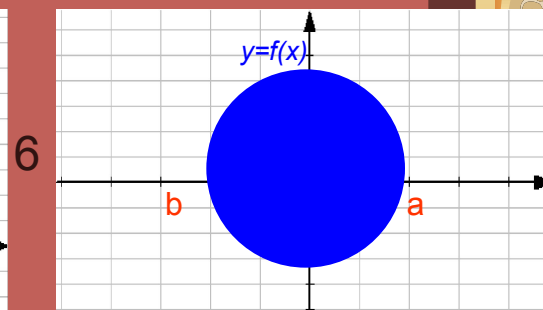
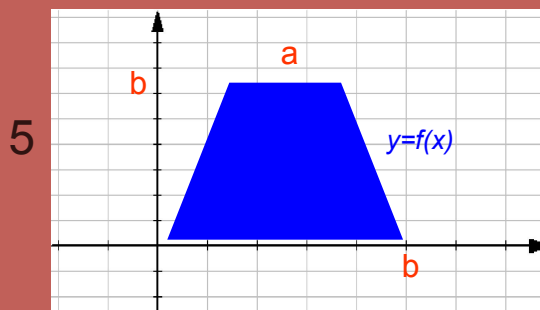
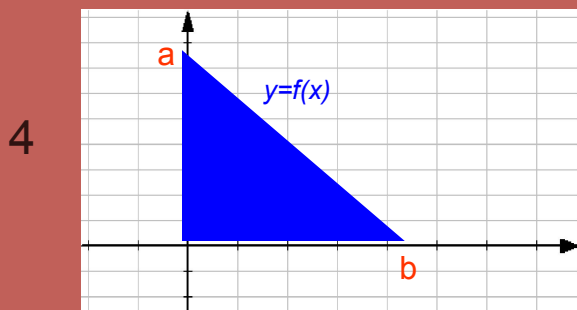
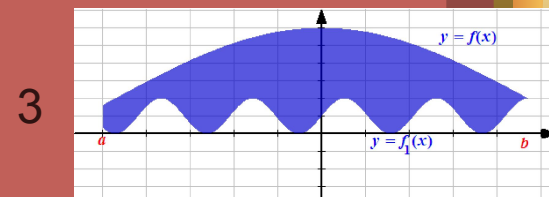
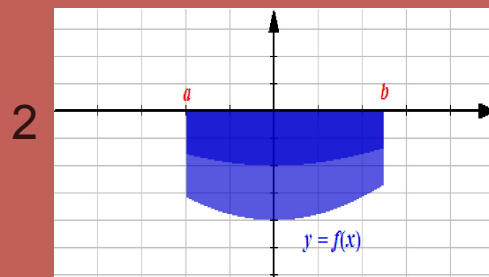
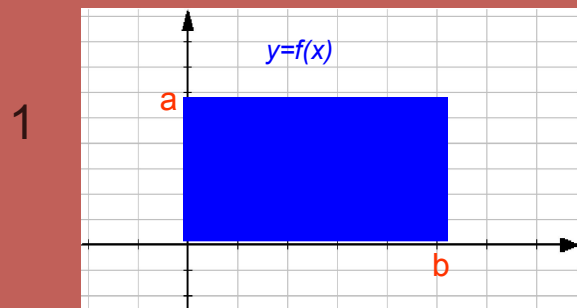


Вычисление площадей  
плоских фигур более  
сложного вида с помощью  
определенного интеграла

11 класс



# Задание 1. Поставьте в соответствие фигуру и формулу нахождения ее площади.



a)  $S = \int_a^b f(x) dx$

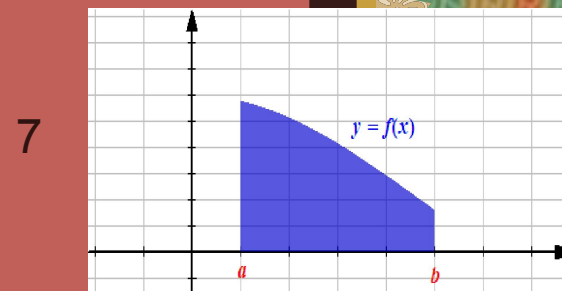
c)  $S = \pi a^2$

e)  $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

b)  $S = \frac{a+b}{2} b$

d)  $S = ab$

f)  $S = \frac{1}{2} ab$

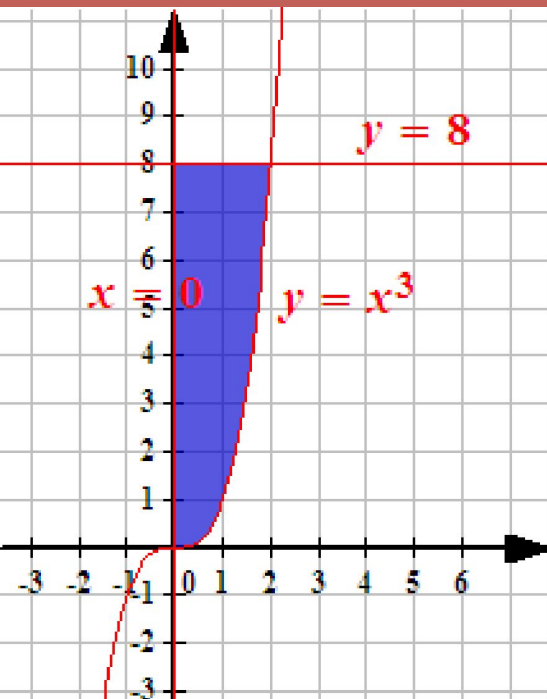


# Правильные ответы к заданию 1.

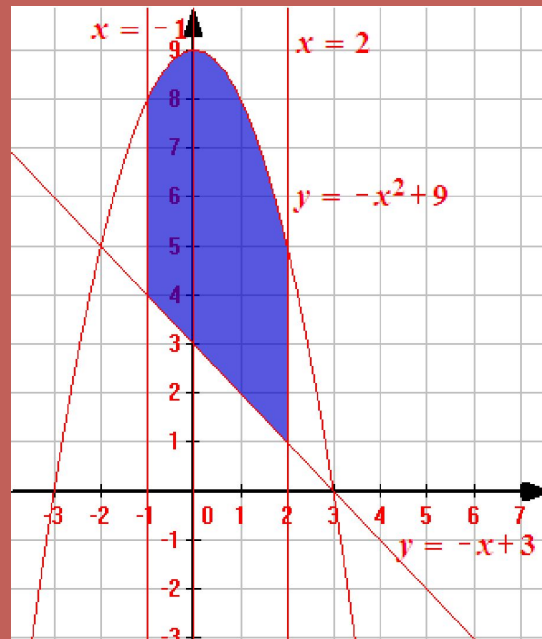
- 1-d
- 2-e
- 3-нет формулы
- 4-f
- 5-b
- 6-c
- 7-a



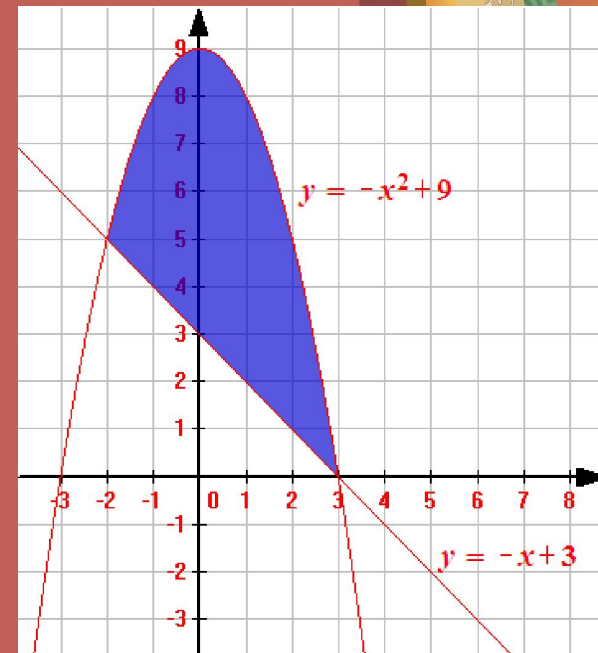
Задание 2. По известным формулам попробуйте вычислить площади фигур, закрасенных синим цветом.



1



2



3

### Задание 3. Что общего в нахождении площадей фигур задания 2?

*Правильный ответ*

Площадь  $S$  фигуры, ограниченной прямыми  $x=a$ ,  $x=b$  и графиками функций  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ , непрерывных на отрезке  $[a;b]$  и таких, что для всех  $x$  из отрезка  $[a;b]$  выполняется неравенство  $g(x)\leq f(x)$ , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



## Задание 4. Алгоритм нахождения площади плоских фигур более сложного вида с помощью определенного интеграла

- Графически построить фигуру, ограниченную заданными функциями
- Определить прямые  $x=a$  и  $x=b$ , которые ограничивают данную фигуру (если не заданы, то найти абсциссы точек пересечения графиков функций)
- Определить график какой функции на отрезке  $[a;b]$  выше – это и будет функция  $y=f(x)$ , а другая  $y=g(x)$
- Применить формулу вычисления площади

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Пример. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой  $y=x-2$  и параболой  $y=x^2-4x+2$ .

**Графически построить фигуру, ограниченную графиками заданными функциями**

Графиком функции  $y=x-2$  является прямая, поэтому достаточно найти две точки.

$$y(2)=2-2=0 \quad (2;0)$$

$$y(6)=6-2=4 \quad (6;4)$$

Графиком функции  $y=x^2-4x+2$  является парабола, ветви которой направлены вверх.

Вершина параболы:  $y'=0$ ,

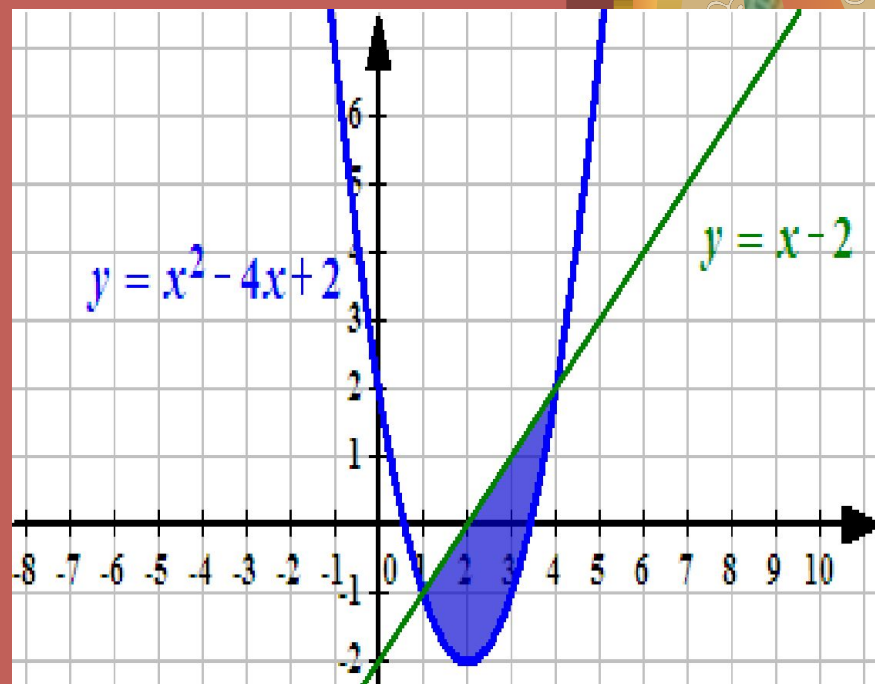
$$(x^2-4x+2)'=2x-4, \quad 2x-4=0, \quad x=2$$

$$y(2)=2^2-4 \cdot 2+2=-2 \quad (2;-2)$$

Ось симметрии  $x=2$

$$y(3)=3^2-4 \cdot 3+2=-1 \quad (3;-1), (1;-1)$$

$$y(4)=4^2-4 \cdot 4+2=2 \quad (4;2), (0;2)$$



Пример. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой  $y=x-2$  и параболой  $y=x^2-4x+2$ .

**Определить прямые  $x=a$  и  $x=b$**

$$x^2 - 4x + 2 = x - 2$$

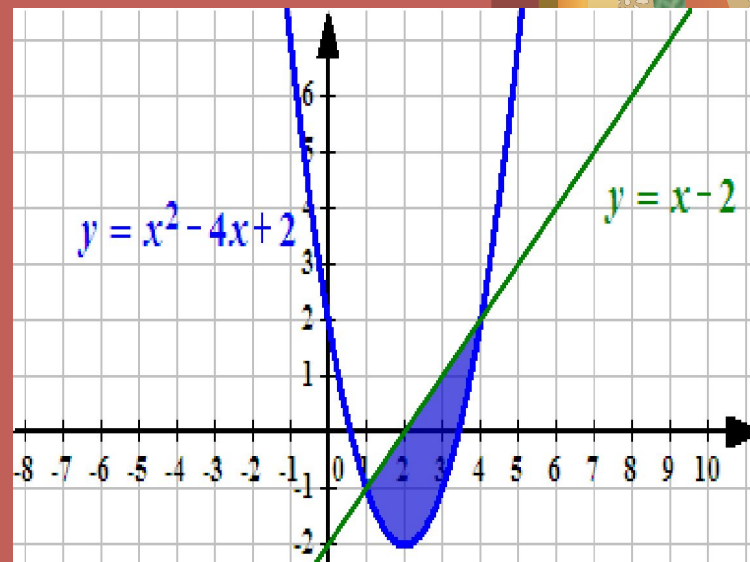
$$x^2 - 4x + 2 - x + 2 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 4$$

**Определить график какой функции на отрезке  $[a;b]$  выше – это и будет функция  $y=f(x)$ , а другая  $y=g(x)$**

График функции  $y=x-2$  на отрезке  $[1;4]$  располагается выше графика функции  $y=x^2-4x+2$





Пример. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой  $y=x-2$  и параболой  $y=x^2-4x+2$ .

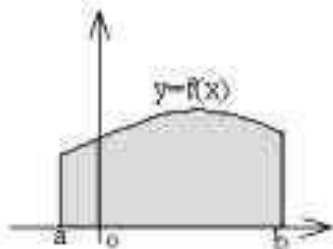
Применить формулу вычисления площади

$$S = \int_1^4 ((\tilde{\sigma} - 2) - (x^2 - 4\tilde{\sigma} + 2)) dx = \int_1^4 (-\tilde{\sigma}^2 + 5\tilde{\sigma} - 4) dx = \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right) \Big|_1^4 =$$
$$= \left( -\frac{4^3}{3} + \frac{5 \cdot 4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right) - \left( -\frac{1^3}{3} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} - 4 \cdot 1 \right) = 4,5$$

# Итог урока

- Как найти площади изображенных фигур?

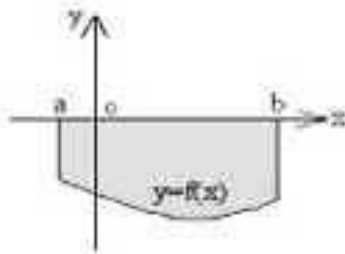
Ответ:



1) Если  $y=f(x)$  – непрерывная  $f(x) \geq 0$  на  $[a;b]$ , то

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Ответ:

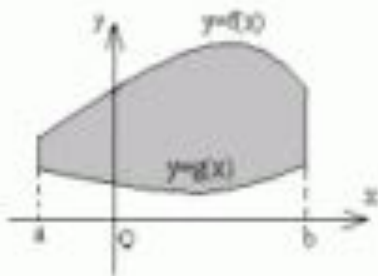


2) Если  $y=f(x)$  – непрерывная  $f(x) \leq 0$  на  $[a;b]$ , то

$$S = - \int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

# Итог урока

- Как найти площади изображенных фигур?

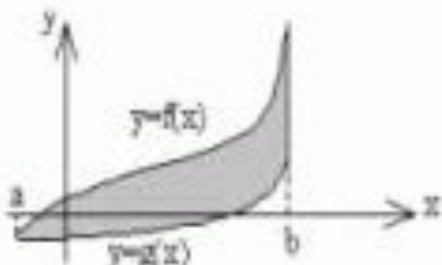


Ответ:

- 3) Если  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  – непрерывные на  $[a,b]$ ,  $f(x) \geq g(x)$  на  $[a,b]$ , то

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Ответ:

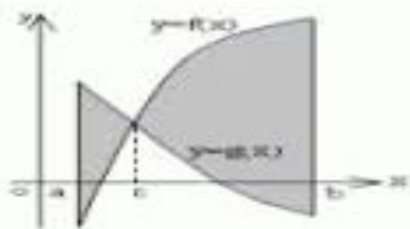


- 4) Если  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  – непрерывные на  $[a,b]$ ,  $f(x) \geq g(x)$  на  $[a,b]$ , то

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

# Итог урока

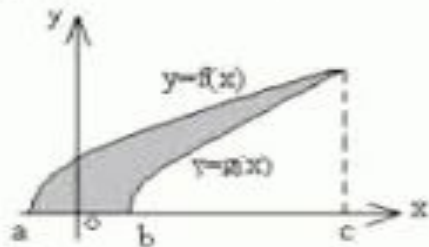
- Как найти площади изображенных фигур?



Ответ:

5) Если  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  – непрерывные на  $[a,b]$ ,  $f(x) \geq g(x)$  на  $[c;b]$ , где  $c \in [a;b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$  на  $[a;c]$ , то

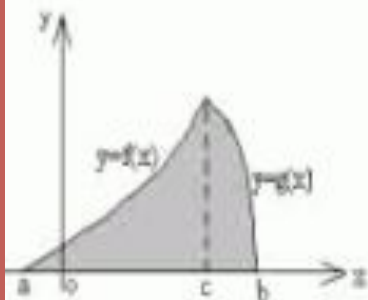
$$S = \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx$$



Ответ:

6) Если  $y=f(x)$  – непрерывная на  $[a;c]$ ,  $y=g(x)$  – непрерывная на  $[b;c]$ ,  $f(x) \geq g(x)$  на  $[a;c]$ , где  $c \in [a;b]$ , то

$$S = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c g(x) dx$$



Ответ:

7) Если  $y=f(x)$  – непрерывная на  $[a;c]$ ,  $y=g(x)$  – непрерывная на  $[c;b]$ , где  $c \in [a;b]$ , то

$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$