По следам теоремы Пифагора

Работа выполнена ученицей 9 класса
МОУ СОШ №19
ст.Ладожской Усть-Лабинского района
Селезнёвой Дарьей Андреевной

Руководитель
Огнева Раиса Стефановна,
учитель математики МОУ СОШ №19,
Заслуженный учитель Кубани
Заслуженный учитель России
победитель конкурса
«Лучший учитель России»
в рамках реализации ПНПО

« Геометрия обладает двумя великими сокровищами. Первое - это теорема Пифагора, которую можно сравнить

с мерой золота…»

И. Кеплер

- Цель:

внимательно изучив формулировку теоремы Пифагора, проанализировав доказательство и используя обобщение, предложить более широкий круг объектов, при помощи которых происходит доказательство теоремы Пифагора, создав тем самым новую интерпретацию её формулировки.

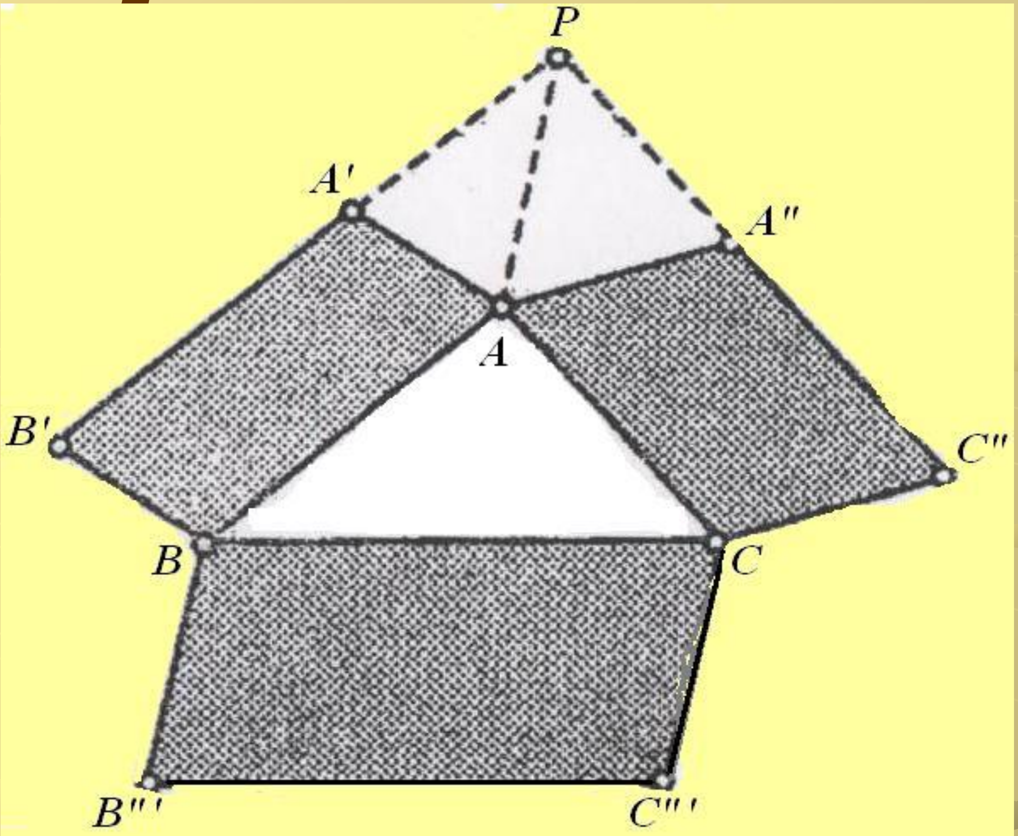
- Задачи:

1) обобщение материала по исследуемой теме.
2) применение теоремы Паппа как дополнительного инструмента проекта.
3) систематизирование информации, представленной в проекте.
4) создание новой интерпретации формулировки теоремы Пифагора.

ГИПОТЕЗА

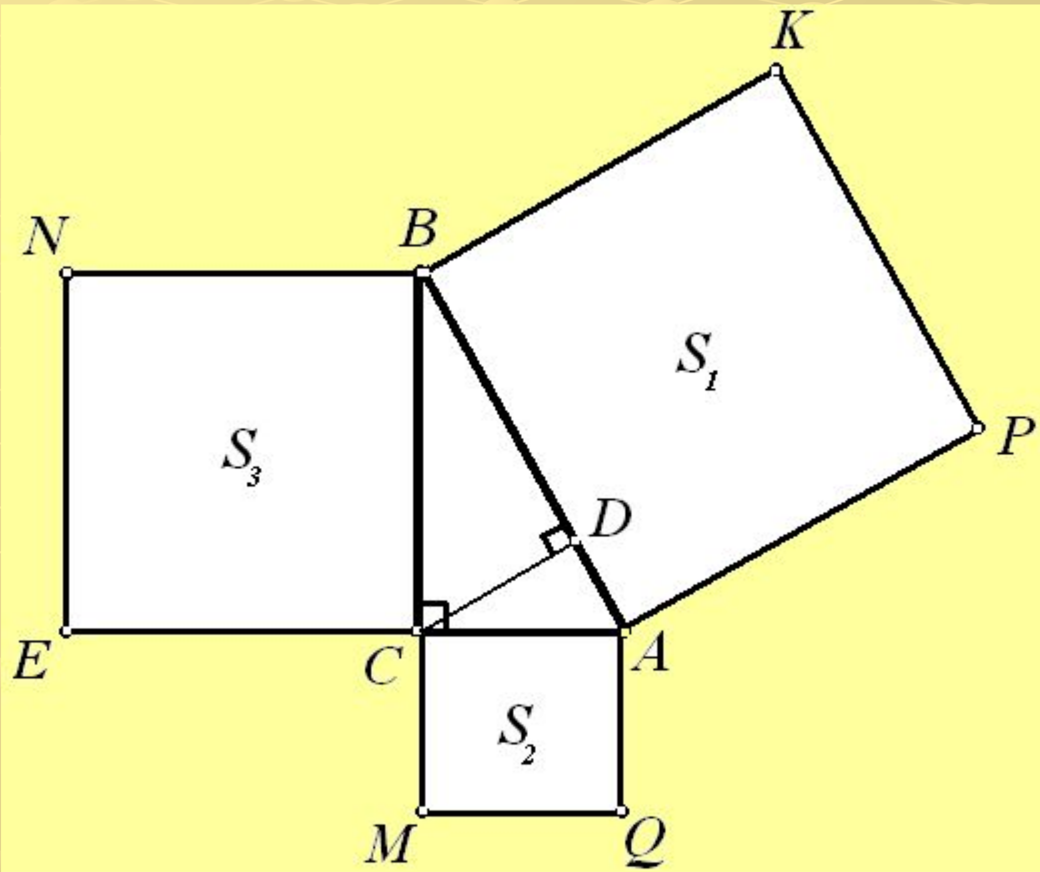
Если я (в доказательстве теоремы Пифагора) на сторонах прямоугольного треугольника построю не квадраты (как предложил Пифагор), а подобные многоугольники, то будет ли справедливо, что площадь многоугольника, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей многоугольников, построенных на катетах? Если я это докажу, то у меня появится новая интерпретация формулировки теоремы Пифагора, что обогатит задачный материал, а

Теорема Паппа



Если на сторонах произвольного треугольника ABC построить параллелограммы соответствующим образом, то площадь параллелограмма, построенного на большей стороне, равна сумме площадей двух остальных.

Проверка гипотезы



$\Delta CDA \sim \Delta BAC \qquad k_1 = \frac{b}{c}$

$\Delta BCD \sim \Delta BAC \qquad k_2 = \frac{a}{c}$

$\Delta BCD \sim \Delta CAD \qquad k_3 = \frac{a}{b}$

$APKB \sim CMQA$

$CMQA \sim BNEC$

$APKB \sim BNEC$

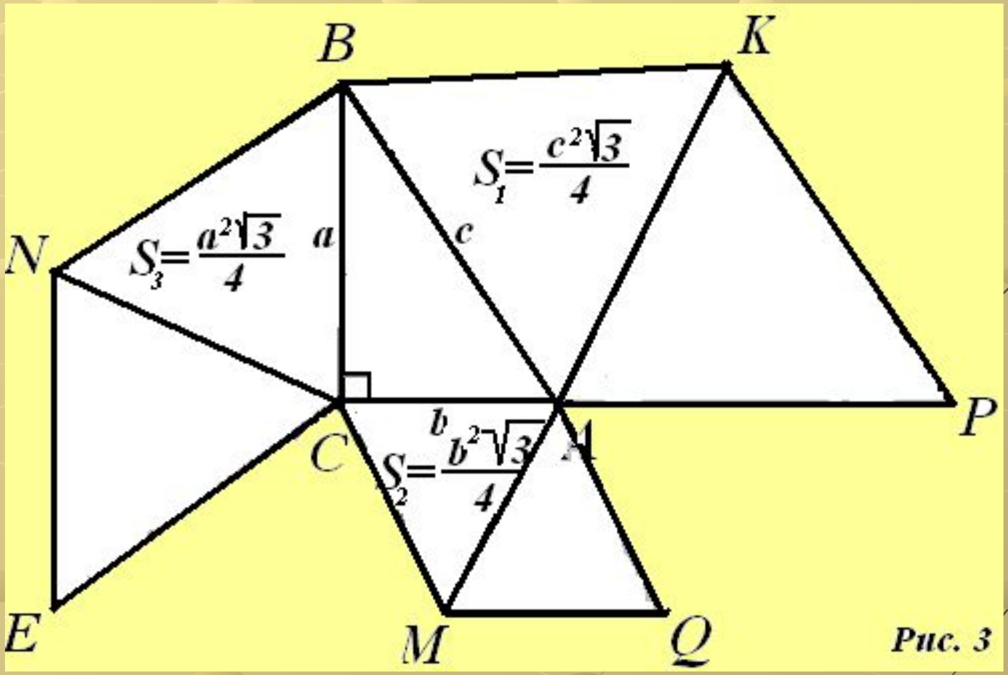
На сторонах прямоугольного треугольника построим равносторонние треугольники. Достроив их до параллелограммов и применив теорему Паппа, имеем:

$$\frac{1}{2}S_{ABKP} = \frac{1}{2}S_{AQMC} + \frac{1}{2}S_{CENB}$$

$$S_{\Delta BKA} = S_{\Delta AMC} + S_{\Delta BCN}$$

$$S_1 = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} \qquad S_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$\frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2$$

На сторонах прямоугольного треугольника построим равнобедренные подобные треугольники.

Достроив их до параллелограммов и применив теорему Паппа, имеем:

$\Delta BCD \sim \Delta CAD \sim \Delta BAC$ (как построенные на сходственных сторонах)

$\Delta BKA \sim \Delta AMC \sim \Delta CNB$

1) $\Delta CDA \sim \Delta BCA \quad k=\frac{b}{c}$

$\Delta AMC \sim \Delta AKB \quad k=\frac{b}{c}$

2) $\Delta BCD \sim \Delta BAC \quad k=\frac{a}{c}$

$\Delta CNB \sim \Delta BKA \quad k=\frac{a}{c}$

3) $\Delta BCD \sim \Delta CAD \quad k=\frac{a}{b}$

$\Delta CNB \sim \Delta AMC \quad k=\frac{a}{b}$

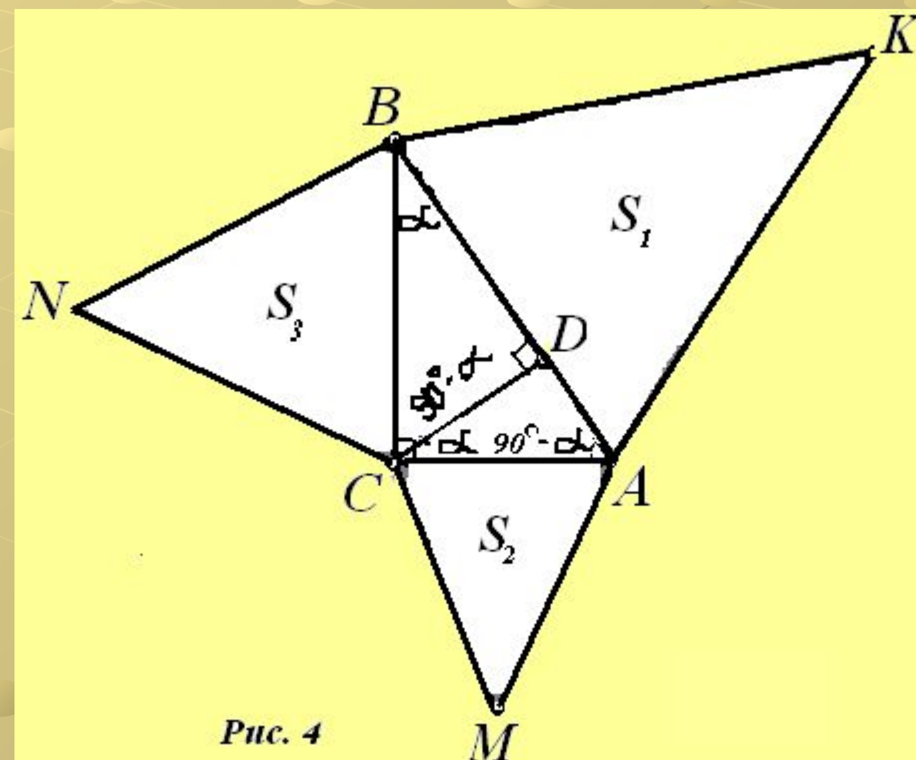


Рис. 4

На сторонах прямоугольного треугольника построим разносторонние подобные треугольники с коэффициентами подобия соответственно $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{b}$ (это коэффициенты подобных треугольников, на которые делит высота, опущенная из вершины прямого угла треугольника).

Достроив их до параллелограммов и применив теорему Паппа, получим, что площадь треугольника, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей треугольников, построенных на катетах.

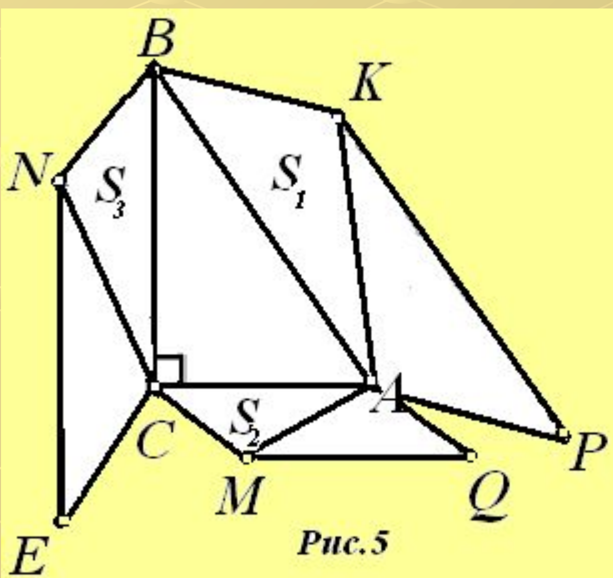


Рис.5

$$S_{ABKP} = S_{AQMC} + S_{BCEN}$$

$$\frac{1}{2} S_{ABKP} = \frac{1}{2} S_{AQMC} + \frac{1}{2} S_{BCEN}$$

$$S_1 = S_2 + S_3$$

Если на сторонах прямоугольного треугольника, как на сходственных, построить подобные многоугольники, то площадь многоугольника, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей многоугольников, построенных на катетах.