Косинус острого угла трапеции равен  $\frac{5}{7}$ .  
Найдите боковую сторону.

Решение:

$$1) \cos B = \frac{EB}{CB} \text{ (по определению косинуса)}$$

$$2) EB = (AB - DC) / 2 = 15 \text{ (так как трапеция равнобедренная)}$$

$$3) \frac{5}{7} = \frac{15}{CB}; CB = 21$$

Ответ: 21

# Центральные и вписанные углы

## ТЕОРИ

Я

- Центральный угол – это угол, вершина которого лежит в центре окружности.
- Центральный угол равен дуге, на которую он опирается.
- Вписанный угол – это угол, вершина которого лежит на окружности.
- Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.
- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
- Теорема об угле, опирающемся на диаметр окружности:  
Угол, опирающийся на диаметр окружности – **прямой**.

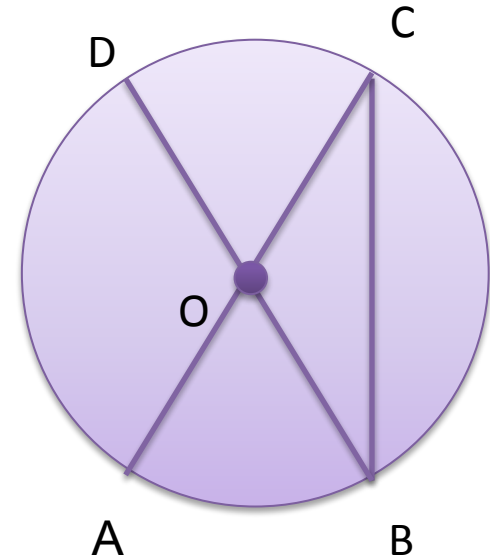
# Пример заданий

В окружности с центром в точке  $O$  отрезки  $AC$  и  $BD$  – диаметры. Вписанный угол  $ACB$  равен  $38^\circ$ . Найдите центральный угол  $AOD$ . Ответ дайте в градусах.

Решение:

- 1)  $\angle ACB$  и  $\angle AOB$  – опираются на одну и ту же дугу  $AB$ .
- 2) Дуга  $AB$  равна  $38^\circ \cdot 2 = 76^\circ$ , так как  $\angle ACB$  – вписанный угол, значит  $\angle AOB = 76^\circ$ , так как он центральный угол и равен дуге, на которую он опирается.
- 3)  $\angle AOB$  и  $\angle AOD$  – смежные, а значит в сумме дают  $180^\circ$ .  
 $\angle AOD = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$

Ответ:  $104^\circ$



# Касательная, хорда, секущая

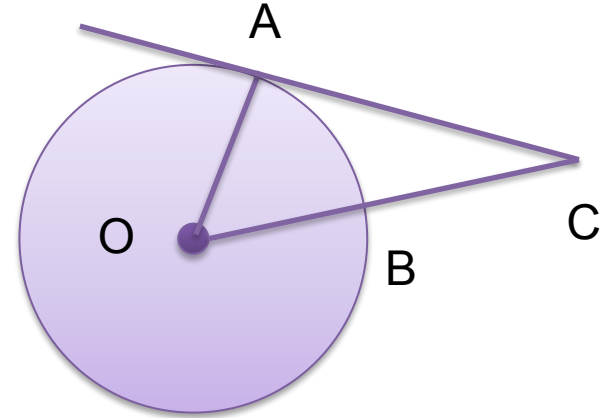
## ТЕОРИ

Я

- Касательная – это прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.
- Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
- Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
- Секущая – прямая, пересекающая окружность в двух точках.
- Хорда – это отрезок соединяющий точки на окружности (хорда проходящая через центр окружности называется диаметром)

# Пример заданий

Найдите угол  $\angle ACO$ , если его сторона  $CA$  касается окружности, дуга  $AB$  - равна  $64^\circ$ .  
Ответ дайте в градусах.



Решение:

- 1) Дуга  $AB$  равна  $64^\circ$ , значит  $\angle AOC = 64^\circ$ , так как является центральным углом.
- 2) Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, значит треугольник  $AOC$  - прямоугольный, сумма острых углов равна  $90^\circ$ .
- 3)  $\angle ACO = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$

Ответ: 26

# Вписанные окружности

## ТЕОРИ

- Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник — описанным около этой окружности.
- Площадь любого многоугольника можно найти как произведение полупериметра на радиус вписанной окружности.
- В равнобедренном треугольнике вписанная окружность точкой касания делит основание пополам.
- В равностороннем треугольнике радиус вписанной окружности равен трети высоты данного треугольника.
- В прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен:
$$r = \frac{a + b - c}{2},$$
 где  $a$  и  $b$  — катеты,  $c$  — гипотенуза
- В трапеции и ромбе центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов, радиус вписанной окружности равен половине высоты.
- В квадрате радиус вписанной окружности равен половине стороны.



# Описанные окружности

## ТЕОРИ

- Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник- вписанным в эту окружность.
- В равностороннем треугольнике радиус описанной окружности равен две трети высоты данного треугольника.
- В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы и радиус равен половине гипотенузы.
- Радиус описанной окружности можно найти как:

$$R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

- Около четырехугольника не всегда можно описать окружность. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна  $180^\circ$ , то только тогда около него можно описать окружность.
- В прямоугольнике и квадрате центр описанной окружности лежит в точке пересечения диагоналей, а радиус описанной окружности равен половине диагонали.

**Спасибо за внимание!**