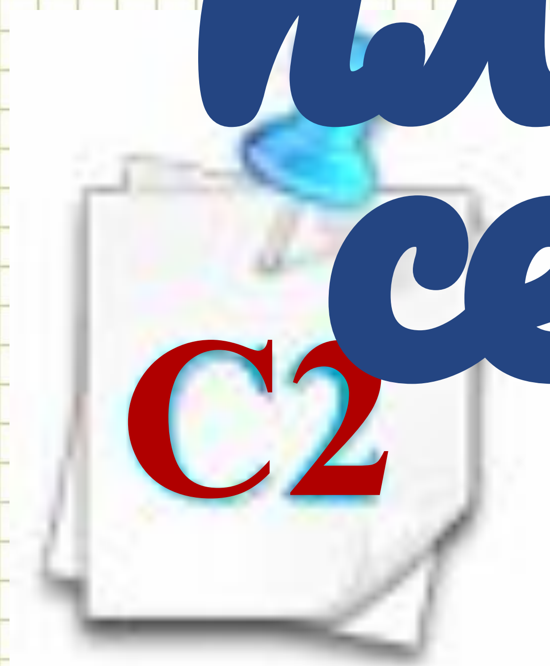
Нахожде площади сечения

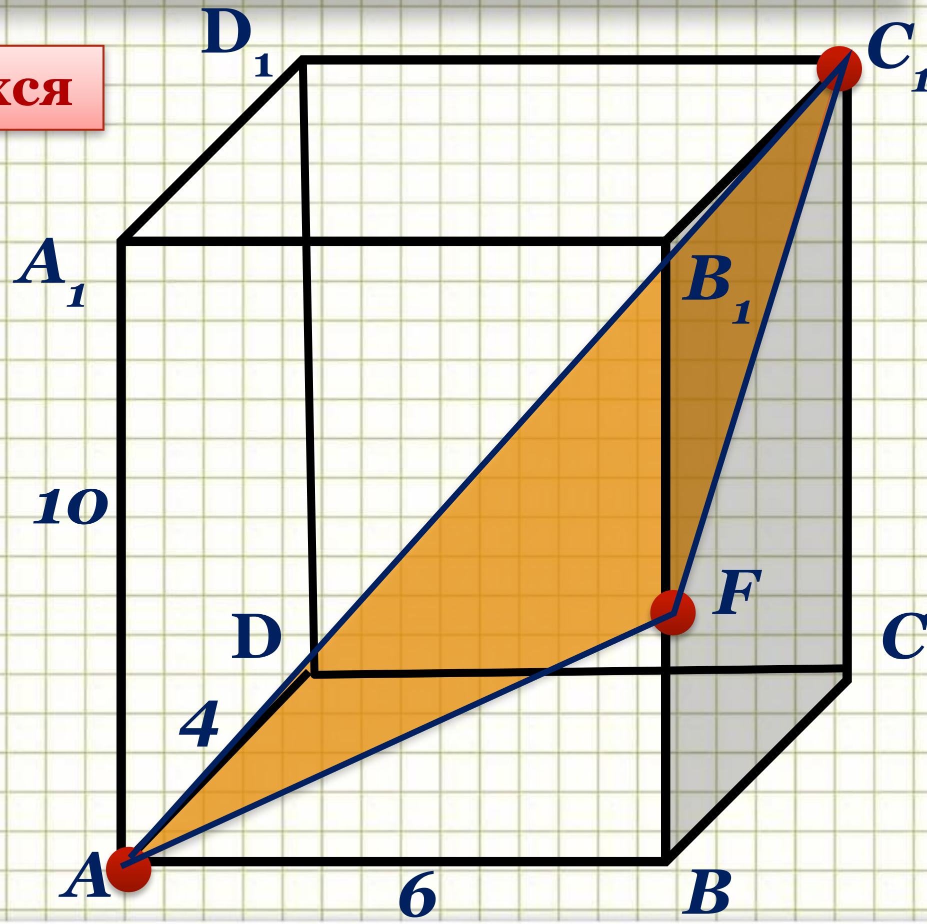


Учитель математики МБОУ
СОШ № 25 г. Крымска Е.В. Малая

Задача №1:

В прямоугольном параллелепипеде $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ известны ребра АВ = 6, АД = 4 $АА_1$ = 10. Точка F принадлежит ребру $ВВ_1$ и делит его в отношении 2 : 3, считая от (·) В. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки А, F и $С_1$.

Стандартная ошибка учащихся

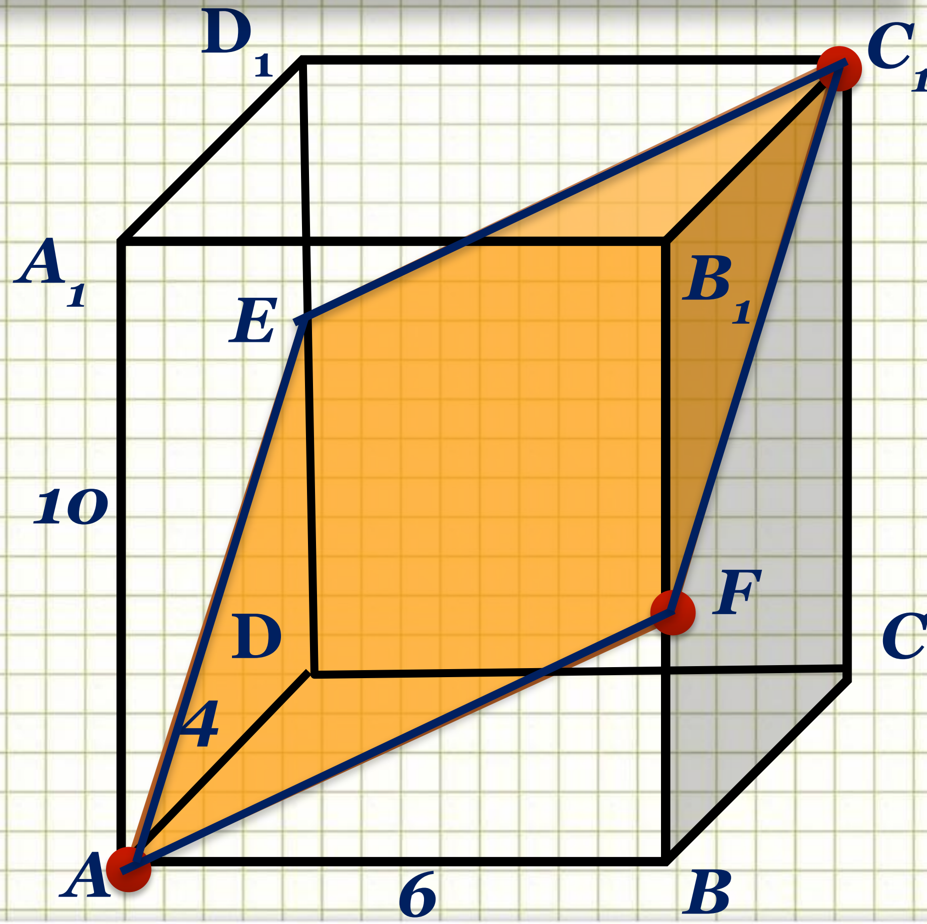


Задача №1:

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра AB = 6, AД = 4 AA_1 = 10. Точка F принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении 2 : 3, считая от (·) B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, F и C_1.

Отрезок C1E || AF,
AE || FC1

Искомое сечение AFC1E - параллелограмм



Из ΔABF:

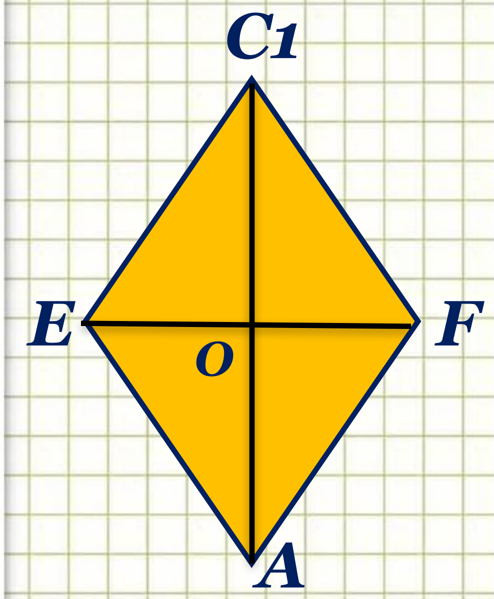
$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = 2\sqrt{13}$$

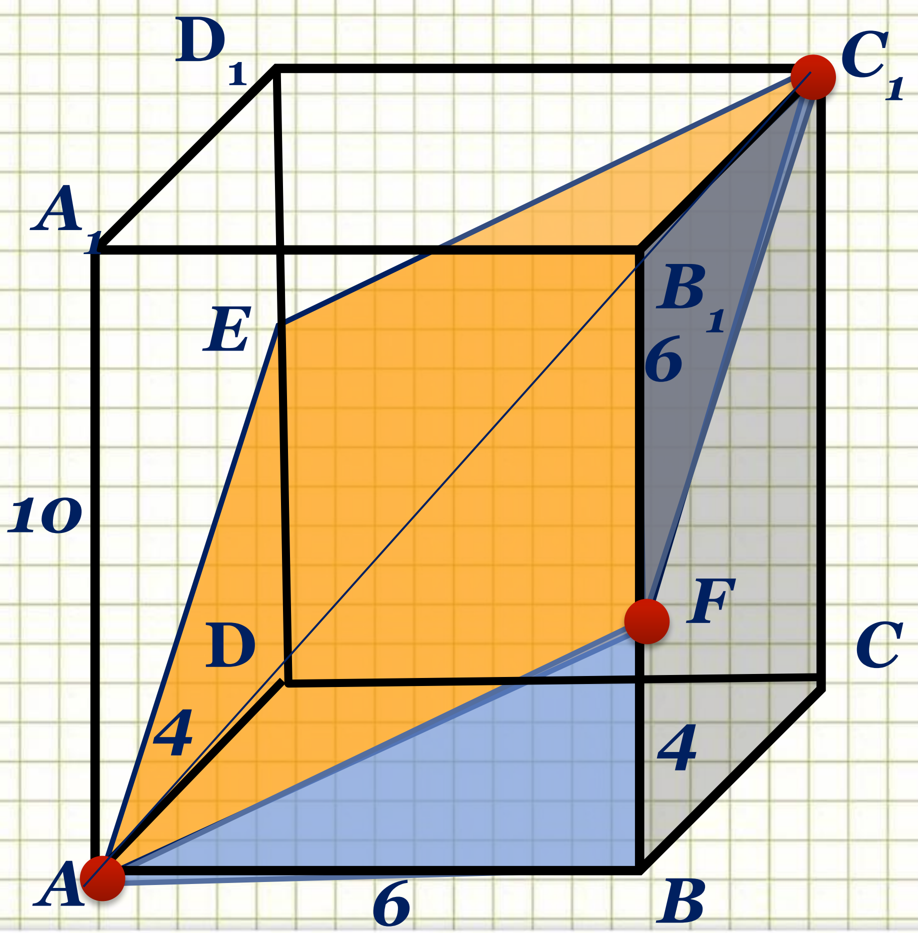
Из ΔC₁B₁F:

$$C_1F = \sqrt{C_1B_1^{\ 2} + B_1F^2} = 2\sqrt{13}$$

Значит, сечение AFC1E – ромб с диагональю

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^{\ 2}} = 2\sqrt{38}$$





$$EF = \sqrt{AF^2 - \frac{AC_1^{\ 2}}{4}} = 2\sqrt{14}$$

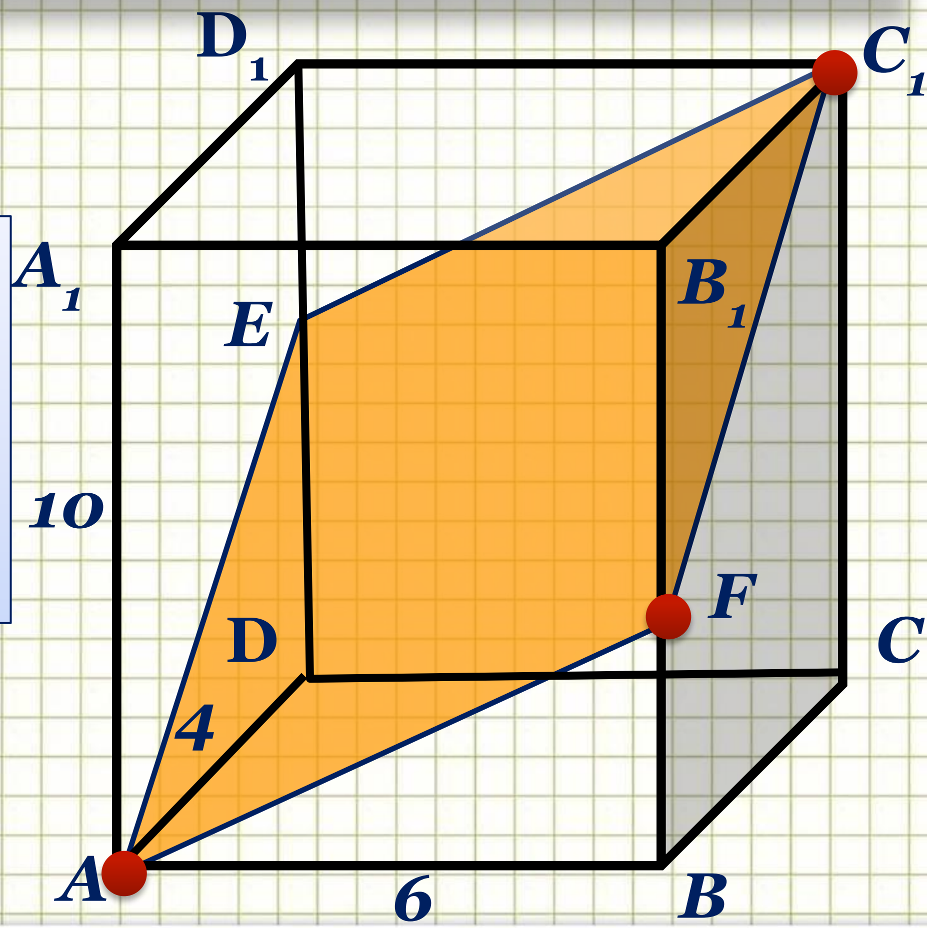
$$S = \frac{1}{2} AC_1 \cdot EF = 4\sqrt{133}$$

Задача №1:

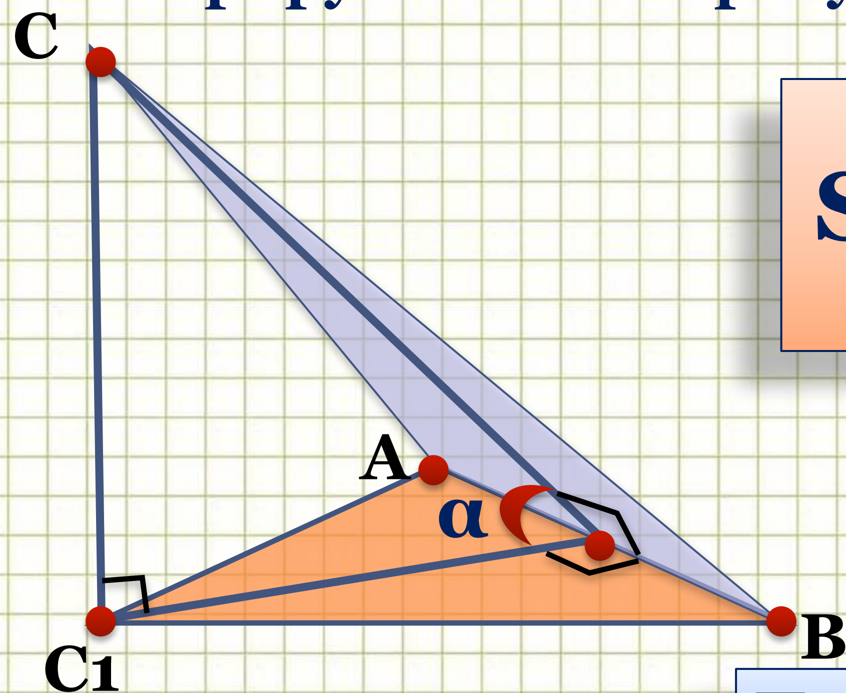
В прямоугольном параллелепипеде $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ известны ребра $АВ = 6$, $АД = 4$ $АА_1 = 10$. Точка F принадлежит ребру $ВВ_1$ и делит его в отношении 2 : 3, считая от (·) В. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки А, F и $С_1$.

2 способ

Площадь ортогональной проекции многоугольника равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла между плоскостями



Нахождение площади многоугольника через площадь его ортогональной проекции легко иллюстрируется таким рисунком:



$$S_{ABC} = \frac{S_{ABC_1}}{\cos\alpha}$$

План решения такой:

1) Строим сечение.

2) Находим его ортогональную проекцию на плоскость основания.

3) Находим площадь ортогональной проекции.

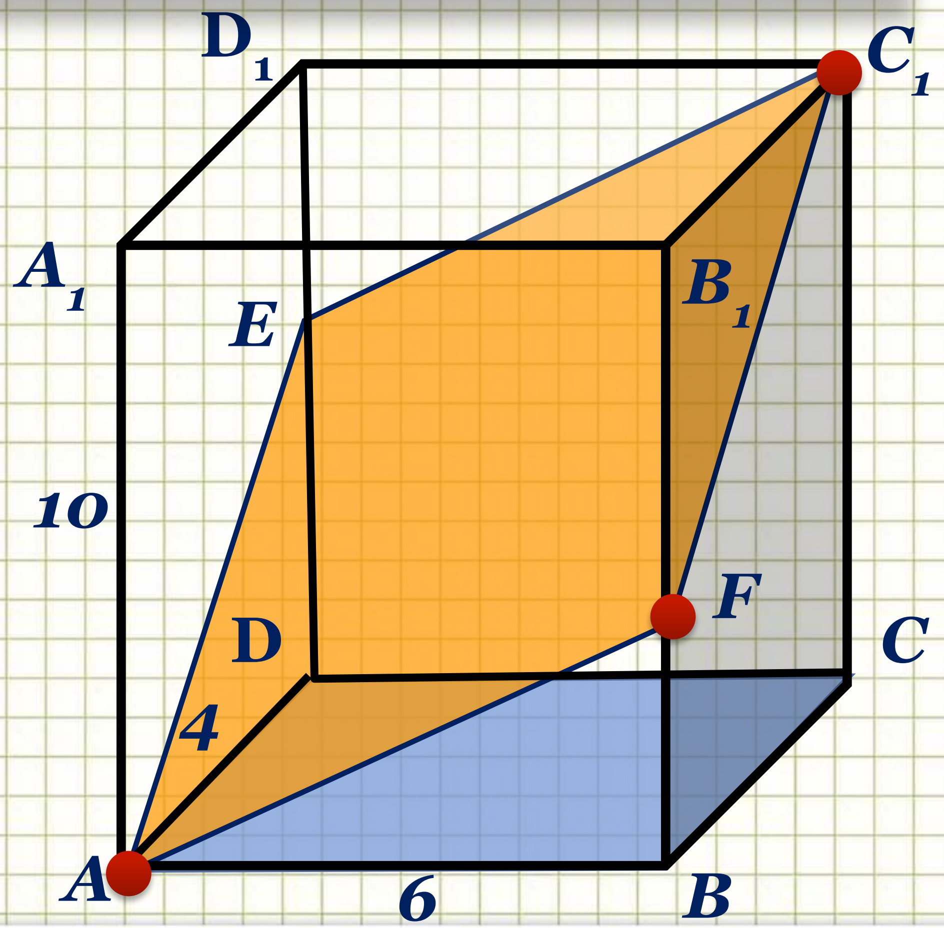
4) Находим площадь сечения.

Задача №1:

В прямоугольном параллелепипеде $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ известны ребра АВ = 6, АД = 4 $АА_1$ = 10. Точка F принадлежит ребру $ВВ_1$ и делит его в отношении 2 : 3, считая от (·) В. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки А, F и $С_1$.

$$S_{AFC1E}=\frac{S_{АВСД}}{\cos\alpha}$$

Угол α между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярным и к этим плоскостям



Угол α между плоскостями равен *углу между ненулевыми векторами*, *перпендикулярными к этим плоскостям, т.е. между векторами нормалей*

$$\text{Уравнение плоскости } AFC_1E: 4x + 9y - 6z = 0$$

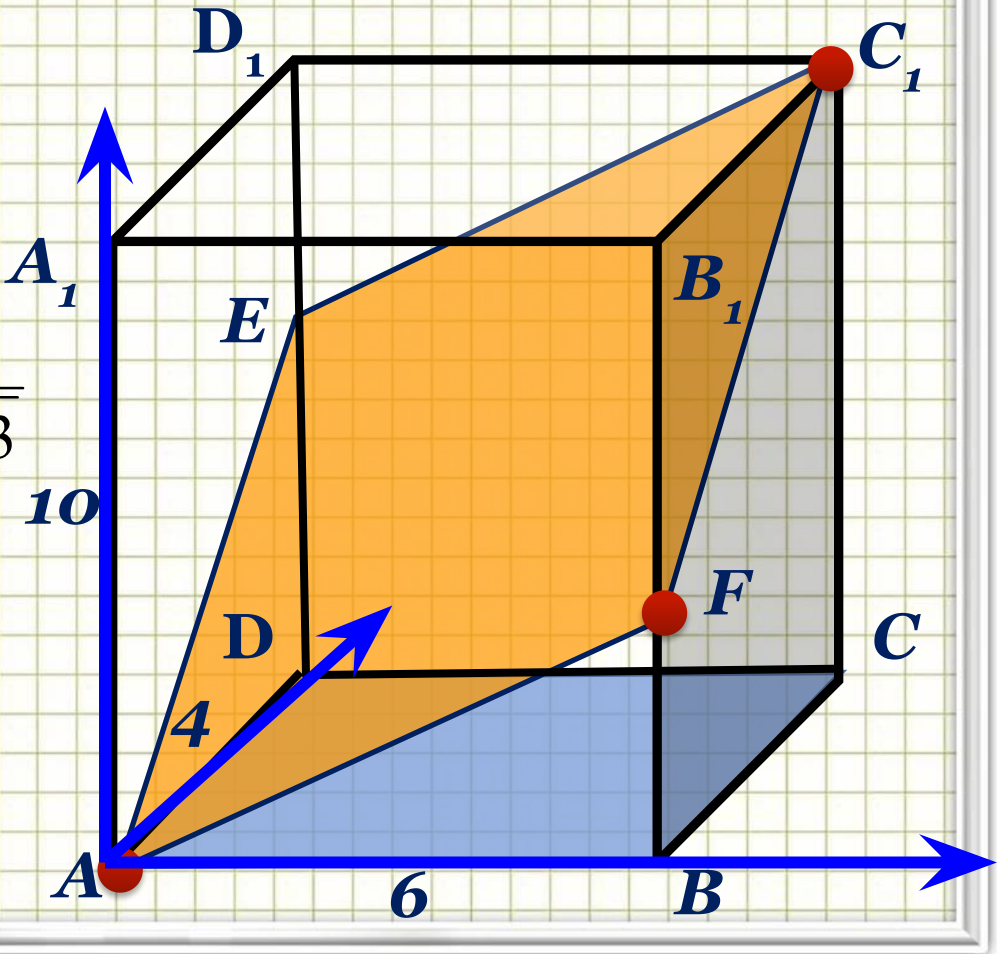
$$\text{вектор нормали } \vec{n}(4;9;-6) \quad |\vec{n}| = \sqrt{16+81+36} = \sqrt{133}$$

$$\text{вектор нормали } \overrightarrow{ДД_1}(0;0;10)$$

$$\text{к плоскости } АВСД \quad |\overrightarrow{ДД_1}| = 10$$

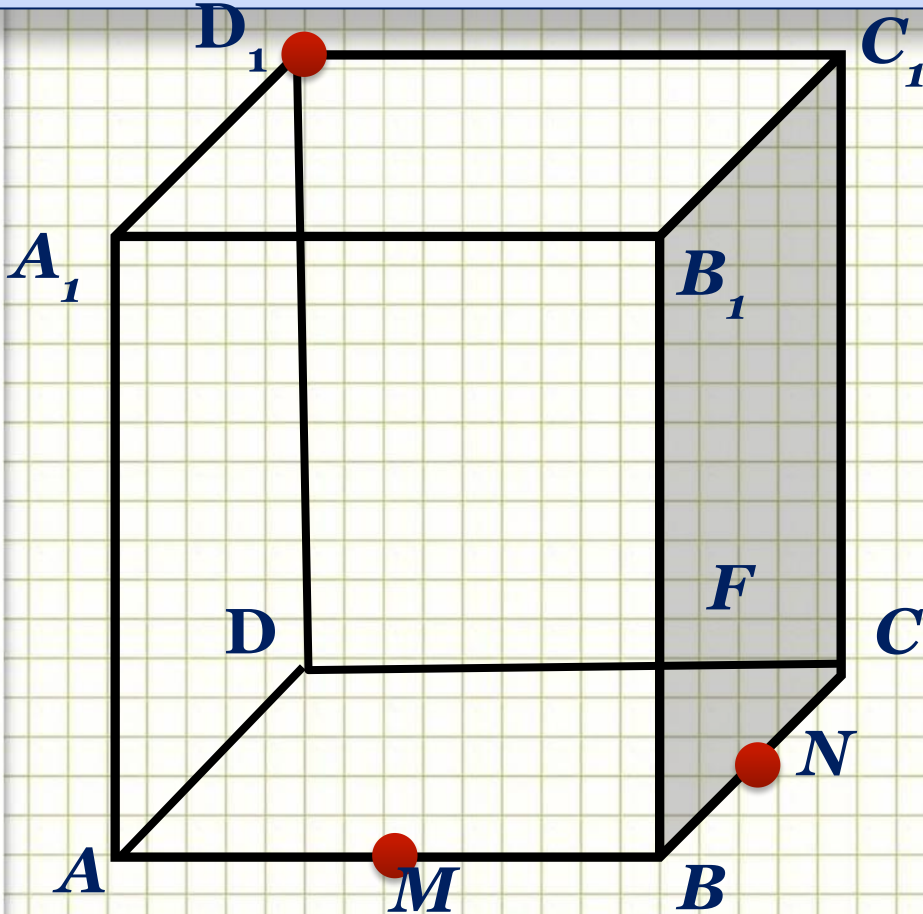
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{ДД_1}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{ДД_1}|} \qquad \cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{133}}$$

$$S_{AFC_1E} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\alpha} = 4\sqrt{133}$$



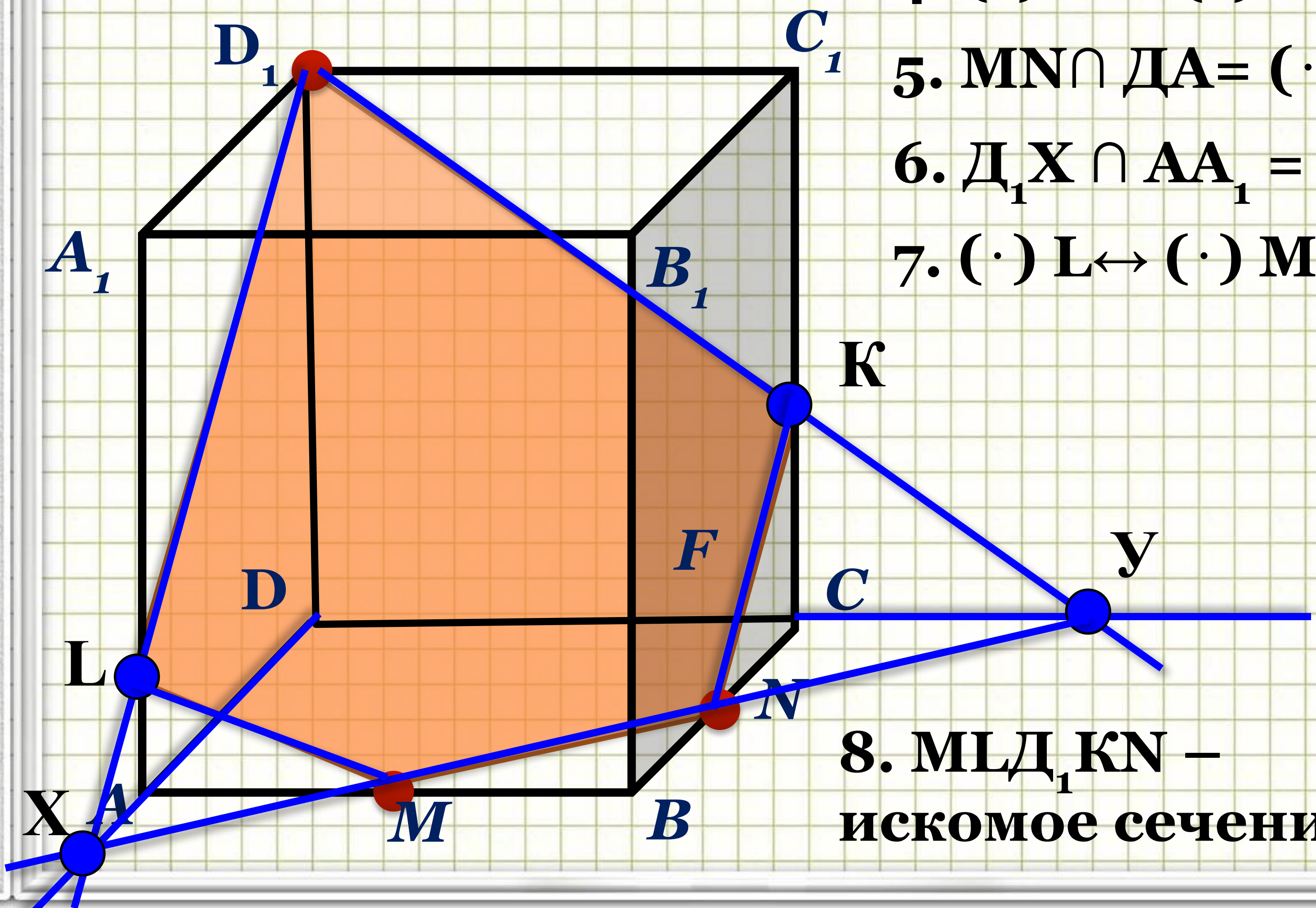
Задача №2:

В прямоугольном параллелепипеде АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ известны ребра АВ = 16, ВС = 12, АА$_1$ = 20. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершину Д$_1$ и середины ребер АВ и ВС. Найдите площадь полученного сечения.



Построение:

1. $(\cdot)$ M$\leftrightarrow$ $(\cdot)$ N.
2. MN$\cap$ ДС= $(\cdot)$У
3. $Д_1У \cap CC_1 = (\cdot)К$
4. $(\cdot)$ N$\leftrightarrow$ $(\cdot)$ К,
5. MN$\cap$ ДА= $(\cdot)$X
6. $Д_1X \cap AA_1 = (\cdot)L$
7. $(\cdot)$ L$\leftrightarrow$ $(\cdot)$ M,



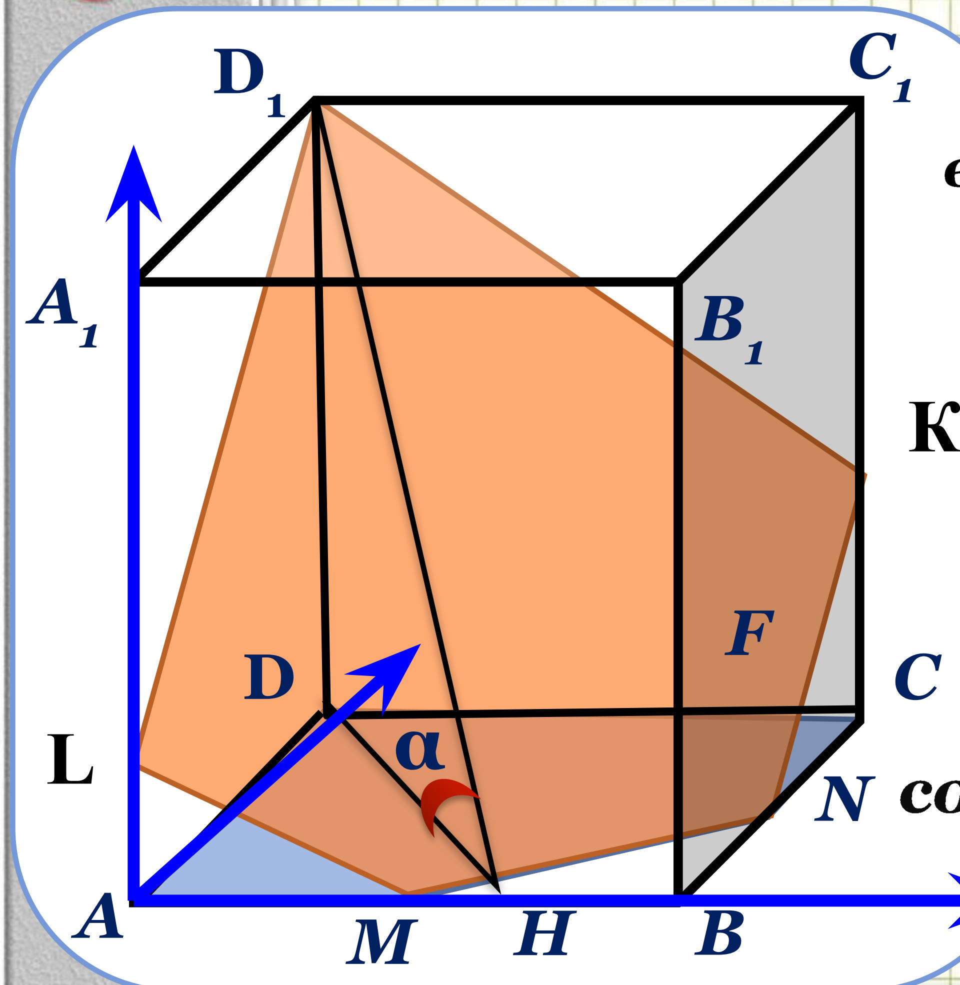
8. $MLД_1KN$ – искомое сечение

Вычисление угла:

Найдем косинус угла между плоскостями:

Составим уравнение плоскости сечения:

15x – 20y + 18z – 120=0



вектор нормали $\vec{n}(15;-20;18)$

$$|\vec{n}| = \sqrt{949}$$

вектор нормали $\vec{ДД_1}(0;0;20)$
к плоскости АВСД

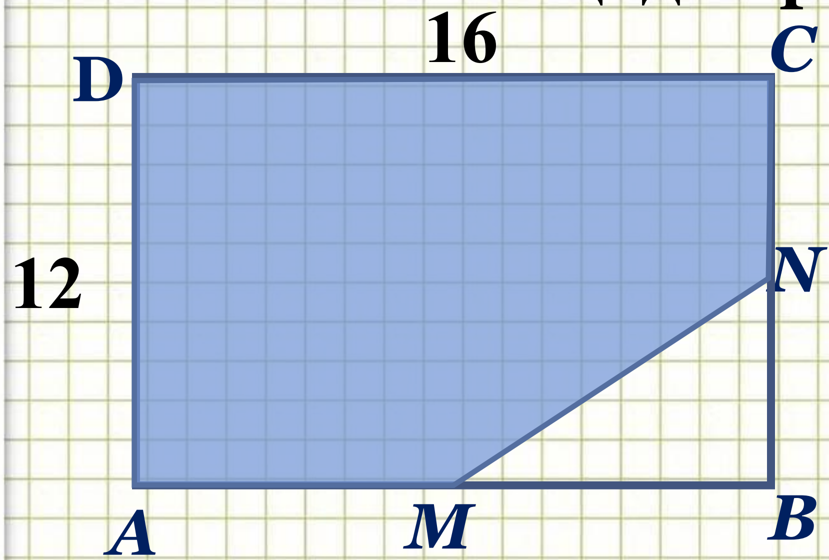
$$|\vec{ДД_1}| = 20$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{ДД_1}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{ДД_1}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{18}{\sqrt{949}}$$

Вычисление площади:

Вычислим площадь проекции:



$$S_{сеч} = S_{ABCД} - S_{\Delta MBN}$$

$$S_{сеч} = 168$$

$$\cos\alpha = \frac{18}{\sqrt{949}}$$

$$\mathbf{S_{сечения} = \frac{S_{проекции}}{\cos\alpha}}$$

$$\boxed{S_{сеч} = \frac{28\sqrt{949}}{3}}$$