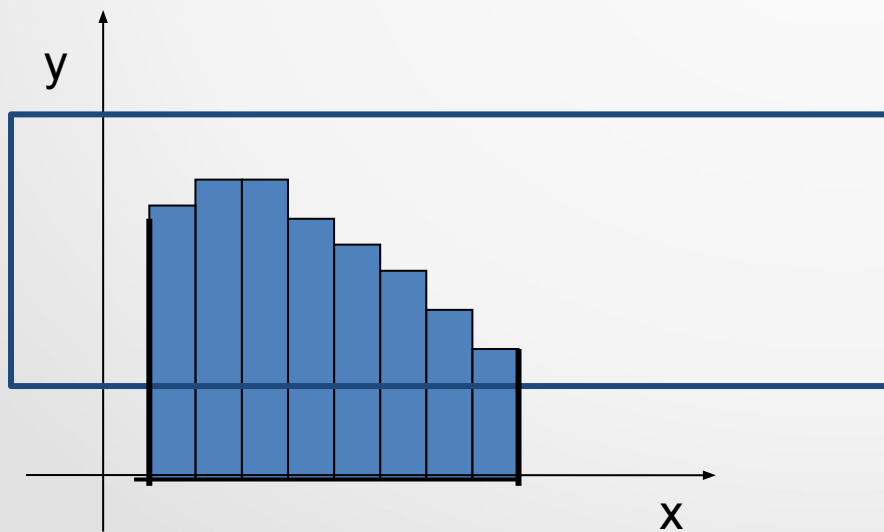


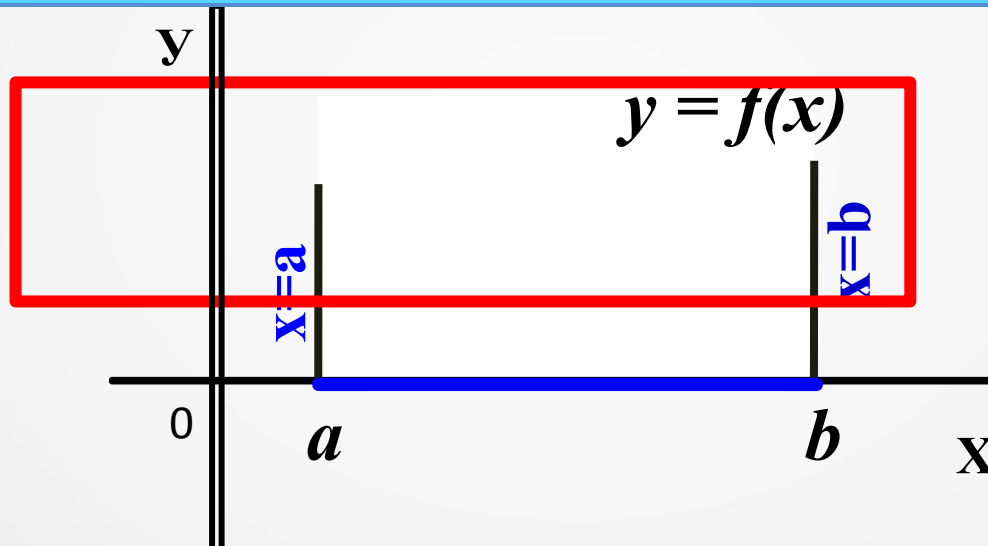
# Площадь криволинейной трапеции и интеграл.



▫ Найти первообразную функции:

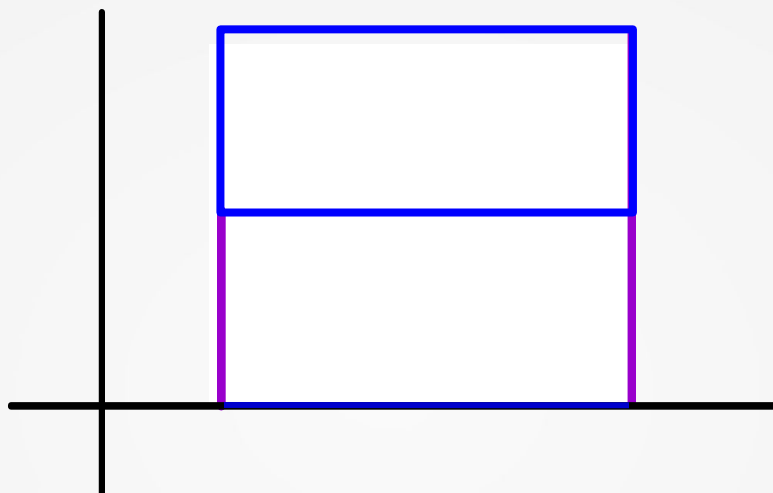
# Криволинейная трапеция

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке  $[a;b]$  знака функции  $f(x)$ , прямыми  $x=a$ ,  $x=b$  и отрезком  $[a;b]$ .



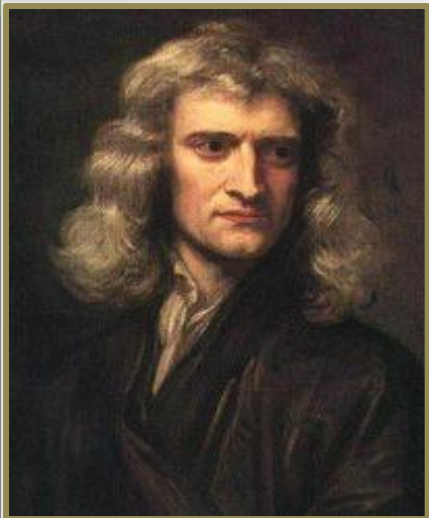
Отрезок  $[a;b]$  называют *основанием* этой криволинейной трапеции

# Площадь криволинейной трапеции.

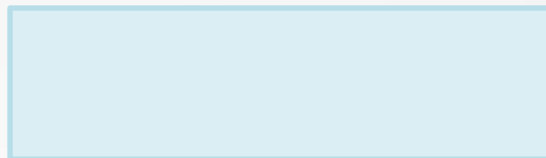
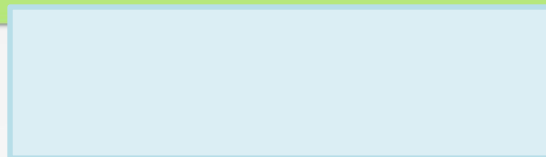


где  $F(x)$  – любая первообразная функции  $f(x)$ .

# Формула Ньютона-Лейбница

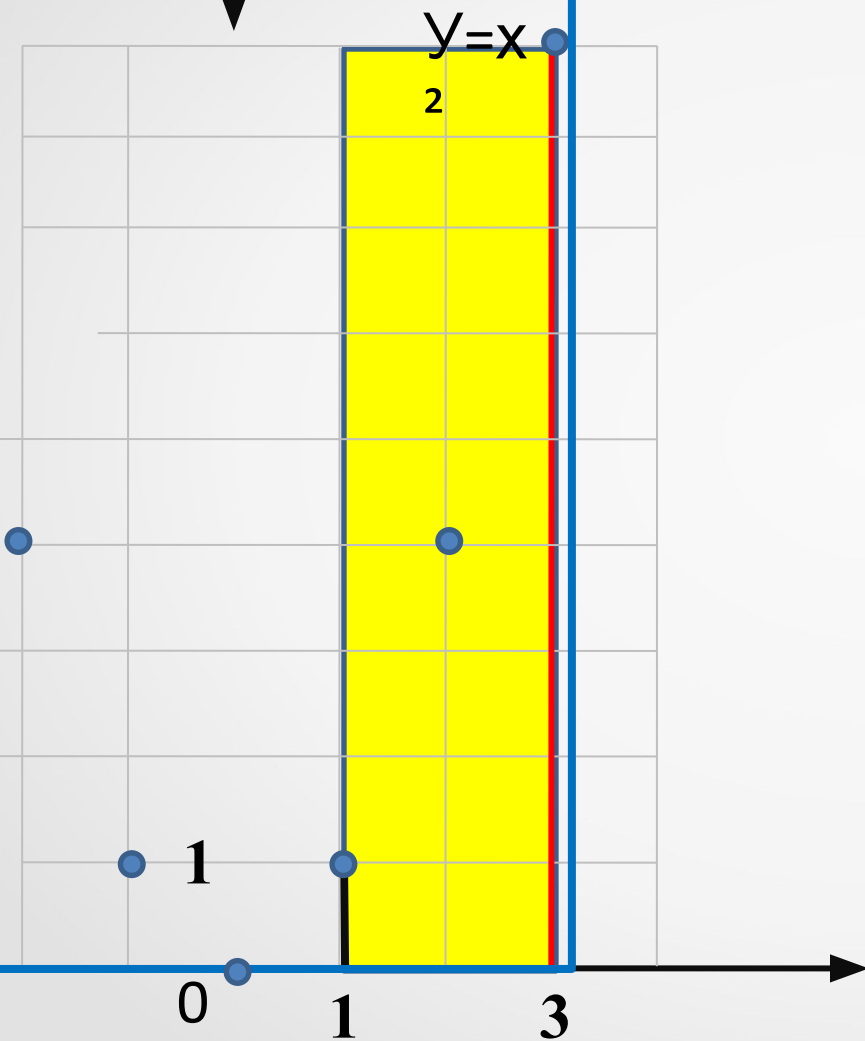


1643—1727



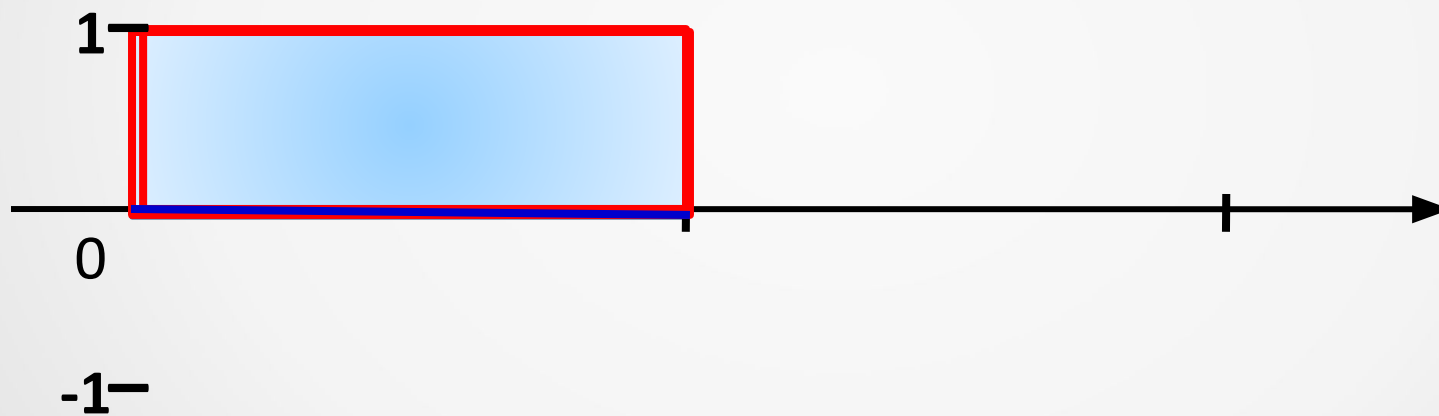
1646—1716

Найти площадь криволинейной трапеции,  
изображенной на рисунке



Найти площадь криволинейной трапеции,  
изображенной на рисунке

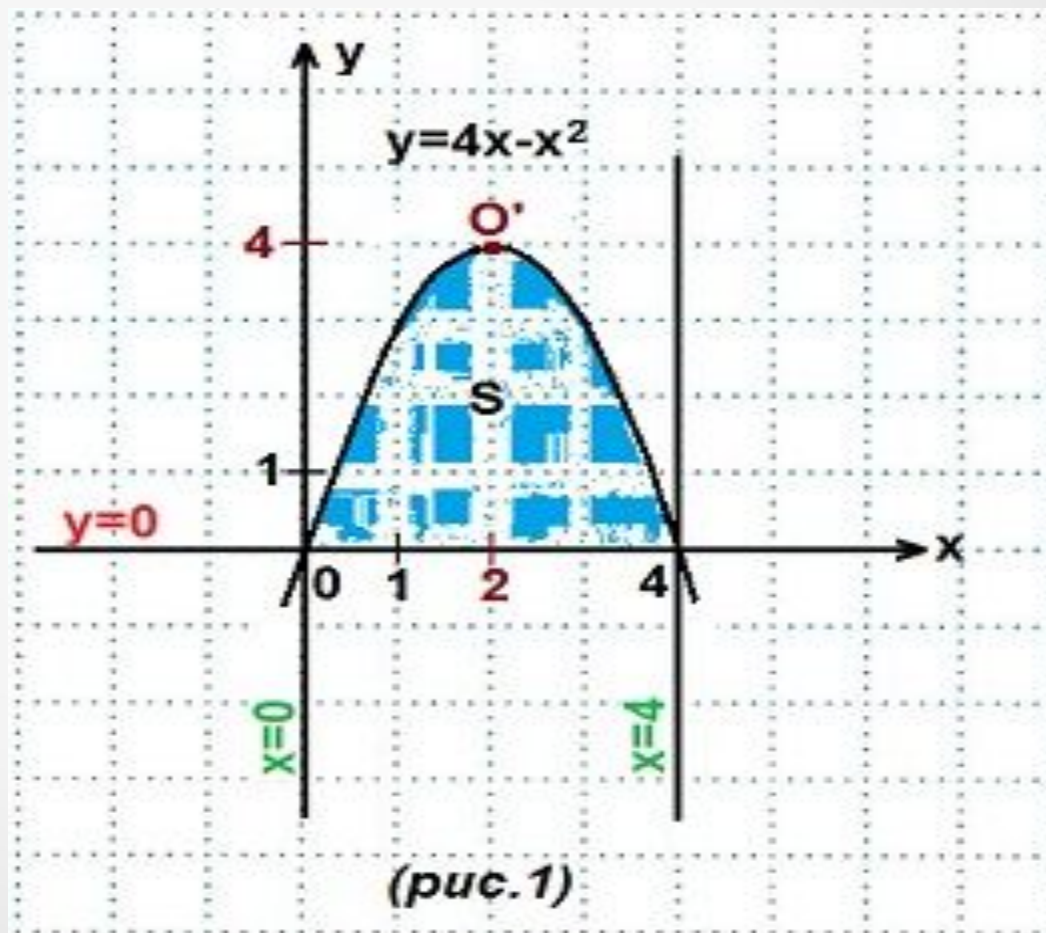
$$y = \sin x$$



градусы	$0^{\circ}$	$30^{\circ}$	$45^{\circ}$	$60^{\circ}$	$90^{\circ}$	$120^{\circ}$	$135^{\circ}$	$150^{\circ}$	$180^{\circ}$	$270^{\circ}$	$360^{\circ}$
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0
ctg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-



Найти площадь криволинейной трапеции,  
ограниченной линиями:  $y=4x-x^2$ ;  $y=0$ ;  $x=0$ ;  $x=4$ .



Решение. Строим графики данных линий.

1)  $y=4x-x^2$  — парабола (вида  $y=ax^2+bx+c$ ). Запишем данное уравнение в общем виде:  $y=-x^2+4x$ . Ветви этой параболы направлены вниз, так как первый коэффициент  $a=-1<0$ .

Вершина параболы находится в точке  $O'(m; n)$ , где

$O'(2; 4)$ . Нули функции (точки пересечения графика с осью  $Ox$ ) найдем из уравнения:  $4x-x^2=0$ .

Выносим  $x$  за скобки, получаем:  $x(4-x)=0$ . Отсюда,  $x=0$  или  $x=4$ .

Абсциссы точек найдены, ордината равна нулю — искомые точки:  $(0; 0)$  и  $(4; 0)$ .

2)  $y=0$  — это ось  $Ox$ ;

3)  $x=0$  — это ось  $Oy$ ;

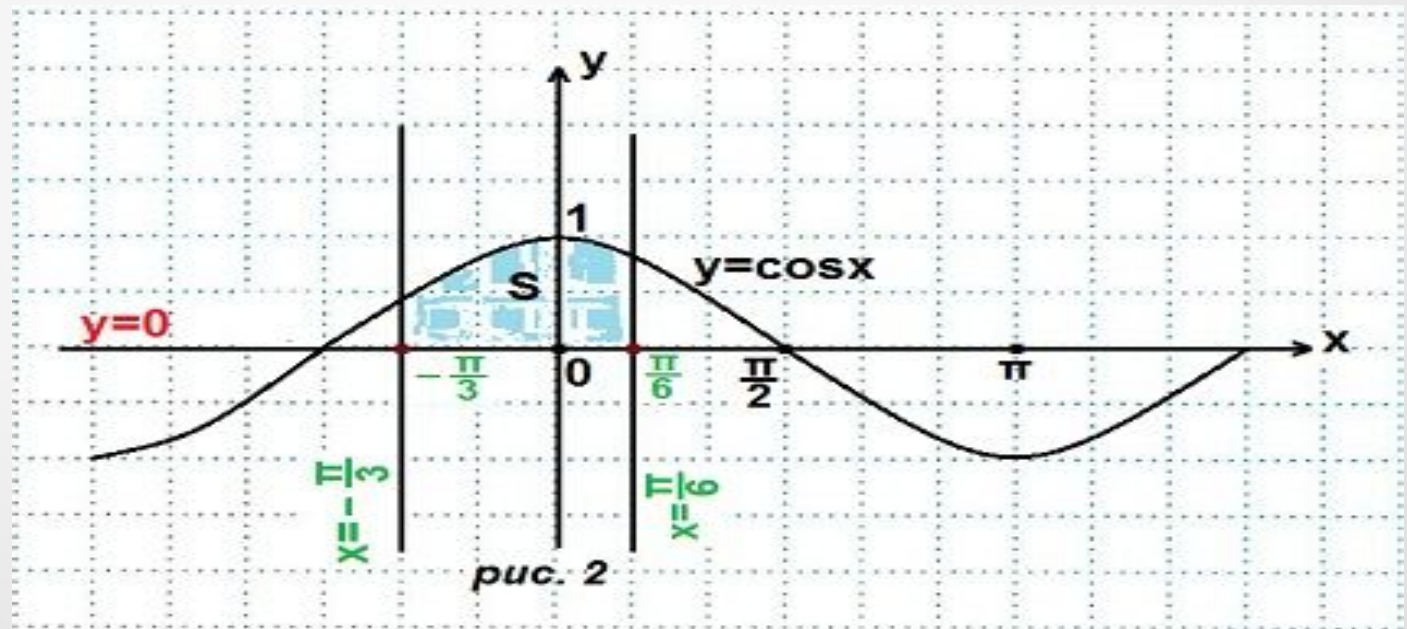
4)  $x=4$  — прямая, параллельная оси  $Oy$  и отстоящая от нее на 4 единичных отрезка вправо.

Площадь построенной криволинейной трапеции находим по (ф. Н-Л).

У нас  $f(x)=4x-x^2$ ,  $a=0$ ,  $b=4$ .

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$$y = \cos x; y = 0; x = -\frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{6}.$$



Решение:

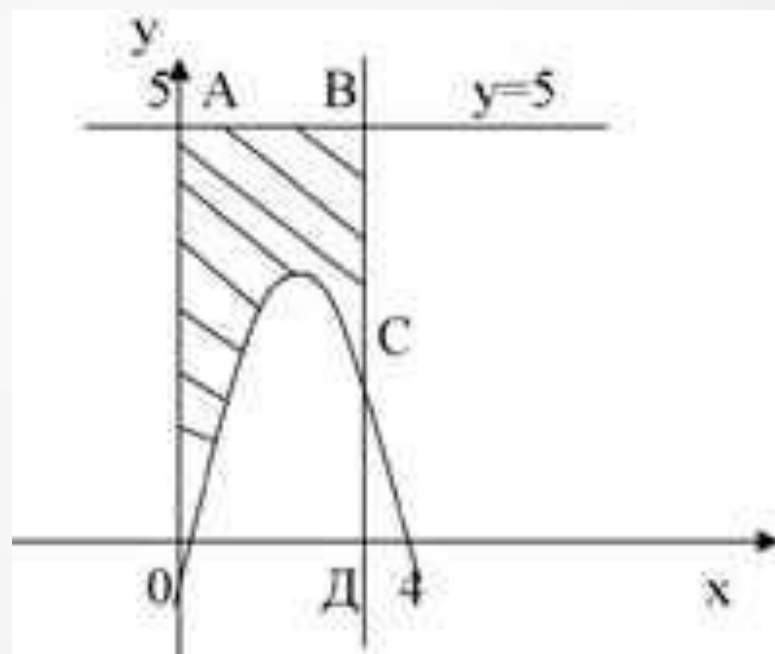
$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

Ответ:  $S = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  (кв. ед.)

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 4x - x^2, y = 5, x = 3$$

$$X_0 = 2, Y_0 = 4$$



$$S_{\phi} = S(OABD) - S(OCД)$$

$$S_{\text{пря.}} = a \cdot b = 5 \cdot 3 = 15$$

$$S(OCД) = F(3) - F(0),$$

где  $F(x)$  первообразная для функции

$$f(x) = 4x - x^2$$

$$F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \quad ; \quad S_{OCД} = 2 \cdot 3^2 - \frac{8}{3} = 9$$

$$S_{\phi} = 15 - 9 = 6.$$