Плоскость и прямая в пространстве

Лекция 10

Определение. Уравнением поверхности в пространстве $Oxyz$ называется такое уравнение между переменными x, y, z, которому удовлетворяют координаты всех точек данной поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности.

Назовем нормалью к плоскости вектор, перпендикулярный к этой плоскости. Обозначают нормаль

$$\overline{n} = (A, B, C)$$

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку

Пусть точки M_0 и M лежат на плоскости . Тогда $\overline{n} \perp \overline{M_0 M}$ и, значит, их скалярное произведение равно нулю:

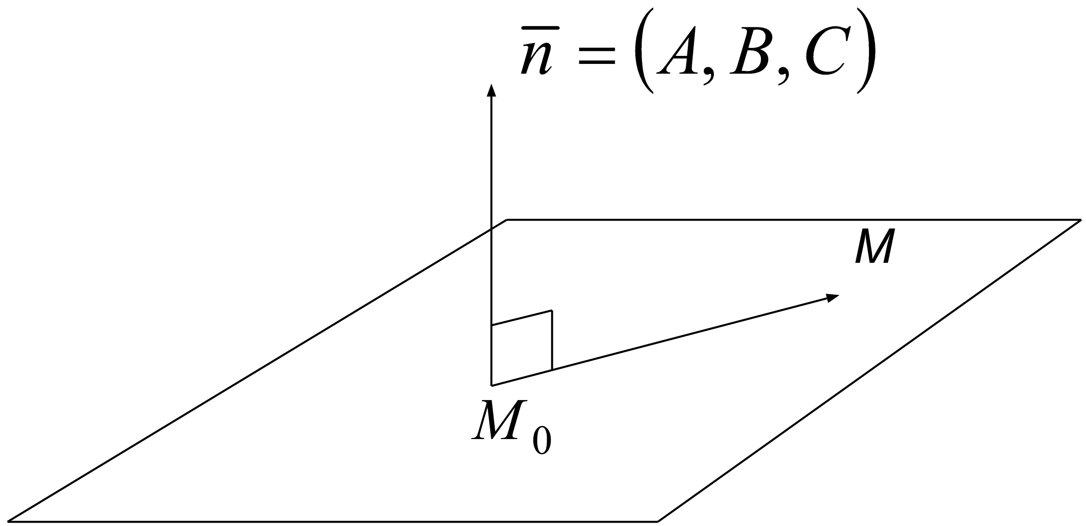
$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

- это уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору

- .

$$\overline{n} = (A, B, C)$$

M_0



общее уравнение плоскости

Из предыдущего уравнения легко получить общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Частные случаи общего уравнения

1. $$Ax + By + Cz = 0$$

плоскость проходит через начало координат.

2. $$By + Cz + D = 0$$

плоскость параллельна оси OX.

3. $$Cz + D = 0$$

плоскость параллельна плоскости XOY.

4. $$By + Cz = 0$$

Плоскость проходит через ось OX.

5. $$z = 0$$

плоскость является плоскостью XOY.

Остальные случаи рассмотреть самостоятельно.

Уравнение в отрезках

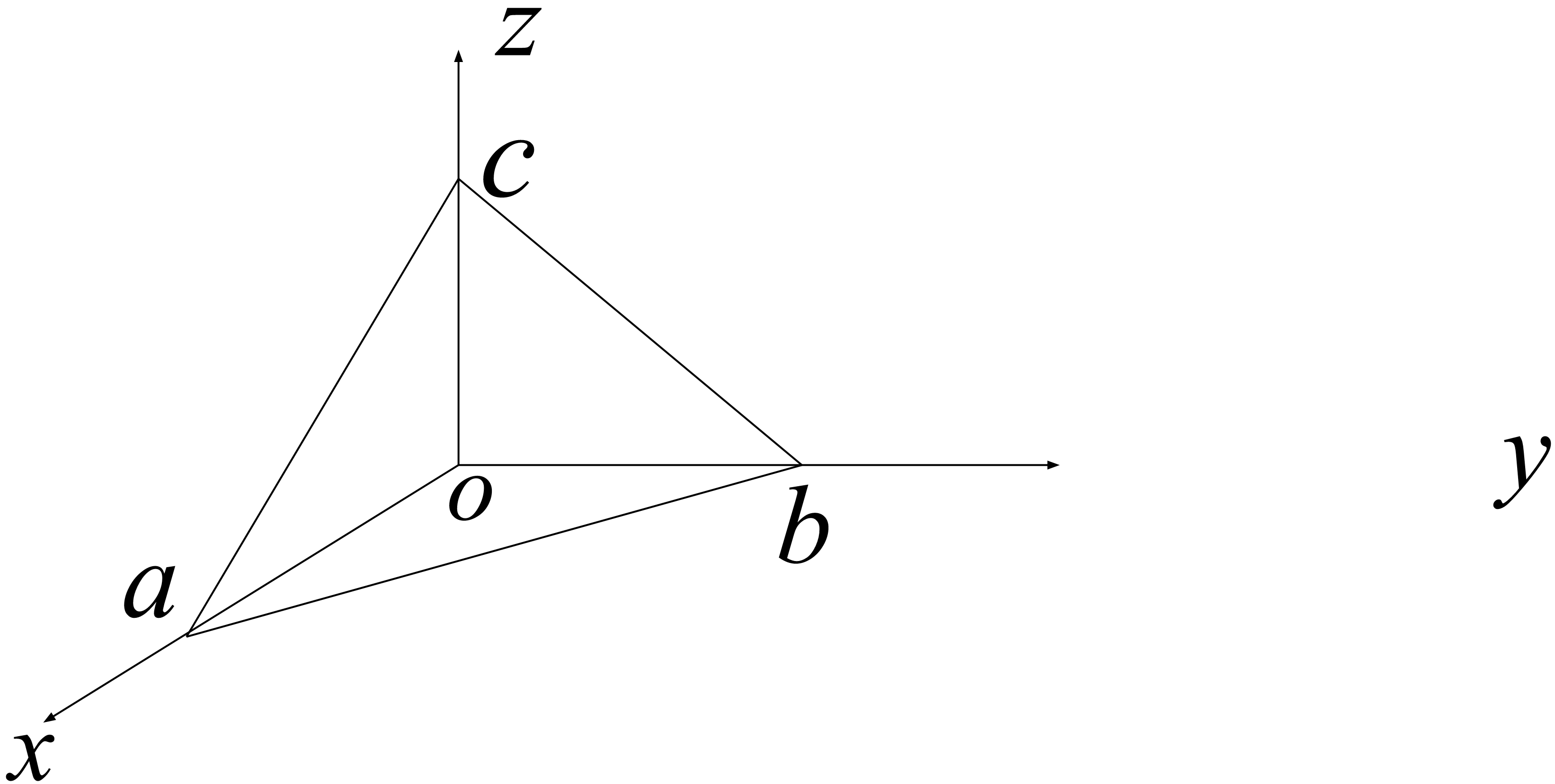
Перенесем свободный член в правую часть уравнения и разделим на него все слагаемые

$$Ax + By + Cz = -D$$

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1$$

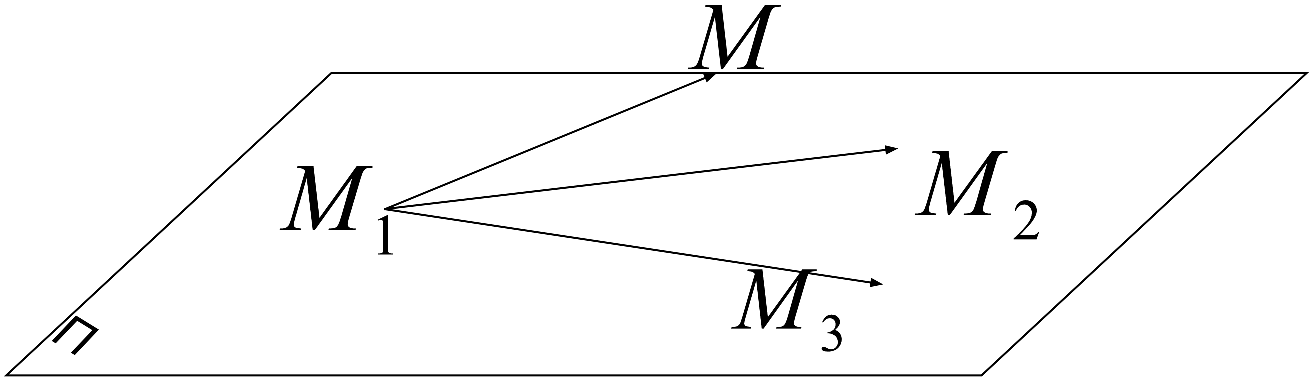
Введя соответствующие обозначения , имеем

$$\frac{\tilde{o}}{\grave{a}} + \frac{\acute{o}}{b} + \frac{z}{\tilde{n}} = 1 .$$


z
c
y
o
b
a
x

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$,$M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. лежат на плоскости. Точка $M(x\ , y\ , z\ )$ - текущая точка плоскости.



Запишем координаты векторов:

$$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

Эти векторы компланарны, т.к. лежат в одной плоскости. Следовательно их смешанное произведение равно нулю.

Получаем уравнение:

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Взаимное расположение плоскостей

Угол между плоскостями

Даны две плоскости $\ddot{I}_{1}$ и $\ddot{I}_{2}$:

$$\grave{A}_1\tilde{o}+\hat{A}_1\acute{o}+\tilde{N}_1 z+D_1=0,\quad n_1=(A_1,B_1,C_1)$$

$$\grave{A}_2\tilde{o}+\hat{A}_2\acute{o}+\tilde{N}_2 z+D_2=0,\quad n_2=(A_2,B_2,C_2)$$

Тогда:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей

Если плоскости перпендикулярны друг к другу, то соответственно перпендикулярны их нормальные векторы

$$\ddot{I}_1 \perp \ddot{I}_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$$

$$\ddot{I}_1 \perp \ddot{I}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

Условие параллельности плоскостей

Если плоскости параллельны друг к другу, то соответственно параллельны их нормальные векторы:

$$\ddot{I}_{1} \parallel \ddot{I}_{2} \quad \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$d = \frac{\left| Ax_o + By_o + Cz_o + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример

Найти уравнение плоскости, проходящей через точки

$$M_1(1,5,-7)\ ,\ M_2(-3,6,3),\ \ M_3(-2,7,3)$$

.

Решение

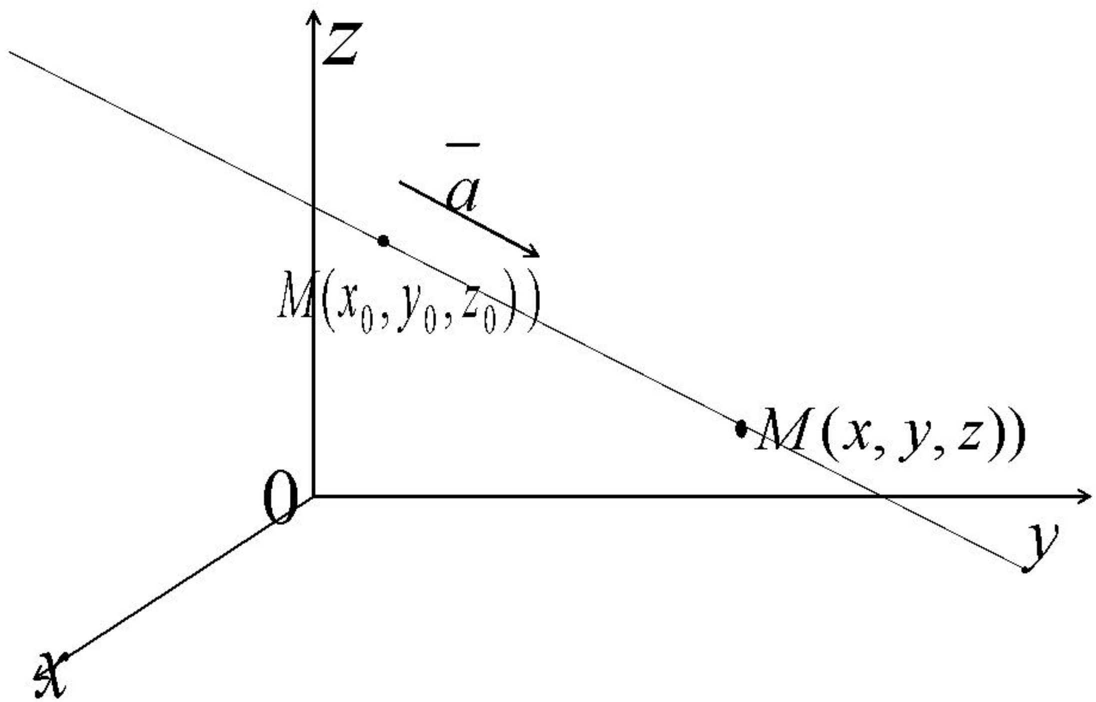
В уравнение плоскости, проходящей через три точки, подставим координаты данных точек:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -3-1 & 6-5 & 3+7 \\ -2-1 & 7-5 & 3+7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, имеем

$$2(x-1)-2(y-5)+(z+7)=0 \Rightarrow 2x-2y+z+15=0 \quad .$$

Прямая в пространстве.



z
$\bar{a}$
$M(x_0, y_0, z_0))$
$M(x, y, z))$
0
y
x

Канонические уравнения прямой.

$\overline{a} = (m, p, q)$ -направляющий вектор

прямой, $M_0(x_0, y_0, z_0)$-точка прямой. Тогда

$$\overline{a} \parallel \overline{M_0 M}$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}$$

Параметрические уравнения (вывести самостоятельно)

t-переменный параметр.

$$x = mt + x_o\,,\ \ y = pt + y_o\,,\ \ z = qt + z_o$$

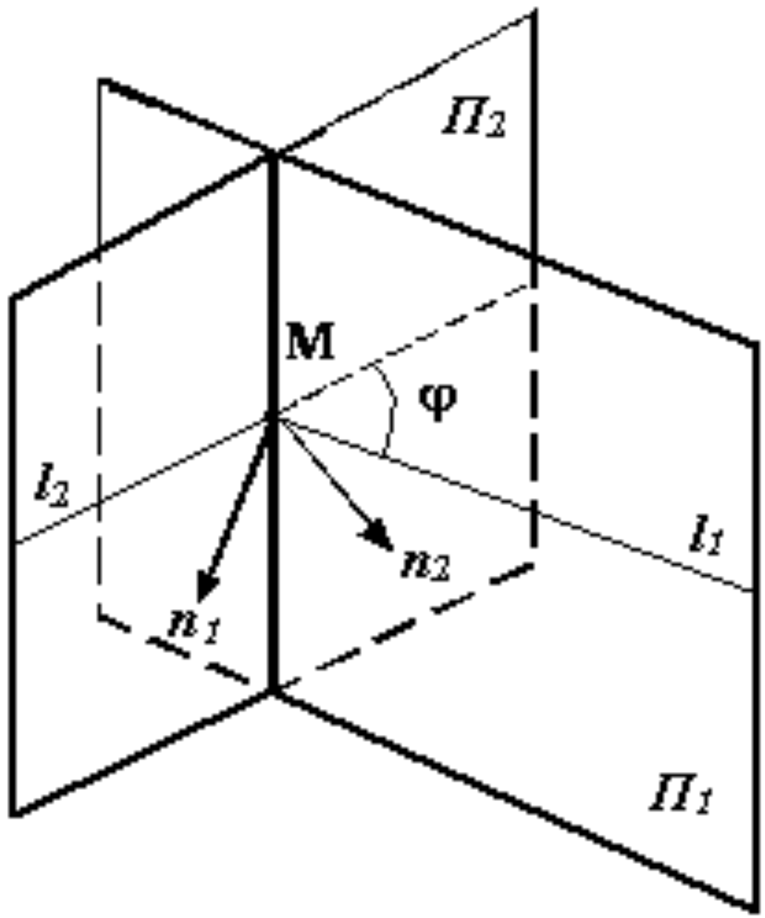
Уравнение прямой, проходящей через две точки

Точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежат на прямой. Вывод уравнения сделать самостоятельно.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Общее уравнение прямой

Прямая линия в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

$$\overline{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \overline{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

каждое уравнение отдельно- это уравнение плоскости, которые пересекаются по прямой.

Пример

Записать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0, \\ x + y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем точку на прямой. Пусть, например, z = 0. Система примет вид

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим $3x - 3 = 0$, $x = 1.$

Тогда из второго уравнения

$$y = -x - 1 = -2.$$

Точка на прямой A(1; -2; 0).

Найдем направляющий вектор этой прямой:

$$\overline{a} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \overline{i} + 11\overline{j} + 3\overline{k} = (1;11;3).$$

Получим канонические уравнения прямой

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{11} = \frac{z}{3}.$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Угол между прямыми

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами

$$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{p_1}=\frac{z-z_1}{q_1}$$

$$l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{p_2}=\frac{z-z_2}{q_2}$$

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+p_1p_2+q_1q_2}{\sqrt{m_1^2+p_1^2+q_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+p_2^2+q_2^2}}.$$

Параллельность прямых

Если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $\overline{a_1} \parallel \overline{a_2} \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{q_1}{q_2}$.

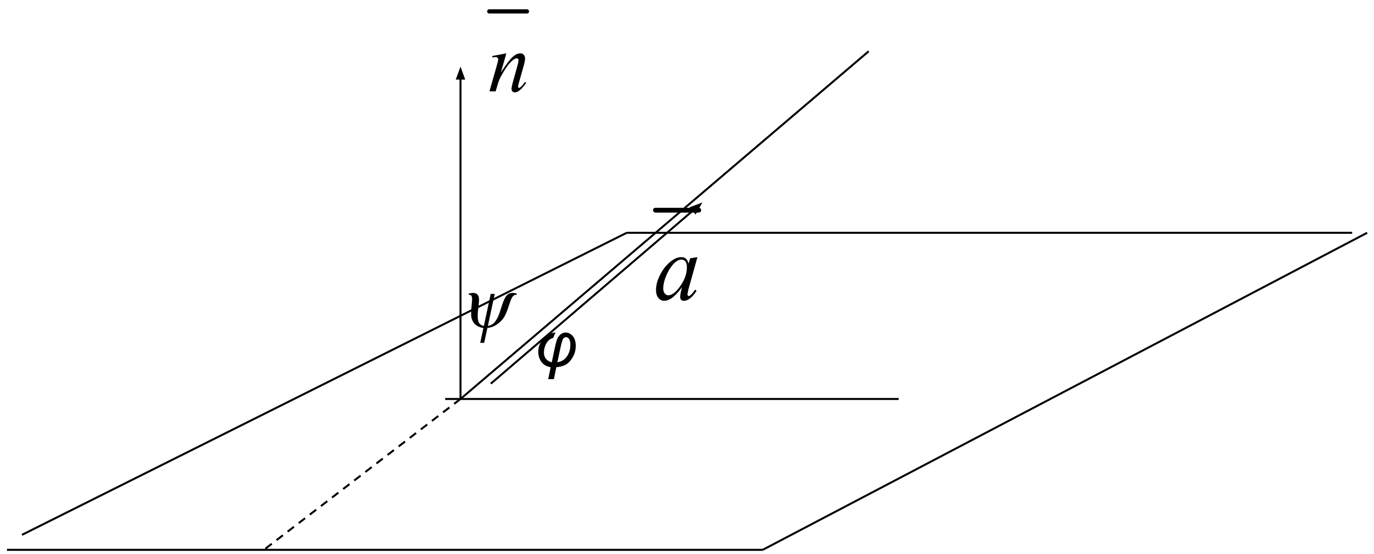
Перпендикулярность прямых

Если $\ell_1 \perp \ell_2$, то

$$\overline{a_1} \perp \overline{a_2} \Rightarrow \overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$$

Взаимное расположение прямой и плоскости

Угол между прямой и плоскостью



Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость

Угол между прямой и плоскостью

$\overline{n} = (A, B, C)$ -нормаль плоскости *П*,

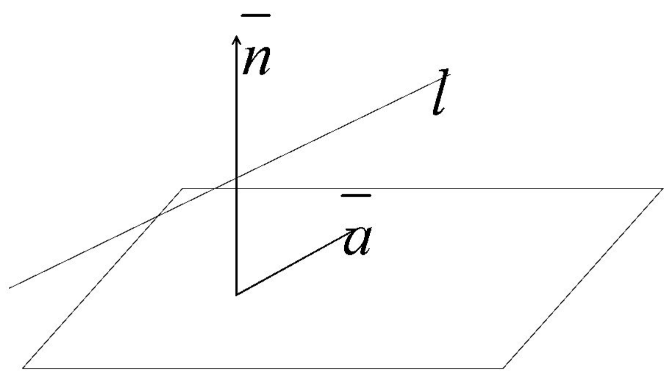
$\overline{a} = (m, p, q)$ -направляющий вектор прямой l .

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi, \sin\varphi = \cos\psi$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bp + Cq|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + q^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

Если $\square \parallel \Pi$, то $Am + Bp + Cq = 0$



Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Если $\square \perp \Pi$, то $$\frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}$$

Точка пересечения прямой и плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой $\dfrac{\tilde{o}-\tilde{o}_{\hat{\imath}}}{m}=\dfrac{y-y_o}{n}=\dfrac{z-z_{\hat{\imath}}}{\eth}$

и плоскости $\grave{A}\tilde{o}+\hat{A}\acute{o}+\tilde{N}z+D=0.$

Запишем параметрические уравнения прямой

$$\tilde{o}=mt+x_o\,,\,y=nt+y_0,z=pt+z_0.$$

и подставим выражения для *x*, *y*, *z* в уравнение плоскости.

Получим уравнение вида $Mt = N$ относительно параметра t. Выразив t из этого уравнения и подставив в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Замечание. Если уравнение относительно t примет вид $0t = 0$ (то есть $M = N = 0$), то любое действительное значение t будет его решением, значит, прямая и плоскость имеют множество общих точек, то есть прямая лежит в плоскости.

Пример

Найти точку пересечения прямой

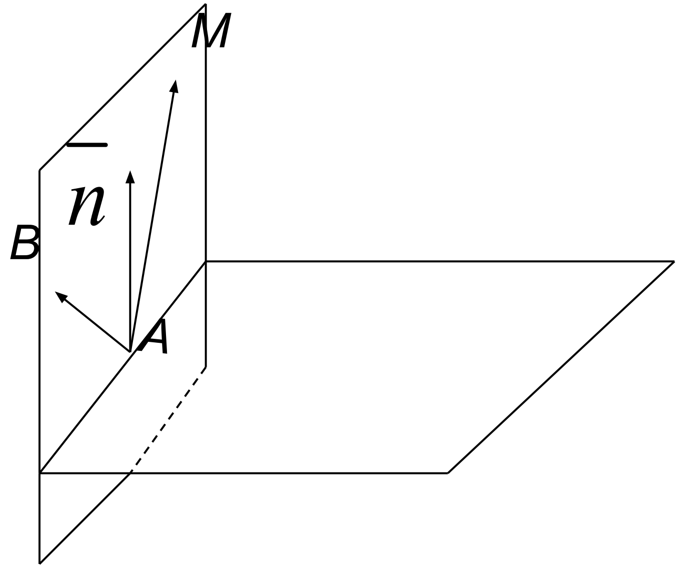
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+4}{3}$$

и плоскости

$$3x-y+5z-6=0.$$

Пример

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;2;0)$ и $B(2;1;1)$ перпендикулярно заданной плоскости $-x+y-1=0$.



Пример

Показать, что прямая $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$

лежит в плоскости $7x-5y-6z+1=0.$

Решение. Используем параметрические уравнения прямой

$x=t+1, \quad y=-t-2, \quad z=2t+3.$

Подставим в уравнение плоскости: -

$$7(t+1)-5(-t-2)-6(2t+3)+1=0,$$

$$7t+7+5t+10-12t-18+1=0, \quad 0=0$$

Получили равенство, верное при любых

Следовательно, прямая лежит в плоскости.

Пример

Найти уравнение перпендикуляра к плоскости

$$x+3y-4z-13=0,$$

проходящего через точку *A*(2;-1:3), и определить координаты основания этого перпендикуляра.