

Подготовка к ЕГЭ

ЛОГАРИФМЫ

РАЗРАБОТКА

УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

ГОУ СОШ №618

Макаровой Татьяны Павловны

© Материал подготовила: Макарова Т.П., учитель школы №618

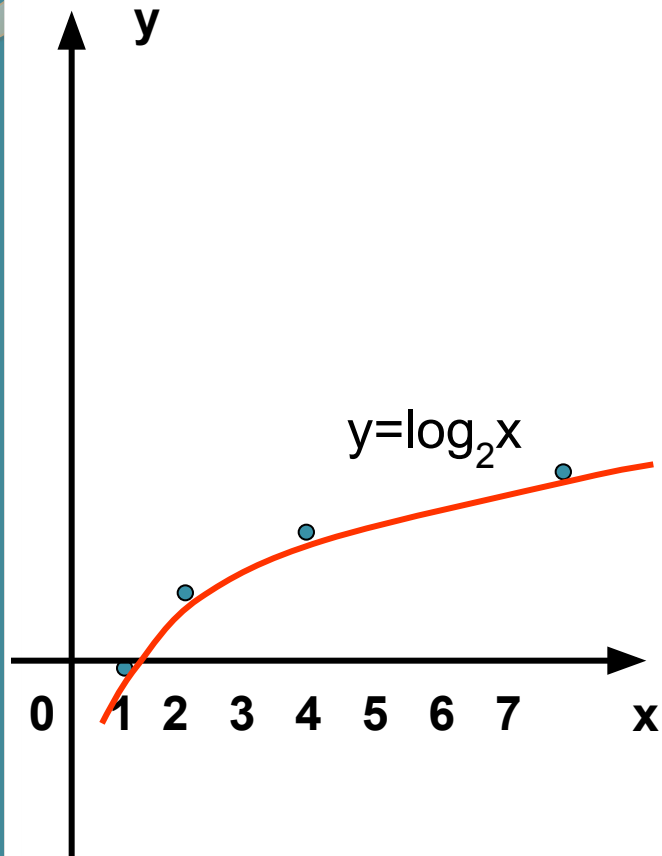
Свойства функции

$$y = \log_a x, a > 1:$$

- $D(f) = (0; +\infty)$;
- не является ни четной, ни нечетной;
- возрастает на $(0; +\infty)$;
- не ограничена сверху, не ограничена снизу;
- не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- непрерывна;
- $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
- выпукла вверх;
- дифференцируема.

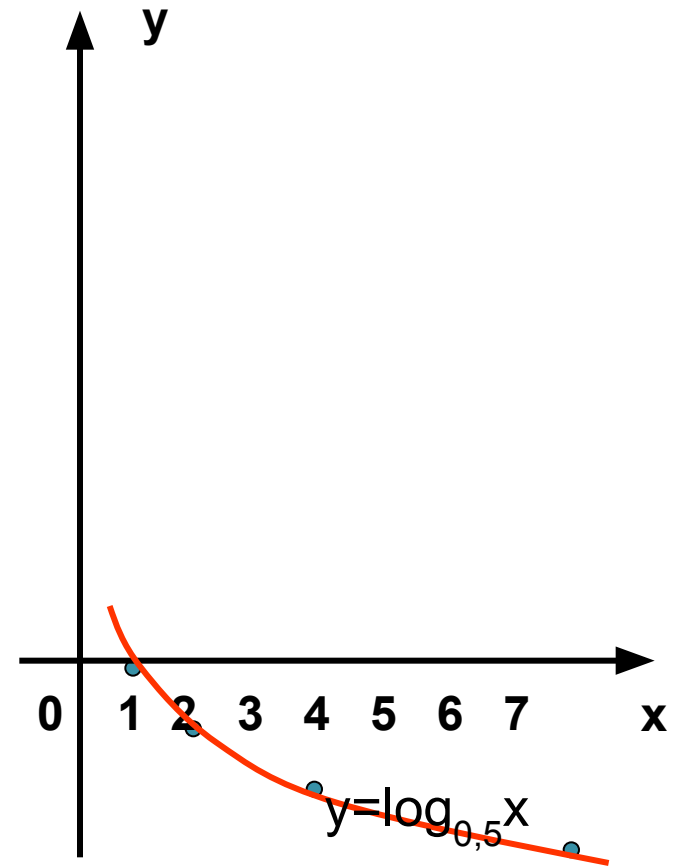
$$Y = \log_2 x$$

x	1/2	1	2	4	8
y	-1	0	1	2	3



$$Y = \log_{0,5} x$$

x	1/2	1	2	4	8
y	1	0	-1	-2	-3



Определите, какие из перечисленных ниже функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$y = \log_2 x$	$2 > 1$	возрастающая
$y = \log_{0,5}(2x + 5)$	$0 < 0,5 < 1$	убывающая
$y = \lg(x)^{1/2}$	$10 > 1$	возрастающая
$y = \ln(x + 2)$	$e > 1$	возрастающая

Свойства логарифмов

($a > 0, a \neq 1$)

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, x > 0, y > 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, x > 0, y > 0$$

$$\log_a x^p = p \log_a x, x > 0$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$$

«ХИТРОСТИ» СВОЙСТВ ЛОГАРИФМОВ:

$$\log_a b^2 = 2 \log_a |b|$$

при $a > 0, a \neq 1, b \neq 0$;

$$\log_a bc = \log_a (-b) + \log_a (-c)$$

при $a > 0, a \neq 1, b < 0, c < 0$;

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a (-b) - \log_a (-c)$$

при $a > 0, a \neq 1, b < 0, c < 0$;

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

при $a > 0, b > 0, b \neq 0, c > 0$

Преобразование логарифмических выражений

Сравнить числа $\log_{13} 150$ и $\log_{17} 290$.

Решение.

Так как $\log_{13} 150 < \log_{13} 169$

$\log_{13} 169 = \log_{13} 13^2 = 2$, т.е. $\log_{13} 150 < 2$.

$\log_{17} 290 > \log_{17} 289 = \log_{17} 17^2 = 2$, т.е.

$\log_{17} 290 > 2$,

то

$\log_{13} 150 < \log_{17} 290$.

Преобразование логарифмических выражений

Сравнить числа $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80}$ и $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15+\sqrt{2}}$.

Решение.

Так как $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$

И $15 + \sqrt{2} > 16$, а

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15+\sqrt{2}} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$, то

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15+\sqrt{2}}$.

Преобразование логарифмических выражений

Доказать, что $\log_9 10 > \lg 11$.

Рассмотрим $A = \frac{\lg 11}{\log_9 10}$, $A > 0$.

Докажем, что $A < 1$.

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{\lg 11}{\log_9 10}} = \sqrt{\lg 11 \cdot \lg 9} \leq \frac{\lg 11 + \lg 9}{2} = \frac{\lg 99}{2} < \frac{\lg 100}{2} = 1.$$

То $\sqrt{A} < 1$, и $\log_9 10 > \lg 11$.

Повышенный уровень

Найти значение выражения (1–5).

$$1. \sqrt[3]{36^{\frac{1}{\log_9 6}} - 7^{\log_{49} 289}}$$

$$2. \log_6 \frac{1}{\sqrt{216}} + \lg 10\sqrt{0,1}.$$

$$3. \log_2 \left(\sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \left(\cos \frac{\pi}{12} \right) + 1$$

$$4. \log_{\frac{1}{6}} \log_{27} \sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}.$$

$$5. \left(\sqrt{7} \right)^{4 - \log_{\sqrt{7}} 0,5}$$

Логарифмические уравнения – это уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$$\log_a f(x) = b,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильное уравнению

$$f(x) = a^b .$$

Уравнение вида $\log_x A = B, A > 0$

- при $A \neq 1$ и $B \neq 0$ имеют единственный корень $x = A^{1/B}$;
- при $A = 1$ и $B = 0$ имеют решением любое положительное, отличное от единицы, число;
- при $A = 1$ и $B \neq 0$ корней нет;
- при $A \neq 1$ и $B = 0$ корней нет.

Тренировочные упражнения

$$0,2 \log_x \frac{1}{32} = -0,5. \text{ Ответ : } 4.$$

$$\log_{x-1} 3 = 2. \text{ Ответ : } 1 + \sqrt{3}.$$

$$\log_{\log_3 x} = 2. \text{ Ответ : } 3^{\sqrt{3}}.$$

Уравнение вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

- **1 способ.**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

- **2 способ.**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Тренинг

$$1) \log_7(x^2 - 12) = \log_7 x$$

$$2) \log_{11}(x^2 - 5x + 6) = \log_{11}(x - 2)$$

$$3) \log_{15} x^4 = \log_{15} (15x)^2$$

$$4) \log_{\frac{1}{5}} \frac{2+x}{10} = \log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{x+1}$$

$$5) \log_4(x^2 + 3x - 4) = \log_4 \frac{x-1}{x+4}$$

$$6) \log_7\left(\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right) = \log_7(2 - |x - 3x^2|).$$

Логарифмы с переменным основанием

Уравнения вида $\log_{g(x)} f(x) = b$

равносильны смешанной системе

$$\log_{g(x)} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x)^b. \end{cases}$$

Тренинг

- 1) $\log_{x+1}(5-x) = 1$. *Ответ: 2*
- 2) $\log_{x^2-2x+1} 2(3x-5) = 1$. *Ответ: 3*
- 3) $\log_x(x^2-2) = 1$. *Ответ: 2*
- 4) $\log_{4\sqrt{x}} \sqrt[4]{x} = 0$. *Ответ: $\left\{1; \frac{1}{2}; 16\right\}$*

Уравнения вида

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$$

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$$

ИЛИ

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$$

Тренировочные упражнения

$$\log_{x^2-1} (x^3 + 6) = \log_{x^2-1} (4x^2 - x);$$

$$\log_{x^2 - \frac{17}{4}x + 1} 4x^2 = \log_{x^2 - \frac{17}{4}x + 1} (x + 4)^2;$$

$$\log_{\frac{x}{2}} (x - 2) + \log_{\frac{x}{2}} (2x - 6) = 2.$$

Уравнения вида

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x)$$

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases}$$

ИЛИ

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ p(x) > 0, \\ p(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases}$$

Тренинг

$$\log_{x^3+x} (x^2-4) = \log_{4x^2-6} (x^2-4);$$
$$\log_{\left(4x-x^2\right)} x = \log_{(12-3x)} x;$$

Уравнения вида $2n \log_a f(x) = \log_a g(x)$
 $a > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N}$

$$2n \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f^{2n}(x) = g(x). \end{cases}$$

Пример.

$$\lg 2x = 2 \lg(4x - 15) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 15 > 0, \\ \lg 2x = \lg(4x - 15)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 15 > 0, \\ 2x = (4x - 15)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{15}{4}, \\ 16 \left(x - \frac{9}{2} \right) \left(x - \frac{25}{8} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{2}.$$

Методы решения логарифмических уравнений



1. Решение уравнений, основанных на определении логарифма

$$\log_2(5 - x) = 3.$$

По определению логарифма

$$5 - x = 2^3,$$

откуда $x = -3$.

$x = -3$ – корень уравнения.

Ответ: $x = -3$.

2. Решение уравнений с помощью потенцирования

$$\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) = 1.$$

Потенцируя, имеем: $\log_3(x + 1)(x + 3) = 1$.

Учитывая область определения получаем систему:

$$\begin{cases} (x + 1)(x + 3) = 3, \\ x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x = 0, \\ x > -1. \end{cases}$$

Откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -4$. Так как $x > -1$, то корень $x_2 = -4$ – посторонний.

Ответ: $x = 0$

3. Применение основного логарифмического тождества

$$\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3 - x)}$$

Область определения уравнения

$$\begin{cases} 9 - 2^x > 0, \\ 3 - x > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x < 9, \\ x < 3. \end{cases}$$

откуда $x < 3$. Применив в правой части уравнения основное логарифмическое тождество, получим:

$$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x \text{ или } 9 - 2^x = 2^{3-x} \text{ или } 9 - 2^x = \frac{8}{2^x},$$
$$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0, \text{ откуда } 2^x = 1, x_1 = 0; 2^x = 8, x_2 = 3.$$

Так как $x < 3$, то $x_2 = 3$ – посторонний корень.

Ответ: $x = 0$.

4. Логарифмирование

$$10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20.$$

Область определения уравнения задается условиями $x > 0$, $x \neq 1$. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, предварительно упростив его:

$$(10^{\lg x})^{\lg x} + x^{\lg x} = 20, x^{\lg x} + x^{\lg x} = 20, x^{\lg x} = 10$$

или $\lg x^{\lg x} = \lg 10$, $\lg^2 x = 1$, $\lg x = \pm 1$, значит $\lg x = 1$, $x_1 = 10$; $\lg x = -1$, $x_2 = 0,1$. Оба корня удовлетворяют ограничениям $x > 0, x \neq 1$.

Ответ: $x_1 = 10$, $x_2 = 0,1$.

Замена переменных в уравнениях

Две основные идеи решения логарифмических уравнений:

- приведение уравнения к виду

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

с последующим потенцированием;

- замена неизвестных вида $y = \log_a f(x)$ с предшествующим преобразованием уравнения к удобному для этой замены виду.

5. Замена переменной

$$\sqrt{\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}.$$

Так как $-x > 0$, т.е. $x < 0$ и $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, то данное уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{\lg(-x)} = \lg(-x)$$

Пусть $\sqrt{\lg(-x)} = t, t \geq 0$, тогда получаем $t = t^2$, $t(t-1) = 0$, откуда $t_1 = 0, t_2 = 1$.

Значит $\lg(-x) = 0, x_1 = -1$;

$$\lg(-x) = 1, x_2 = -10.$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = -10$.

Тренировочные упражнения

$$\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 4 = 0$$

Ответ: 2; 16

$$\log_3 x = 1 + \log_x 9$$

Ответ: 9; 1/3

$$4 + \log_2 x^2 = \log_x 64$$

Ответ: 0,125; 2

$$\log_3^2(3x) + \log_{\frac{1}{3}}(3x^2) = 1$$

Ответ: 1/3; 3

$$4 \cdot (\log_4 x)^2 = \log_2 \frac{x^5}{16}$$

Ответ: 2; 16

6. Переход к другому основанию

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$$

Запишем уравнение в виде

$$(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162, \text{ где } x > 0, x \neq 1.$$

Далее имеем


$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162, \quad 2x^{\log_3 x} = 162, \quad x^{\log_3 x} = 81.$$

Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 3, получим:

$$\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 81 \text{ или } (\log_3 x)^2 = 4, \text{ откуда}$$

$$\log_3 x = \pm 2, \text{ тогда } x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}$.



ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ И СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Сведение к рациональным неравенствам

Тренинг

$$\log_{\frac{x+5}{x-1}} 3 - \log_{\frac{2x+1}{2x-5}} 3 \leq 0$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -5) \cup \left[\frac{5}{2}; 4 \right].$$

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leq \frac{1}{\log_6(6x^2 - 6x + 1)}$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{1}{3}; 0 \right) \cup \left(0,5; 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

$$\log_{2x-\frac{3}{2}} 5 + \log_{x+1} 5 \geq 0$$

$$\text{Ответ: } (0,75; 1] \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty \right)$$

Метод интервалов и систем

Тренинг

$$\frac{\sqrt{(x-5)(x+5)}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0.$$

$$\text{Ответ: } \{5\} \cup (4 + \sqrt{2}; +\infty).$$

$$(\sqrt{3-17x-6x^2} + 2) \log_{8x} 7 \geq 0.$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{6} \right]$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(x - \sqrt{x+2}) \cdot \left(\log_{\frac{1}{5}}^2(x+1) - \log_{\frac{1}{5}}(x+1) - 6 \right) \geq 0$$

Неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) < b$

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x) - h^b(x)}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Частный случай при

$$b \in \{0;1;2\}$$

b=0

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x)-1}{h(x)-1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

b=1

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x)-h(x)}{h(x)-1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

b=2

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x)-h^2(x)}{h(x)-1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Решите неравенство

$$\log_{2x-5}(5x-2) \geq 1$$

$$\log_{2x-5}(5x-2) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2)}{\log_2(2x-5)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2) - \log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5) - \log_2 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(5x-2) - (2x-5)}{(2x-5) - 1} \geq 0, \\ 5x-2 > 0, \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-3} \geq 0, \\ x > 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Ответ: $(3, +\infty)$.

Тренинг

1. $\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2.$

Ответ: $(-0,5;0] \cup [1;4).$

2. $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0.$

Ответ: $(-2;-1] \cup (1;2).$

3. $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2 + x - 1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x - 6 - 3x^2).$

Ответ: $\{1\} \cup (1,5;3).$

Неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$$

равносильно совокупности систем
неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решить неравенства

$$\log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x + 8);$$

$$\log_{0,2}(5 - x) > \log_{0,2} \frac{2}{x - 2};$$

$$\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > 0;$$

$$\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5 - x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4 - x).$$

Смешанные задачи с логарифмами

- Модули и возведение в квадрат

$$1) \left| \log_2(x^2 + 5x + 6) - \log_2(x + 2) \right| \leq 1$$

$$2) \left(\log_4(x^2 + x - 6) - \log_4(x + 3) \right)^2 \leq 1$$

$$3) \left(\log_3(3x^2 + 13x + 11) - 1 - \log_3(x + 2) \right)^2 \leq 1$$

$$4) \left| \log_4(x^2 + 4) - \log_4 x \right| \leq 1$$

- Логарифмы и корни

$$(1 + \log_2 x) \cdot \sqrt{\log_{2x} \sqrt{\frac{x}{2}}} \leq 1$$

$$\log_3(9x) \leq -\sqrt{\log_3(81x)}$$