Подготовка к ЕГЭ 2014 по математике

Решение задания С1

Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

Арифметический

Геометрический

Алгебраический

Функционально-графический

Арифметический способ

перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

Найдите все корни уравнения $\sin 2x = \cos x$, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

$$\sin 2x = \cos x;$$

$$\cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array}\right.$$

$$1) \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z.$$

Если n=0,то

$$x = \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=1,то

$$x = \frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=-1,то

$$x = -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=-2,то

$$x = -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$2)\ \sin x = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Если n=-1, то

$$x = -\frac{11\pi}{6},\ -\frac{11\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = -\frac{7\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=0, то

$$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=1, то

$$x = \frac{13\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = \frac{17\pi}{6},\ \frac{17\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$\text{Ответ}: -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}.$$

Алгебраический способ

а) решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;
б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

Решить уравнение: $\dfrac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0.$

$$\frac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 7x = 0, \\ \sin 5x - 1 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 5x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi n}{7}, n \in Z, \\ x \neq \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi k}{5}, k \in Z; \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7} \neq \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}; n, k \in Z;$$

$$\frac{1}{14} + \frac{n}{7} \neq \frac{1}{10} + \frac{2k}{5}; n, k \in Z;$$

Найдём все «неподходящие» n.

$$\frac{1}{14}+\frac{n}{7}=\frac{1}{10}+\frac{2k}{5};n,k\in Z;$$

$$5+10n=7+28k;n,k\in Z;$$

$$10n=2+28k;n,k\in Z;$$

$$5n=1+14k;n,k\in Z;$$

$$n=\frac{1+14k}{5};n,k\in Z;$$

$$n=2k+\frac{4k+1}{5};n,k\in Z;$$

$$\frac{4k+1}{5}=a, \quad k\in Z, \quad a\in Z.$$

$$k=\frac{5a-1}{4};$$

$$k=\boxed{a}+\frac{\boxed{a}-1}{4};$$

$$\frac{a-1}{4}=t; \quad a\in Z, \quad t\in Z.$$

$$a=\boxed{4t+1};$$

$$n=2k+\frac{4k+1}{5}; n,k\in Z;$$

$$k=\boxed{5t+1};$$

$$n=14t+3$$

$$t\in Z, n\in Z.$$

Все «неподходящие» *n*

Итак,

$$\frac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z; \quad n \neq 14t + 3, t \in \mathrm{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z; \quad n \neq 14t + 3, t \in \mathrm{Z}.$

Решить уравнение

$$2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0.$$

Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;5\pi\right].$

$$2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0;$$

$$2\cdot(1-\cos^2 x) + 3\cos x - 3 = 0;$$

$$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0;$$

$$-2\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0;$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0;$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x = 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = 2\pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

$$1)\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$4\pi \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 5\pi, n \in Z;$$

$$4 \le \frac{1}{3} + 2n \le 5, n \in Z;$$

$$4 - \frac{1}{3} \le 2n \le 5 - \frac{1}{3}, n \in Z;$$

$$3\frac{2}{3} \le 2n \le 4\frac{2}{3}, n \in Z;$$

$$1\frac{5}{6} \le n \le 2\frac{1}{3}, n \in Z;$$

n=2

$$x = \frac{13\pi}{3}.$$

$$2)\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$4\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 5\pi, n \in Z;$$

$$4 \le -\frac{1}{3} + 2n \le 5, n \in Z;$$

$$4 + \frac{1}{3} \le 2n \le 5 + \frac{1}{3}, n \in Z;$$

$$4\frac{1}{3} \le 2n \le 5\frac{1}{3}, n \in Z;$$

$$2\frac{1}{6} \le n \le 2\frac{2}{3}, n \in Z;$$

нет значений.

$$3)\ x = 2\pi n, n \in Z.$$

$$4\pi \le 2\pi n \le 5\pi, n \in Z;$$

$$4 \le 2n \le 5, n \in Z;$$

$$2 \le n \le 2\frac{1}{2}, n \in Z;$$

$$n = 2.$$

$$x = 4\pi.$$

$$\text{Ответ}: \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ 2\pi n, n \in Z;\ \frac{13\pi}{3};\ 4\pi.$$

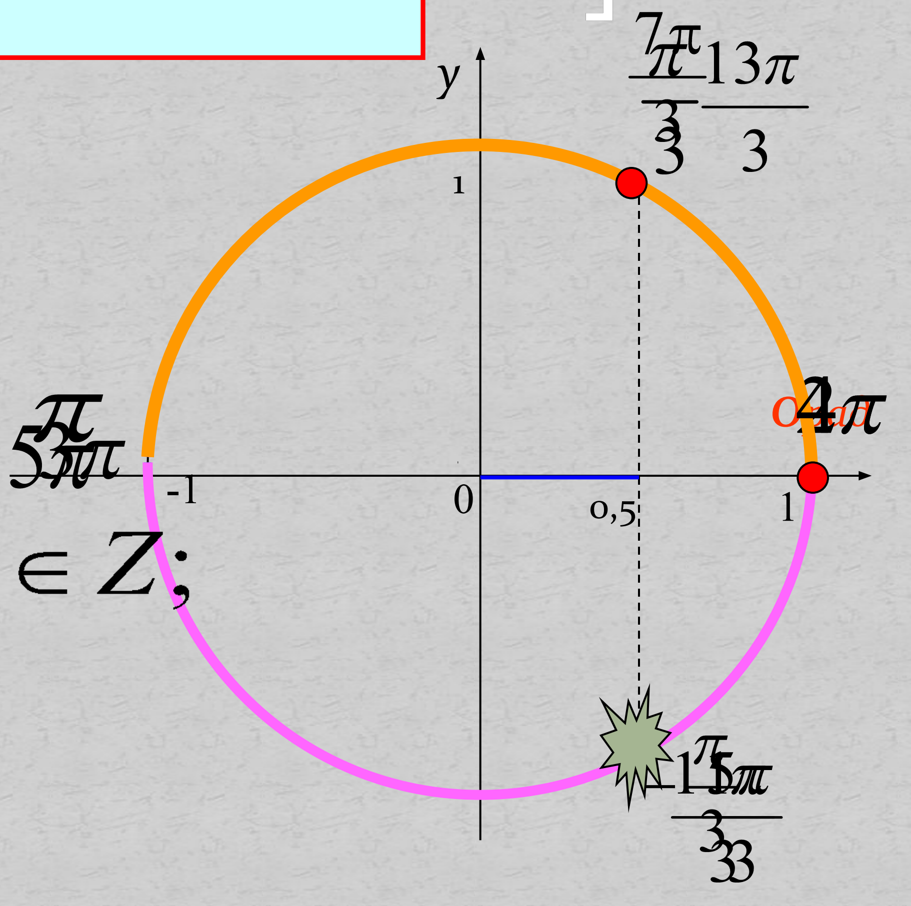
Геометрический способ:

а) изображение корней на тригонометрической окружности с последующим их отбором на заданном промежутке;
б) изображение корней на координатной прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений.

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0;$$

Выполним отбор корней в предыдущем уравнении по-другому!

$$x = 2\pi k, k \in Z.$$



$$Ответ: \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$2\pi k, k \in Z; \frac{13\pi}{3}; 4\pi.$$

Решить уравнение

$$2\sin 2x + \cos x + 4\sin x + 1 = 0.$$

Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right].$

$$2\sin 2x+\cos x+4\sin x+1=0;$$

$$2\cdot 2\sin x\cdot\cos x+\cos x+4\sin x+1=0;$$

$$4\sin x\cdot\cos x+\cos x+4\sin x+1=0;$$

$$\cos x\cdot(4\sin x+1)+(4\sin x+1)=0;$$

$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$$

$$(4\sin x+1)\cdot(\cos x+1)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}4\sin x+1=0,\\ \cos x+1=0;\end{array}\right.$$

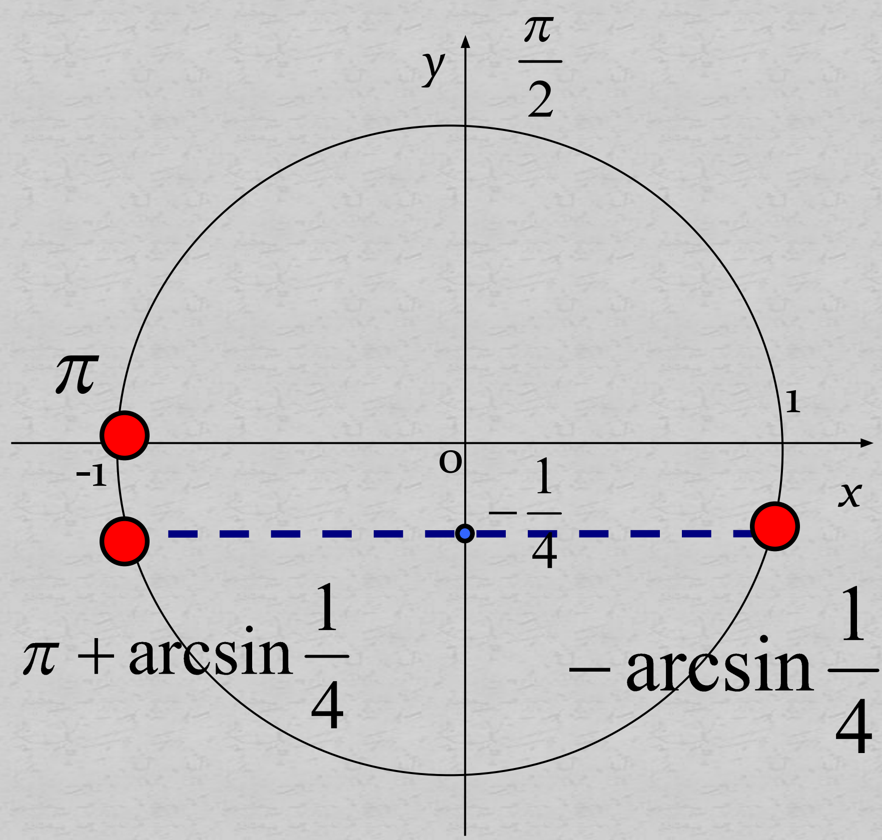
общий множитель

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{4},\\ \cos x=-1;\end{array}\right.$$

общий множитель

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{4}, \\ \cos x = -1; \end{array}\right.$$

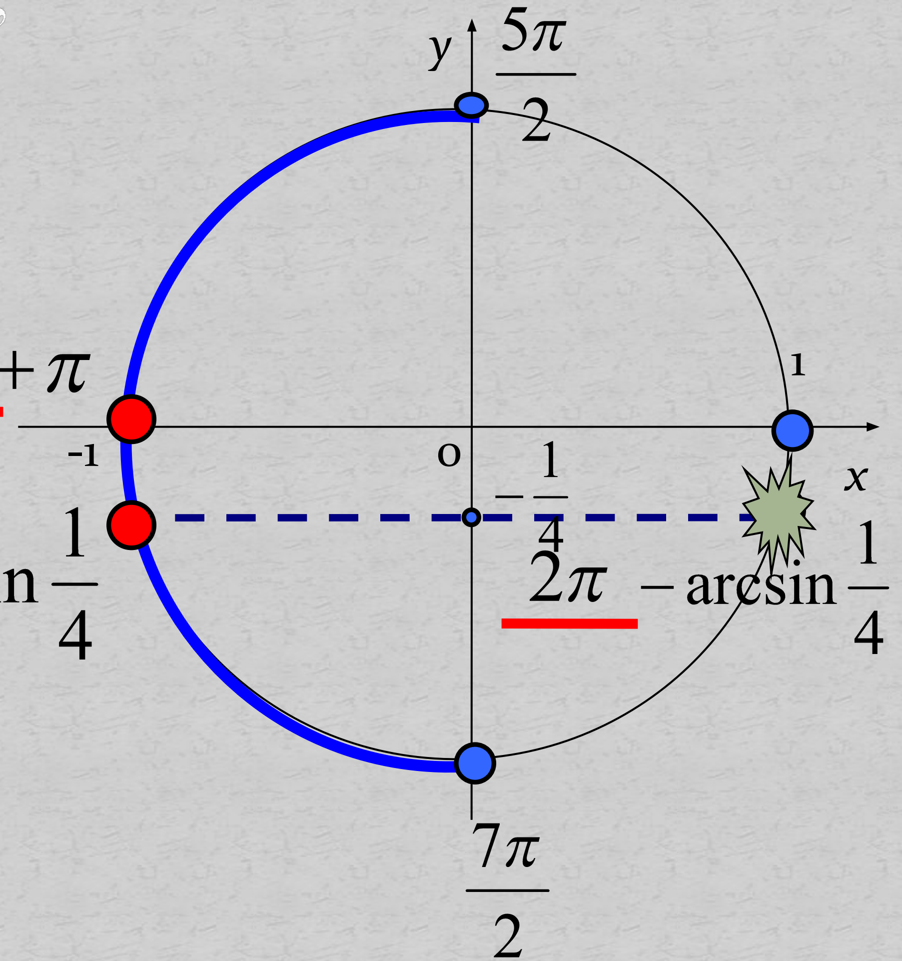
$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin(-\dfrac{1}{4}) + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin(-\dfrac{1}{4}) + 2\pi n, n \in Z; \\ x = \pi + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} x = -\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n, \\ x = \pi + \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z; \\ x = \pi + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3\pi + \arcsin\frac{1}{4}, \\ x = 3\pi. \end{array}\right.$$

$? \quad \longrightarrow \quad \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$



$Ответ: -\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n,$

$\pi + \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z;$

$\pi + 2\pi k, k \in Z.$

$3\pi + \arcsin\frac{1}{4}; 3\pi.$

Решить уравнение

$$2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

$$2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

$$2tg^2 x + tgx - 3 = 0;$$

ное уравнение

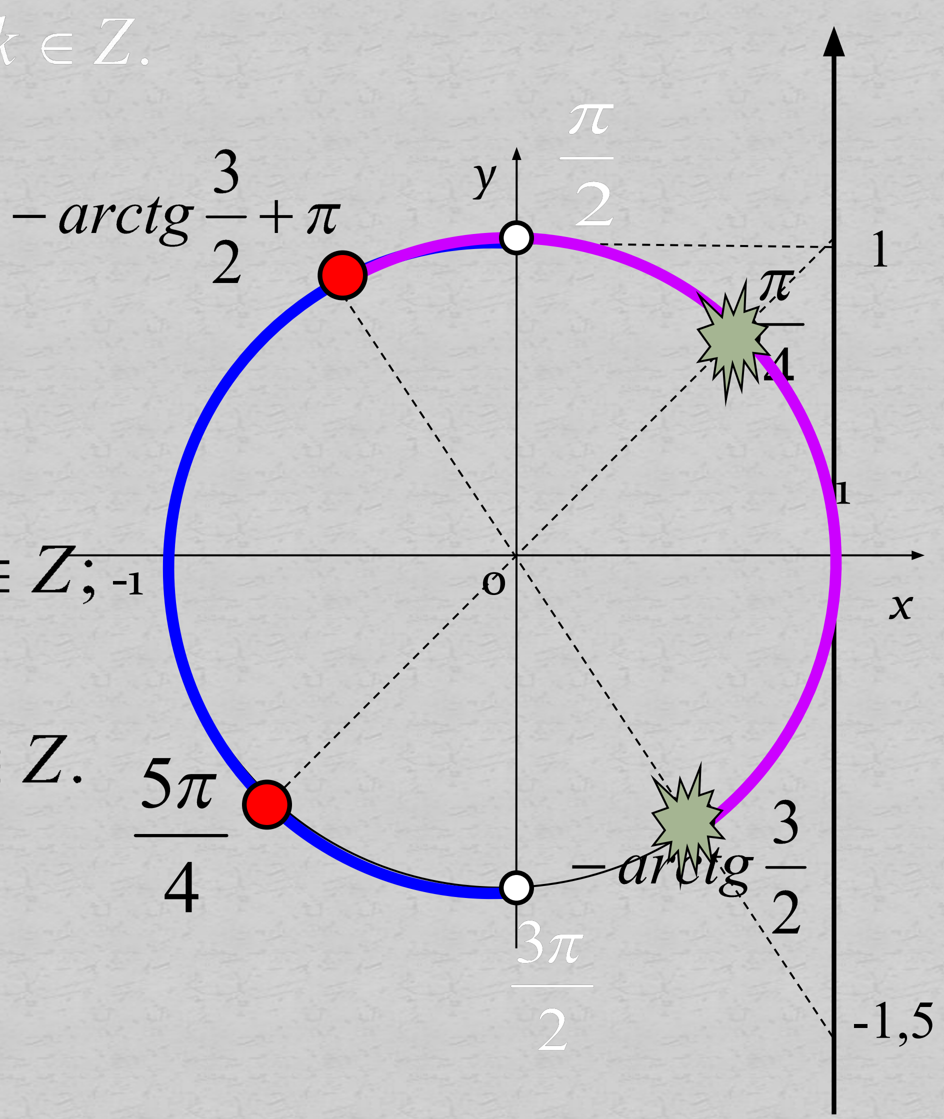
Разделим на *$\cos^2 x$; $\cos^2 x \neq 0$.*

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = -\dfrac{3}{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \\ x = -arctg\dfrac{3}{2} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \\ x = -arctg(\dfrac{3}{2}) + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

$\xrightarrow{?}$ $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$



$$Ответ: \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$$

$$-arctg(\frac{3}{2}) + \pi k, k \in Z.$$

$$\frac{5\pi}{4}; \pi - arctg\frac{3}{2}.$$

Отбор корней на координатной прямой.

$$\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}}=0.$$

Решение :

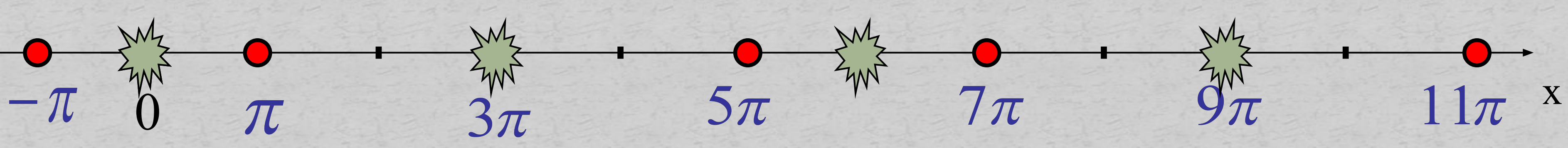
$$\begin{cases}\cos\frac{x}{2}=0,\\ \sin\frac{x}{3}\neq 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\pi+2\pi k, k\in Z,\\ x\neq 3\pi n, n\in Z.\end{cases}$$

$$T(\cos\frac{x}{2})=4\pi,$$

$$T(\sin\frac{x}{3})=6\pi.$$

Наим. общий период :

$T_{общ}=12\pi.$



Ответ :

$$-\pi+6\pi m, \pi+6\pi m, m\in Z.$$

Функционально-графический способ

выбор корней с использованием графика простейшей тригонометрической функции.

Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x - \sqrt{2}\sin x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2\sin x - 1}} = 0;$$

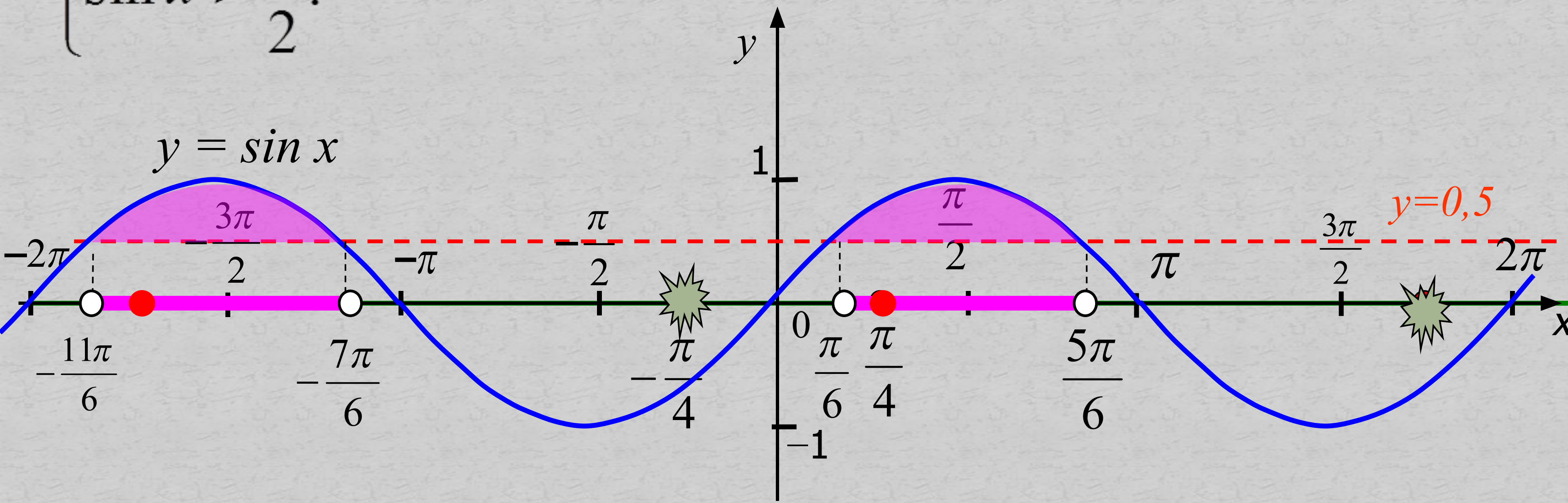
$$\frac{2\sin x \cdot \cos x - \sqrt{2}\sin x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2\sin x - 1}} = 0;$$

$$\frac{(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (2\sin x - 1)}{\sqrt{2\sin x - 1}} = 0;$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{array} \right. \\ \sin x > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; \\ \sin x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; \\ \sin x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$



$$Ответ: \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

Дано уравнение: $$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

Решение:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$$

$$\sin 2x=\cos x$$

$$2\sin x\cos x=\cos x$$

$$2\sin x\cos x-\cos x=0$$

$$\cos x(2\sin x-1)=0$$

Тогда cos x = 0 или sin x = 0,5

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in \mathbb{Z}$$

$$x_1=\arcsin a+2\pi k,\quad k\in Z$$

$$x_2=\pi-\arcsin a+2\pi k,\quad k\in Z$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\quad k\in Z$$

имеет решение при $-1\le a\le 1$

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \quad \text{или} \quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in \mathbb{Z}$$

Таким образом: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in \mathbb{Z}$

Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Итак, первый корень: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le 4\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le 4\pi \quad \Big| -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \le \pi k \le 4\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi \le \pi k \le 3{,}5\pi \quad \Big| \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$2 \le k \le 3{,}5$$

Так число **k** целое, то **$k_1 = 2$ $k_2 = 3$**

Находим корни, принадлежащие интервалу:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}$$

Следующий корень: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi \quad \Big| -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \le 2\pi k \le 4\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{14\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{23\pi}{6} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{7}{6} \le k \le \frac{23}{12}$$

$$1\frac{2}{12} \le k \le 1\frac{11}{12}$$

Для полученного неравенства целого числа **k** не существует.

Следующий корень:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi \quad \Big| -\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \le 2\pi k \le 4\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{10\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{19\pi}{6} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{5}{6} \le k \le \frac{19}{12}$$

$$\frac{5}{6} \le k \le 1\frac{7}{12}$$

Так как число **k** целое, то **k = 1.**

Находим корень принадлежащий интервалу:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = \frac{5\pi}{6} + \frac{12}{6} = \frac{17\pi}{6}$$

Ответ: $\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$

В презентации использовались ресурсы:

- **http://alexlarin.net/ege/2012/C12012.pdf**
- **2.** ЕГЭ**-2012.**Математика**:** типовые экзаменационные варианты**: 30** вариантов**/** под ред**.** А**.**Л**.** Семёнова**,** И**.**В**.**Ященко**.-**М**.:** Национальное образование**, 2011. (**ЕГЭ **-2012.** ФИПИ – школе**).**