

# *Презентация по математике*

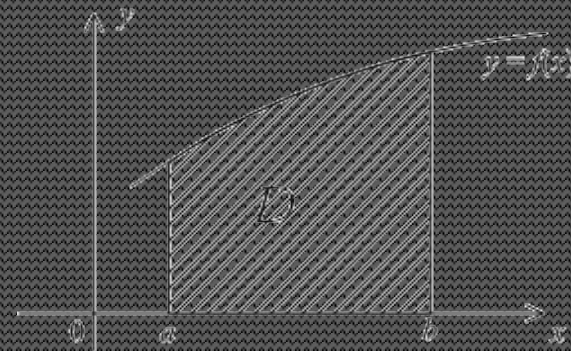
На тему : Площадь криволинейной трапеции.  
Формула Ньютона-Лейбница

# Площадь криволинейной трапеции

## Определение:

фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции  $f$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ .

## Изображения криволинейных трапеций:

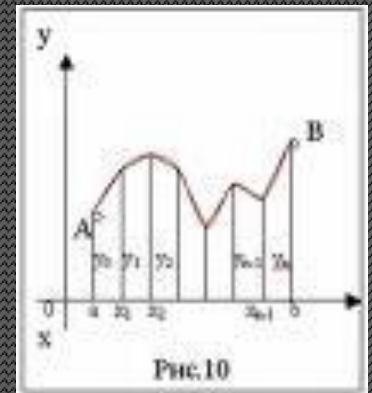


# Теорема о вычислении площади криволинейной трапеции

## Теорема:

Если  $f$  – непрерывная и неотрицательная на отрезке  $[a; b]$  функция, а  $F$  – ее первообразная на этом отрезке, то площадь  $S$  соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке  $[a; b]$ , т.е.

$$S = F(b) - F(a)$$



# Доказательство

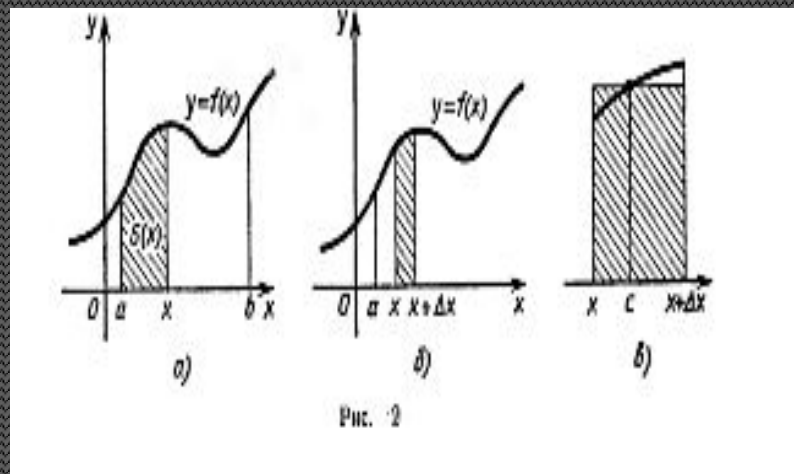
Доказательство : Рассмотрим функцию  $S(x)$  , определенную на отрезке  $[a; b]$  . Если  $a < x \leq b$  , то  $S(x)$  – площадь той части криволинейной трапеции , которая расположена левее вертикальной прямой , проходящей через точку  $M(x; 0)$  ( рис 2.а)

Если  $x = a$  , то  $S(a) = 0$  . Отметим , что  $S(b) = S$  (  $S$  – площадь криволинейной трапеции ) .

Нам осталось доказать , что  $S'(x) = f(x)$  (2)

По определению производной докажем, что  $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x)$  (3)

$\Delta x$   
при  $\Delta x \rightarrow 0$



# Доказательство

Выясним геометрический смысл числителя  $\Delta S(x)$ . Для простоты рассмотрим случай  $\Delta x > 0$ . Поскольку  $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ , то  $\Delta S(x)$  – площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 2, б. Дальнейшее доказательство рассмотрите самостоятельно. Итак, мы получили, что  $S$  есть первообразная для  $f$ . Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех  $x$ , принадлежащих промежутку  $[a; b]$ , имеем:

$$S(x) = F(x) + C,$$

где  $C$  – некоторая постоянная, а  $F$  – одна из первообразных для функции  $f$ . Для нахождения  $C$  подставим  $x = a$ :

$$F(a) + C = S(a) = 0,$$

откуда  $C = -F(a)$ . Следовательно,

$$S(x) = F(x) - F(a). \quad (4)$$

Поскольку площадь криволинейной трапеции равна  $S(b)$ , подставляя  $x = b$  в формулу (4), получим:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

Пусть на отрезке  $[a; b]$  оси  $Ox$  задана непрерывная функция  $f$ , не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком  $[a; b]$  и прямыми  $x = a$  и  $x = b$  (рис. 1), называют **криволинейной трапецией**. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках 1, а — д.

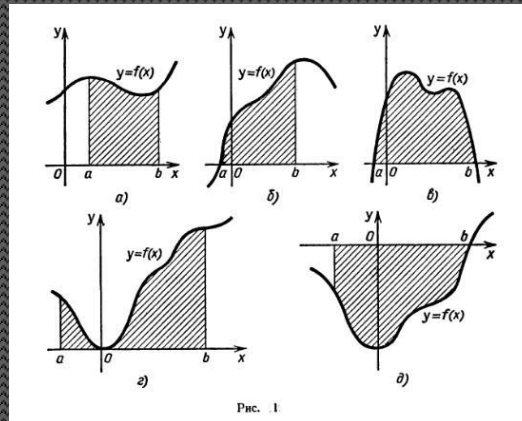


Рис. 1

- Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяется следующая теорема:

**Теорема.** Если  $f$  — непрерывная и неотрицательная на отрезке  $[a; b]$  функция, а  $F$  — ее первообразная на этом отрезке, то площадь  $S$  соответствующей криволинейной трапеции (рис. 2) равна приращению первообразной на отрезке  $[a; b]$  т. е.

- $S = F(b) - F(a)$ . (1)

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $S(x)$ , определенную на отрезке  $[a; b]$ . Если  $a < x \leq b$ , то  $S(x)$  — площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена левее вертикальной прямой, проходящей через точку  $M(x; 0)$  (рис. 2, а). Если  $x = a$ , то  $S(a) = 0$ . Отметим, что  $S(b) = S$  ( $S$  — площадь криволинейной трапеции).



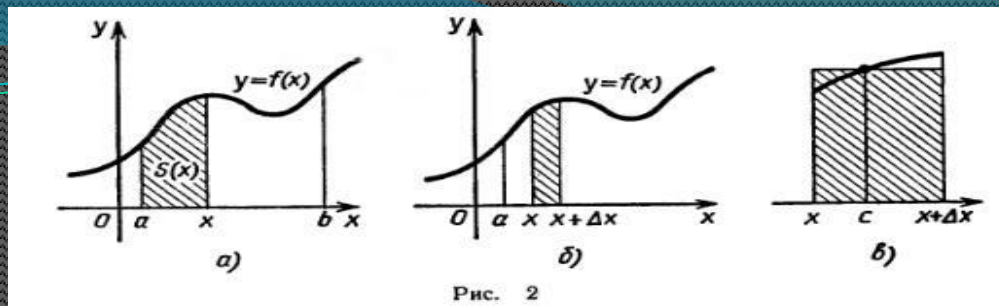


Рис. 2

- Докажем, что  $S'(x)=f(x)$ . (2)

По определению производной надо доказать, что

- при (3)

Выясним геометрический смысл числителя  $\Delta S(x)$ . Для простоты рассмотрим случай  $\Delta x > 0$ . Поскольку  $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ , то  $\Delta S(x)$  — площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 2, б. Возьмем теперь прямоугольник той же площади  $\Delta S(x)$ , опирающийся на отрезок  $[x; x + \Delta x]$  (рис. 2, в). В силу непрерывности функции  $f$  верхняя сторона прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой  $c \in [x; x + \Delta x]$  (в противном случае этот прямоугольник либо содержится в части криволинейной трапеции над отрезком  $[x; x + \Delta x]$ , либо содержит ее; соответственно его площадь будет меньше или больше площади  $\Delta S(x)$ ). Высота прямоугольника равна  $f(c)$ . По формуле площади прямоугольника имеем  $\Delta S(x) = f(c) \Delta x$ , откуда (эта формула верна и при  $\Delta x < 0$ ). Поскольку точка  $c$  лежит между  $x$  и  $x + \Delta x$ ; то  $c$  стремится к  $x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Так как функция  $f$  непрерывна, при  $\Delta x \rightarrow 0$   $f(c)$  стремится к  $f(x)$ . Итак, при  $\Delta x \rightarrow 0$  формула (2) доказана. Мы получили, что  $S$  есть первообразная для  $f$ . Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех  $x \in [a; b]$  имеем:

- $S(x) = F(x) + C$ ,

где  $C$  — некоторая постоянная, а  $F$  — одна из первообразных для функции  $f$ . Для нахождения  $C$  подставим  $x = a$ :  $F(a) + C = S(a) = 0$ ,

- откуда  $C = -F(a)$ . Следовательно,

$$S(x) = F(x) - F(a). \quad (4)$$

Поскольку площадь криволинейной трапеции равна  $S(b)$ , подставляя  $x = b$  в формулу (4), получим:

- $S = S(b) = F(b) - F(a)$ .

# Пошаговый пример

**Пример:** Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = 4 - x^2$  и  $y = 0$

**Решение:**

1. Построим криволинейную трапецию:

$y = 4 - x^2$  - квадратичная функция, график - парабола, ветви направлены вниз.  
 $y = 0$  - ось абсцисс.

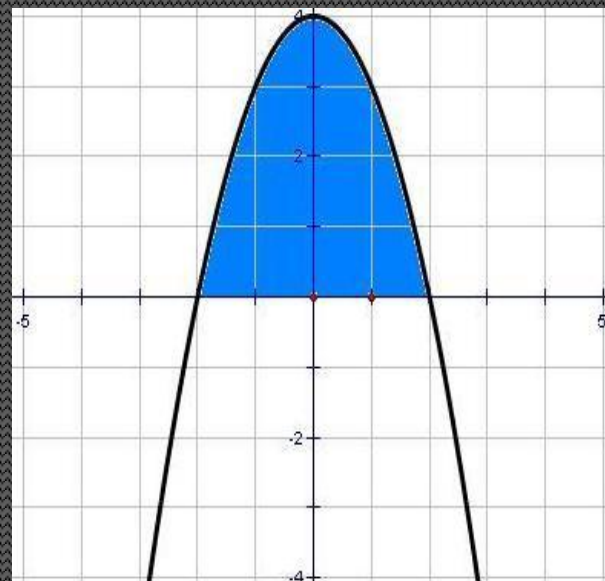
2. Найдём  $[a; b]$ :

$$4 - x^2 = 0; x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ или } x = 2, \text{ т. е. } a = -2 \quad b = 2$$

3. Найдём площадь криволинейной трапеции по формуле:  $S = F(b) - F(a)$

$$S = F(2) - F(-2) = \underline{10,6}$$





# Формула Ньютона- Лейбница

$$\int_b^a f(x) = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Определённый интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

ТЕОРЕМА. Пусть функция  $y=f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a,b]$  и  $F(x)$  – любая первообразная для  $f(x)$  на  $[a,b]$ . Тогда определенный интеграл от функции  $f(x)$  на  $[a,b]$  равен приращению первообразной  $F(x)$  на этом отрезке, т.е.

Нахождение определенных интегралов с использованием формулы Ньютона–Лейбница (2) осуществляется в два шага: на первом шаге, используя технику нахождения неопределенного интеграла, находят некоторую первообразную  $F(x)$  для подынтегральной функции  $f(x)$ ; на втором применяется собственно формула Ньютона–Лейбница – находится приращение первообразной, равное искомому интегралу. В связи с этим, введем обозначение для приращения первообразной, которое удобно использовать при записи решений. По определению положим

Следует подчеркнуть, что при применении формулы Ньютона – Лейбница можно использовать любую первообразную  $F(x)$  для подынтегральной функции  $f(x)$ , например имеющую наиболее простой вид при  $C=0$

## Формула Ньютона Лейбница

Из результатов предыдущего параграфа следует, что непрерывная на  $[a; b]$  функция  $f(x)$  имеет на этом отрезке первообразную, например

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Поставим теперь следующую задачу: зная одну из первообразных  $\Phi(x)$  функции  $f(x)$  на  $[a; b]$  вычислить определенный интеграл от функции  $f(x)$ , или что тоже самое по известному неопределенному интегралу найти определенный интеграл.

Пусть  $F(x)$  - любая другая первообразная функции  $f(x)$  на том же отрезке  $[a; b]$ . Так как две первообразные отличаются друг от друга постоянным слагаемым, то получаем равенство

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Подставим в это равенство значение  $x = a$

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C \Rightarrow F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

т.е.

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a) \quad \forall x \in [a; b]$$

Полагая  $x = b$  и обозначая переменную интегрирования за  $x$ , получаем основную формулу интегрального исчисления:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (4)$$

которая называется **формулой Ньютона - Лейбница**.

Формула Ньютона - Лейбница дает правило вычисления определенного интеграла: *значение определенного интеграла на отрезке  $[a; b]$  от непрерывной функции  $f(x)$  равно разности значений любой ее первообразной, вычисленной при  $x = b$  и  $x = a$ .*

Разность  $F(b) - F(a)$  в правой части равенства (4) обычно записывают так:  $F(x)|_a^b$ . Тогда формула Ньютона - Лейбница принимает следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула 4 позволяет вычислять определенный интеграл не по определению (т.е. вычисляя предел интегральных сумм), а сводится к задаче нахождения неопределенного интеграла.



## Основные методы вычисления определенного интеграла

### Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона - Лейбница.

Если  $F(x)$  - одна из первообразных непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции  $f(x)$ , то справедлива формула Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Эта формула позволяет свести вычисление определенного интеграла к вычислению неопределенного.

Примеры

$$1) \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1;$$

$$2) \int_0^1 (6x^2 + 3) dx = (2x^3 + 3x) \Big|_0^1 = (2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1) - (2 \cdot 0 + 3 \cdot 0) = 5;$$

$$3) \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2;$$

$$4) \int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int_1^6 (3+x)^{-1/2} dx = 2\sqrt{3+x} \Big|_1^6 = 2(\sqrt{9} - \sqrt{2}) = 2;$$

$$5) \int_{-1}^0 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_{-1}^0 = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

### Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле

Этот метод, как и в случае неопределенного интеграла, позволяет упростить вычисления, т.е. привести подынтегральное выражение к табличному виду. Имеет место следующая теорема

**Теорема 5** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , а функция  $x = \varphi(t)$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[t_1, t_2]$ , причем  $\varphi([t_1, t_2]) = [a; b]$  и  $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$ , то справедлива формула

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt} \quad (5)$$

▷ Пусть  $F(x)$  - первообразная для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Поскольку  $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$ , то по формуле Ньютона - Лейбница имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = F(\varphi(t_1)) - F(\varphi(t_2)) = \int_{t_1}^{t_2} d(F(\varphi(t))) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} F'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \triangleleft \end{aligned}$$

Формула (5) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

Пример 1: Вычислить  $\int_0^9 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ ;



Осуществим замену переменной:  $x = t^2$ , тогда  $dx = 2tdt$ . Пределы интегрирования сведем в таблицу:

x	0	9
t	0	3

По формуле (5)

$$\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^3 \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2(t - \ln|1+t|) \Big|_0^3 = 6 - 2 \ln 4.$$

Пример 2: Вычислить  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

Произведем замену  $\sin x = t$ . Тогда  $\cos x dx = dt$ .

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
t	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Применяем формулу (5)

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} t^{-3} dt = -\frac{1}{2t^2} \Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

### Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Пусть  $u(x)$  и  $v(x)$  - дифференцируемые на отрезке  $[a; b]$  функции. Тогда  $d(uv) = u dv + v du$ . Проинтегрируем это равенство на отрезке  $[a; b]$

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b u dv + \int_a^b v du. \quad (6)$$

С другой стороны, по формуле Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b d(uv) = uv \Big|_a^b$$

Следовательно, формула (6) принимает вид:

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du} \quad (7)$$

Формула (7) называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример 1: Вычислить  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ .

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi$$

Пример 2: Вычислить  $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x}, v = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = x \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx = \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \cos x \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln \cos \frac{\pi}{4} - \ln \cos 0 = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \approx 0,92.$$

## Несобственные интегралы

### Понятие несобственных интегралов

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы мы требовали выполнения двух условий :

- 1) пределы интегрирования  $a$  и  $b$  являются конечными;
- 2) подынтегральная функция  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

В этом случае определенные интегралы называются собственными. Если хотя бы одно из указанных условий не выполнено интеграл называется несобственным.

Несобственные интегралы являются обобщением понятия определенного интеграла в случае бесконечного промежутка или неограниченной функции.

**Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода)**



Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[a; \infty)$ . Тогда она будет непрерывна на любом конечном отрезке  $[a; b], a < b$ . Для функции  $f(x)$ , непрерывной на  $[a; b]$  существует определенный интеграл  $I(b)$ , зависящий от верхнего предела интегрирования:

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx .$$

Этот интеграл определяет некоторую величину, например площадь соответствующей криволинейной трапеции. Будем неограниченно увеличивать верхний предел интегрирования, при этом возможны два случая: либо  $I(b)$  имеет конечный предел, либо не имеет.

**Определение 2** Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования от непрерывной функции  $f(x)$  на промежутке  $[a; \infty)$  называется предел  $I(b)$  при  $b \rightarrow \infty$ :

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (8)$$

Аналогично определяется *несобственный интеграл с переменным нижним пределом интегрирования*

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (9)$$

Если пределы в правых частях формул (8) и (9) существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы называются сходящимися, если пределы не существуют или бесконечны, то расходящимися.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции  $f(x)$  на промежутке  $(-\infty; \infty)$ , обозначаемый  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ,

предварительно представляем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \quad c \in (-\infty; \infty).$$

Тогда по определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx, \quad (10)$$

причем этот интеграл называется сходящимся, если оба предела существуют.

Интегралы (8) - (10) называются несобственными интегралами первого рода.

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  означает, что фигура, ограниченная кривой  $y = f(x) \geq 0$ , прямыми  $x = a, y = 0$  и бесконечно вытянутая вдоль в направлении оси  $OX$  имеет конечную площадь.