

Плоскость и прямая в пространстве

Лекция 10

Определение. Уравнением поверхности в пространстве $Oxyz$ называется такое уравнение между переменными x, y, z , которому удовлетворяют координаты всех точек данной поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности.

Назовем нормалью к плоскости вектор, перпендикулярный к этой плоскости. Обозначают нормаль

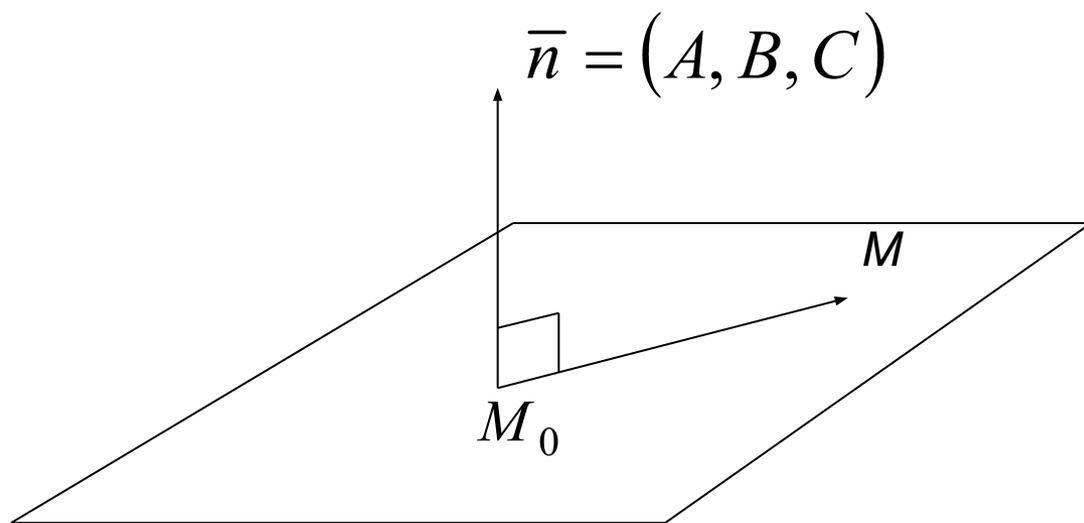
$$\vec{n} = (A, B, C)$$

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку

Пусть точки M_0 и M лежат на плоскости. Тогда $\vec{n} \perp \overline{M_0M}$ и, значит, их скалярное произведение равно нулю:

- это уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

M_0 M 

общее уравнение плоскости

Из предыдущего уравнения легко
получить общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Частные случаи общего уравнения

1. $Ax + By + Cz = 0$

плоскость проходит через начало координат.

2. $By + Cz + D = 0$

плоскость параллельна оси Ox .

3. $Cz + D = 0$

плоскость параллельна плоскости HOy .

4. $By + Cz = 0$

Плоскость проходит через ось Ox .

5. $z = 0$

плоскость является плоскостью HOy .

Остальные случаи рассмотреть самостоятельно.

Уравнение в отрезках

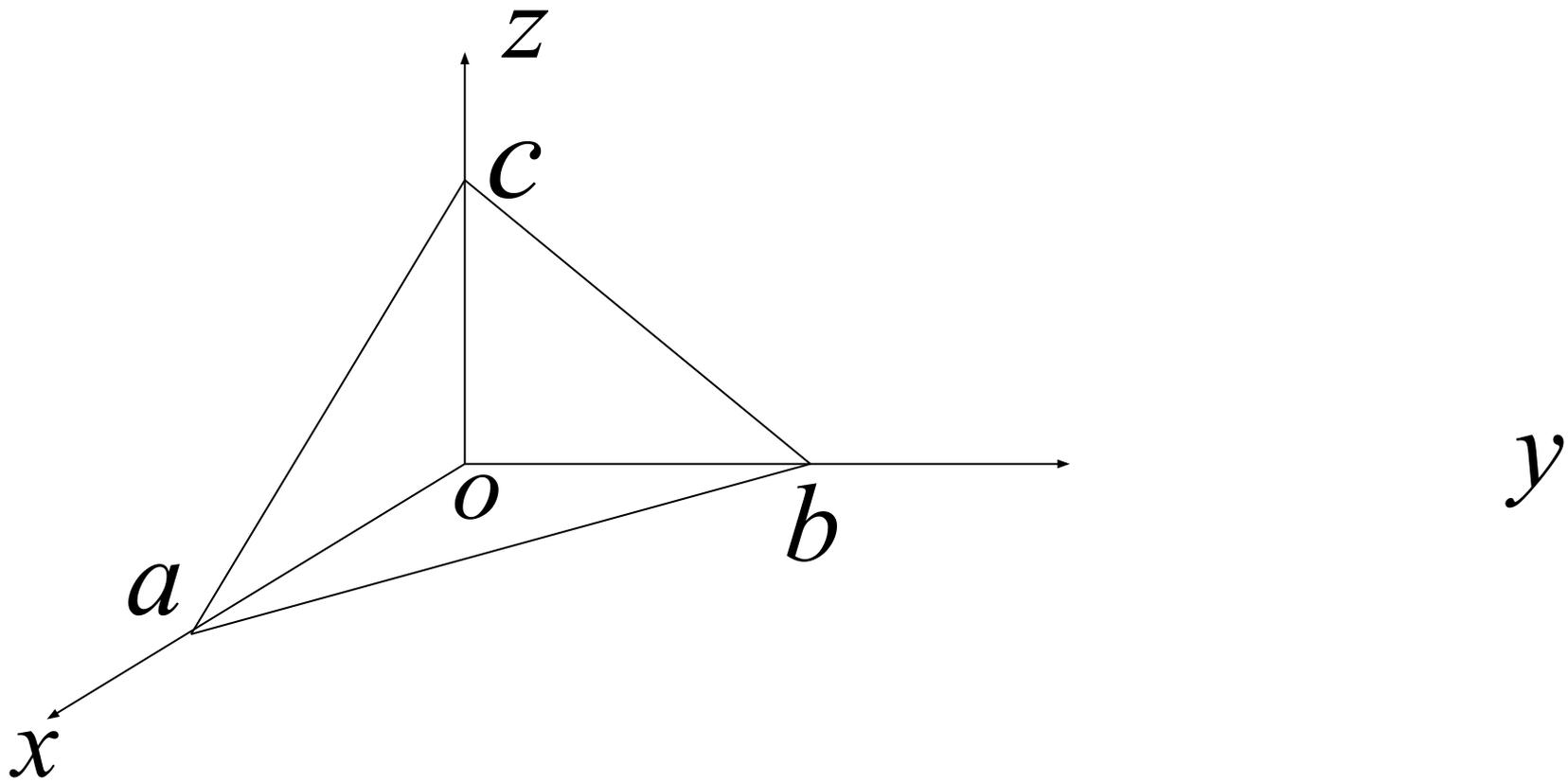
Перенесем свободный член в правую часть уравнения и разделим на него все слагаемые

$$Ax + By + Cz = -D$$

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1$$

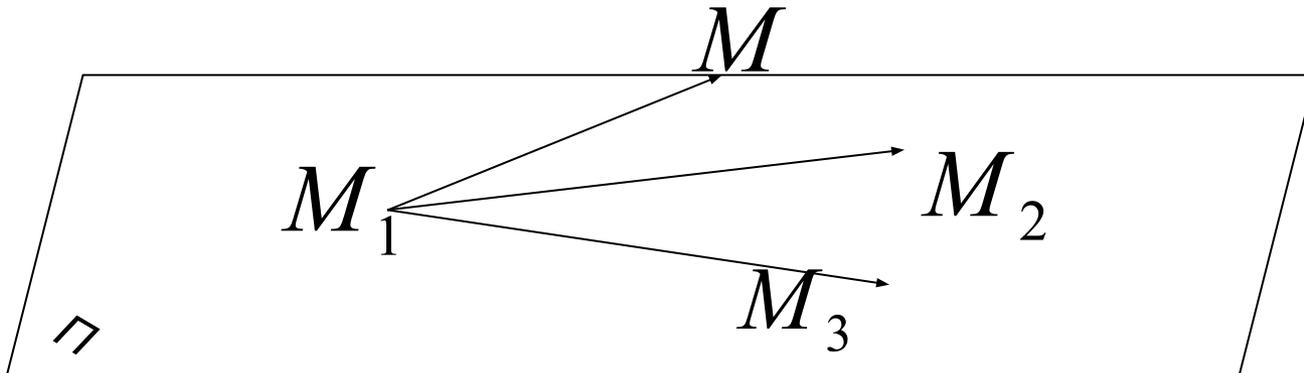
Введя соответствующие обозначения, имеем

$$\frac{\tilde{a}}{a} + \frac{\tilde{b}}{b} + \frac{z}{\tilde{h}} = 1.$$



Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$,
 $M_3(x_3, y_3, z_3)$. лежат на плоскости. Точка
 $M(x, y, z)$ - текущая точка плоскости.



Запишем координаты векторов:

$$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

Эти векторы компланарны, т.к. лежат в одной плоскости. Следовательно их смешанное произведение равно нулю.

Получаем уравнение:

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Взаимное расположение плоскостей

Угол между плоскостями

Даны две плоскости $\overset{\cdot\cdot}{I}_1$ и $\overset{\cdot\cdot}{I}_2$:

$$\overset{\cdot}{A}_1\overset{\cdot}{o} + \overset{\cdot}{A}_1\overset{\cdot}{o} + \overset{\cdot}{N}_1z + D_1 = 0, \quad n_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

$$\overset{\cdot}{A}_2\overset{\cdot}{o} + \overset{\cdot}{A}_2\overset{\cdot}{o} + \overset{\cdot}{N}_2z + D_2 = 0, \quad n_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

Тогда:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей

Если плоскости перпендикулярны друг к другу, то соответственно перпендикулярны их нормальные векторы

$$\ddot{I}_1 \perp \ddot{I}_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$$

$$\ddot{I}_1 \perp \ddot{I}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

Условие параллельности плоскостей

Если плоскости параллельны друг к другу, то соответственно параллельны их нормальные векторы:

$$\vec{I}_1 \parallel \vec{I}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до ПЛОСКОСТИ

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример

Найти уравнение плоскости,
проходящей через точки

$$M_1(1, 5, -7), M_2(-3, 6, 3), M_3(-2, 7, 3)$$

Решение

В уравнение плоскости, проходящей через три точки, подставим координаты данных точек:

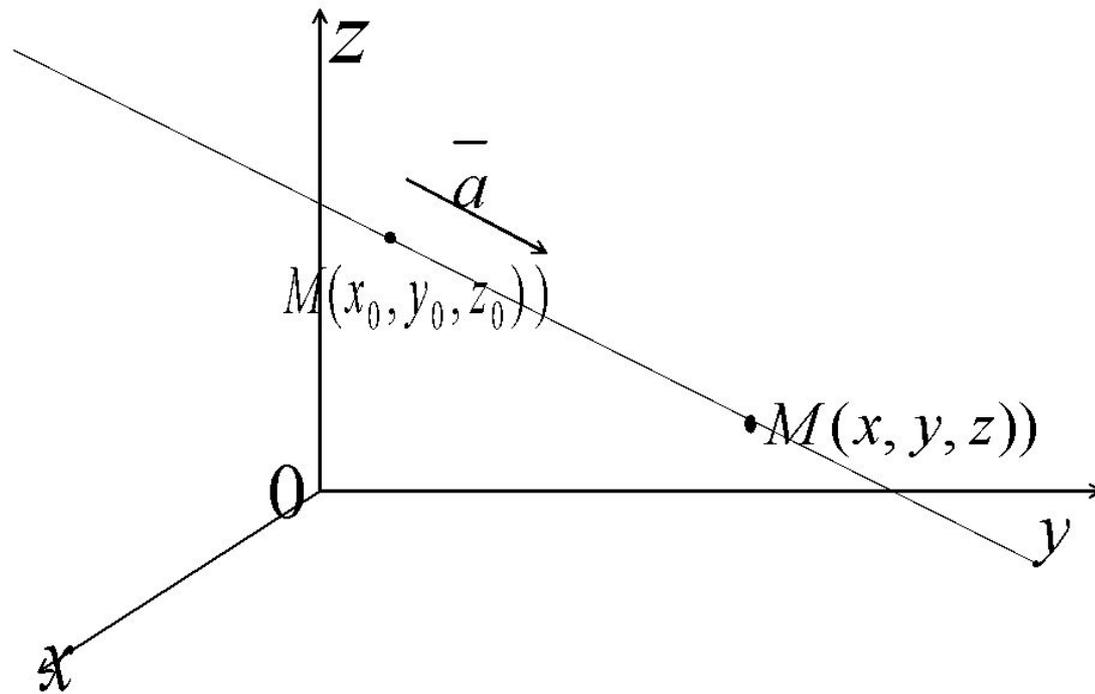
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -3-1 & 6-5 & 3+7 \\ -2-1 & 7-5 & 3+7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, имеем

$$2(x-1) - 2(y-5) + (z+7) = 0 \Rightarrow 2x - 2y + z + 15 = 0$$

Прямая в пространстве.

M



Канонические уравнения прямой.

$\vec{a} = (m, p, q)$ -направляющий вектор

прямой, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ -точка прямой. Тогда

$$\vec{a} \parallel \overline{M_0M}$$

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{q}$$

Параметрические уравнения (вывести самостоятельно)

t-переменный параметр.

$$x = mt + x_0, \quad y = pt + y_0, \quad z = qt + z_0$$

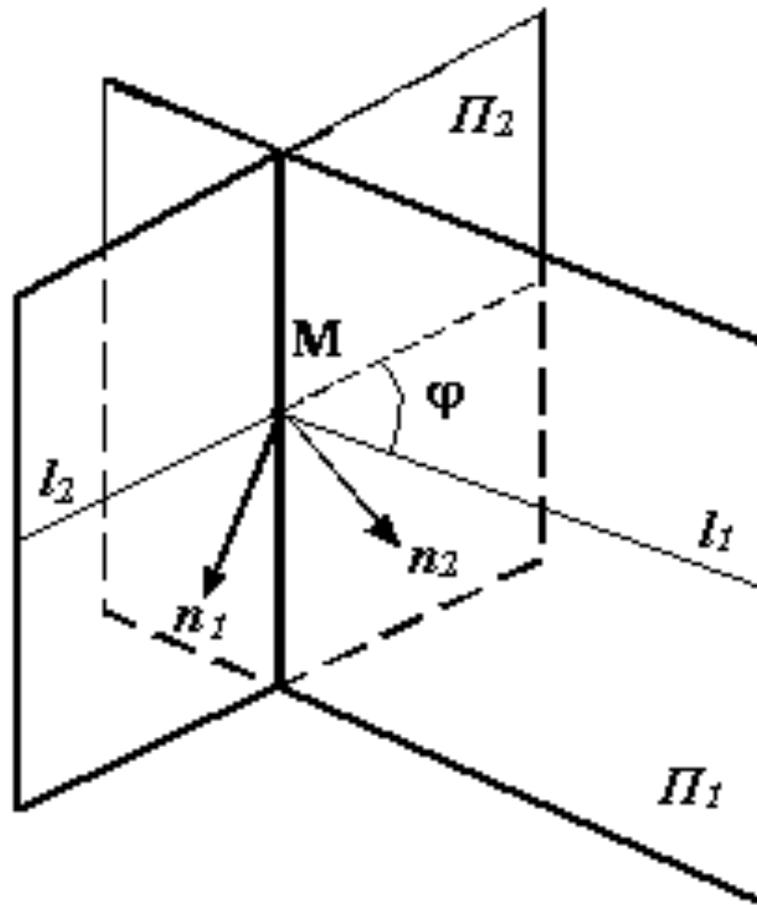
Уравнение прямой, проходящей через две точки

Точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежат на прямой. Вывод уравнения сделать самостоятельно.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Общее уравнение прямой

Прямая линия в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

$$\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

каждое уравнение отдельно- это уравнение плоскости, которые пересекаются по прямой.

Пример

Записать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0, \\ x + y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем точку на прямой. Пусть, например, $z = 0$. Система примет вид

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим $3x - 3 = 0$,
 $x = 1$.

Тогда из второго уравнения
 $y = -x - 1 = -2$.

Точка на прямой $A(1; -2; 0)$.

Найдем направляющий вектор этой прямой:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} + 11\vec{j} + 3\vec{k} = (1; 11; 3).$$

Получим канонические уравнения прямой

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{11} = \frac{z}{3}.$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Угол между прямыми

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{p_1} = \frac{z - z_1}{q_1}$$

$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{p_2} = \frac{z - z_2}{q_2}$$

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}.$$

Параллельность прямых

Если $\overline{a_1} \parallel \overline{a_2}$, то $\overline{a_1} \parallel \overline{a_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}$.

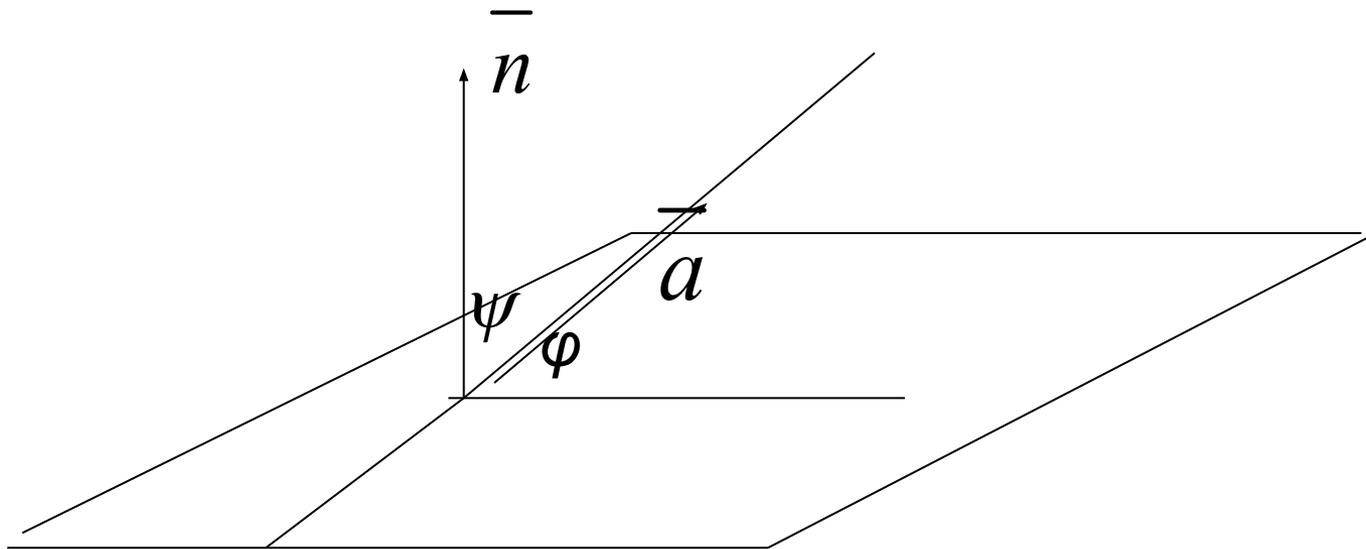
Перпендикулярность прямых

Если $l_1 \perp l_2$, то

$$\overline{a_1} \perp \overline{a_2} \Rightarrow \overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$$

Взаимное расположение прямой и плоскости

Угол между прямой и плоскостью



Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость

Угол между прямой и плоскостью

$\underline{\bar{n}} = (A, B, C)$ -нормаль плоскости Π ,

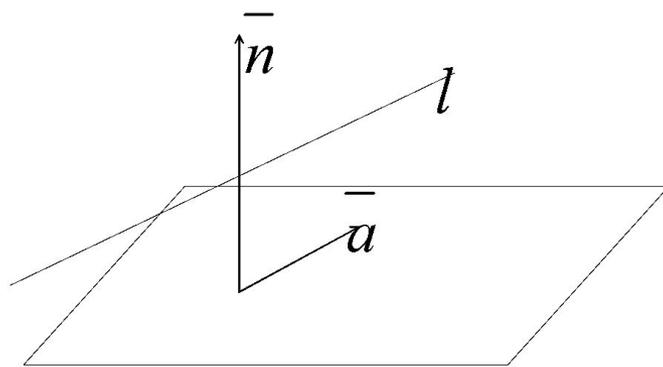
$a = (m, p, q)$ -направляющий
вектор прямой l .

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi, \sin \varphi = \cos \psi$$

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bp + Cq|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + q^2}} .$$

Условие параллельности прямой и плоскости

Если $\square \parallel \Pi$, то $Am + Bp + Cq = 0$



Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Если $\square \perp \Pi$, то $\frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}$

Точка пересечения прямой и плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой $\frac{\tilde{x} - \tilde{x}_i}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_i}{\delta}$

и плоскости $A\tilde{x} + \hat{A}y + \tilde{N}z + D = 0$.

Запишем параметрические уравнения прямой

$$\tilde{x} = mt + x_0, y = nt + y_0, z = pt + z_0.$$

и подставим выражения для x, y, z в уравнение плоскости.

Получим уравнение вида $Mt = N$ относительно параметра t . Выразив t из этого уравнения и подставив в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Замечание. Если уравнение относительно t примет вид $0t = 0$ (то есть $M = N = 0$), то любое действительное значение t будет его решением, значит, прямая и плоскость имеют множество общих точек, то есть прямая лежит в плоскости.

Пример

Найти точку пересечения прямой

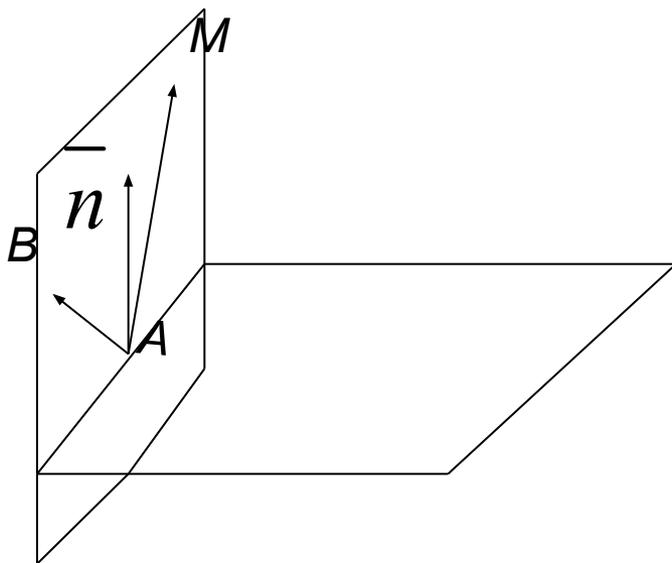
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+4}{3}$$

и плоскости

$$3x - y + 5z - 6 = 0.$$

Пример

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;2;0)$ и $B(2;1;1)$ перпендикулярно заданной плоскости $-x+y-1=0$.



Пример

Показать, что прямая $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$

лежит в плоскости $7x - 5y - 6z + 1 = 0$.

Решение. Используем
параметрические уравнения прямой

$$x = t + 1, \quad y = -t - 2, \quad z = 2t + 3.$$

Подставим в уравнение плоскости: -

$$7(t+1) - 5(-t-2) - 6(2t+3) + 1 = 0,$$

$$7t + 7 + 5t + 10 - 12t - 18 + 1 = 0, \quad 0 = 0$$

Получили равенство, верное при любых t .
Следовательно, прямая лежит в плоскости.

Пример

Найти уравнение перпендикуляра к плоскости

$$x + 3y - 4z - 13 = 0 ,$$

проходящего через точку $A(2;-1:3)$, и определить координаты основания этого перпендикуляра.