

ЕГЭ-2013. Задачи типа С2

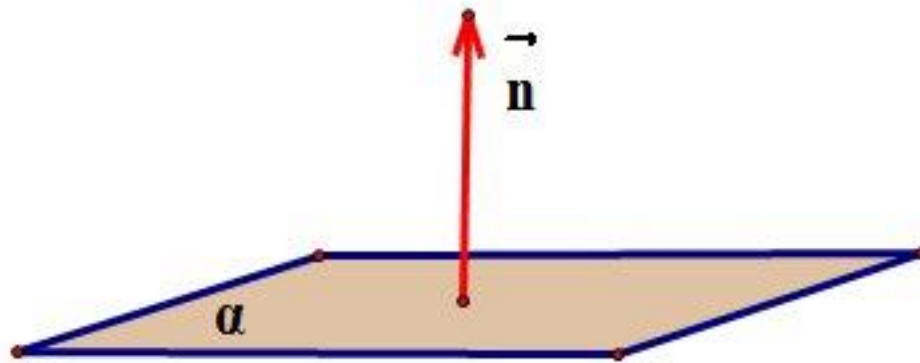
**Задание С2 ЕГЭ. Угол между плоскостями.
Координатный метод решения стереометрических
задач типа С2.**

Разработка учителя ГБОУ СОШ №618 Макаровой Т.П.

1. Уравнение плоскости имеет вид

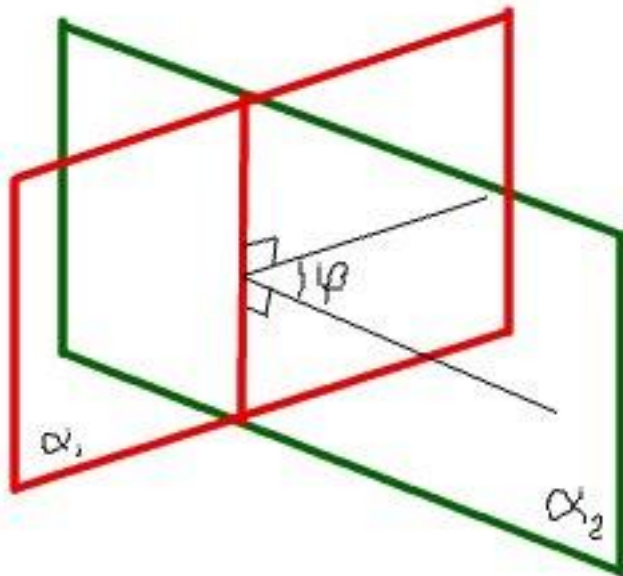
$$ax+by+cz+d=0$$

- В этом уравнении плоскости коэффициенты – координаты вектора нормали к плоскости (то есть вектора, перпендикулярного плоскости).



$$\vec{n}(a, b, c)$$

Угол между плоскостями



Величина двугранного угла измеряется величиной соответствующего линейного угла. Чтобы построить **линейный угол двугранного угла**, нужно взять на линии пересечения плоскостей произвольную точку, и в каждой плоскости провести к этой точке луч перпендикулярно линии пересечения плоскостей. **Угол, образованный этими лучами и есть линейный угол двугранного угла: φ**

- **Величиной угла между плоскостями называется величина меньшего двугранного угла.**
- Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы уравнениями:

$$\alpha_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$$

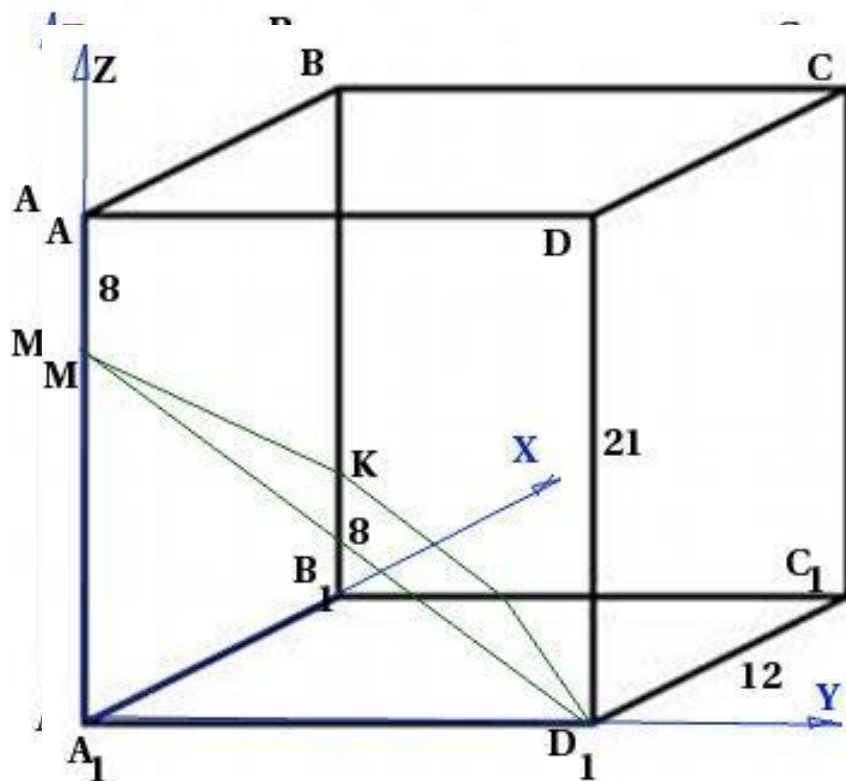
$$\alpha_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$$

- **Косинус угла между плоскостями находится по такой формуле:**

$$\cos \varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

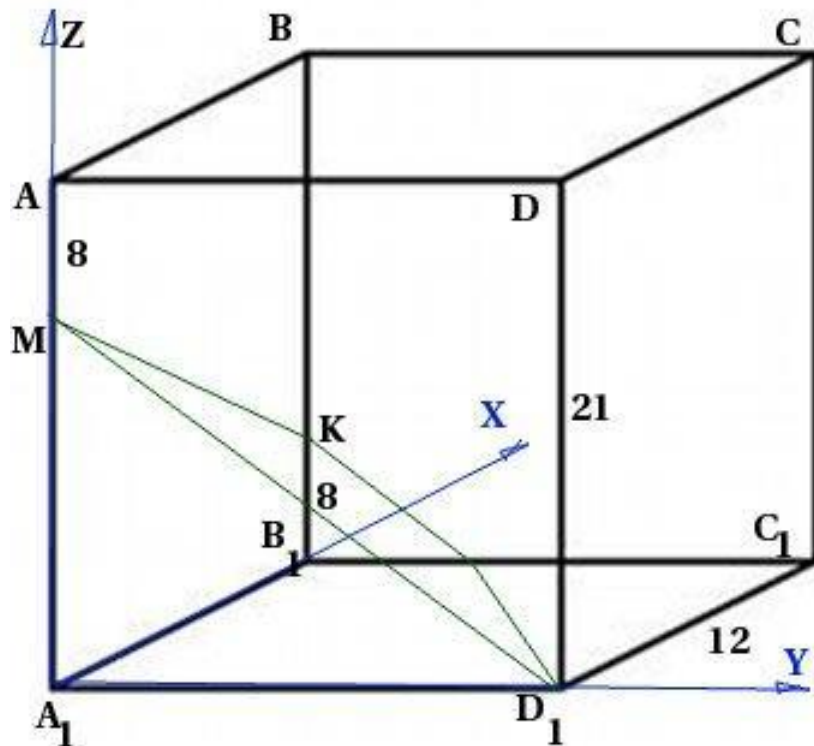
- В ответе мы записываем $|\cos \varphi|$, так как величиной угла между плоскостями называется величина **меньшего** двугранного угла.

Задача (ЕГЭ-2012).



- В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM=8$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K=8$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1 .

Решение.



D_1MK :

Запишем координаты точек: $M(0;0;13), K(12;0;8), D_1(0;12;0)$

Подставим их в систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \times A + 0 \times B + 13C + 1 = 0 \\ 12A + 0 \times B + 8C + 1 = 0 \\ 0 \times A + 12B + 0 \times C + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13C + 1 = 0 \\ 12A + 8C + 1 = 0 \\ 12B + 1 = 0 \end{cases}$$

Отсюда:

$$C = -1/13, B = -1/12, A = -5/(12 \times 13).$$

Подставим найденные коэффициенты в уравнение плоскости:

$$5x + 13y + 12z - 156 = 0$$

Аналогично, $C(12;12;21), C_1(12;12;0), D_1(0;12;0)$

$$\begin{cases} 12A + 12B + 1 = 0, \\ 12B + 1 = 0, \\ 12A + 12B + 21C + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} A = 0, \\ C = 0, \\ B = -\frac{1}{12}. \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{12}y + 1 = 0, \\ y - 12 = 0. \end{cases}$$

Подставим их в формулу для нахождения косинуса угла между плоскостями, и найдем угол:

$$\cos\varphi = \frac{5 \cdot 0 + 13 \cdot 1 + 12 \cdot 0}{\sqrt{5^2 + 13^2 + 12^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \varphi = 45^\circ$$

Задача (ЕГЭ, 2011). В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями $AD_1 E$ и $D_1 F C$, где точки E и F - середины ребер $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ соответственно.

Решение.

Введём прямоугольную систему координат. Тогда $A(0;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D_1(1;0;1)$, $E(0;0,5;1)$, $F(0,5;1;1)$.

1) Решая систему

$$\begin{cases} 0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C + D = 0, \\ A + C + D = 0, \\ 0,5B + C + D = 0, \end{cases}$$

составляем уравнение плоскости $(AD_1 E)$: $x + 2y - z = 0$.

2) плоскость CFD_1 :

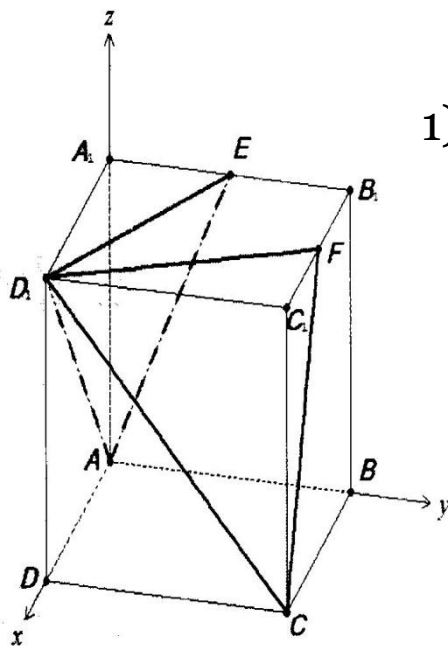
$$\begin{cases} A + C + D = 0, \\ 0,5A + B + C + D = 0, \\ A + B + D = 0 \end{cases}$$

отсюда находим уравнение $2x + y + z - 3 = 0$. Найдём искомый угол как угол между нормальными плоскостей.

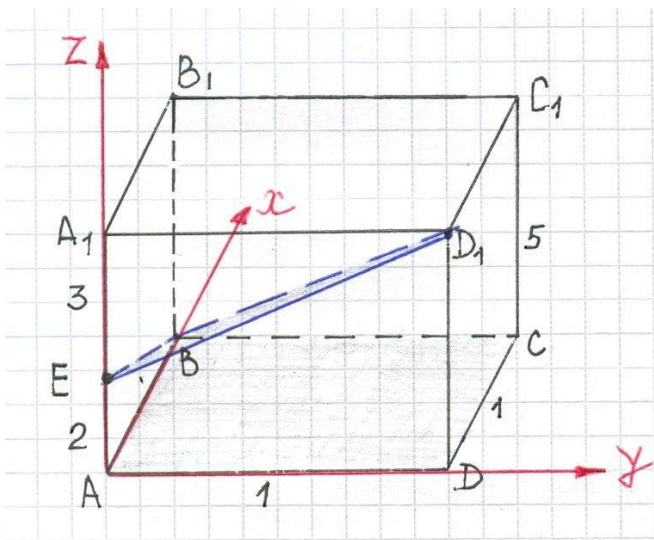
$$\vec{n} \{1; 2; -1\}, \vec{m} \{2; 1; 1\},$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{2 + 2 - 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

откуда $\varphi = 60^\circ$ **Ответ:** 60°



Задача (ДР_2013). В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=2:3$. Найдите угол между плоскостями ABC и $BE D_1$.



Решение. Введем прямоугольную систему координат. Тогда $B(1;0;0)$, $E(0;0;2)$, $D_1(0;1;5)$.

Решаем систему
$$\begin{cases} A+1=0, \\ 2C+1=0, \\ B+5C+1=0, \end{cases} \begin{cases} A=-1, \\ C=-0,5, \\ B=1,5. \end{cases}$$

Составляем уравнение плоскости $(BE D_1)$: $-x+1,5y-0,5z+1=0$, вектор нормали плоскости

$(BE D_1) \perp \vec{n}_1 \{-1;1,5;-0,5\}$

Вектор нормали плоскости $(ABC) \perp \vec{n}_2 \{0;0;5\}$

Найдем искомый угол как угол между нормальными плоскостей

$$\cos \varphi = \frac{|0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1,5 + 5 \cdot (-0,5)|}{\sqrt{0+0+5^2} \cdot \sqrt{1^2 + (1,5)^2 + (-0,5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{\sqrt{14}}$.

Задача. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Точка M – середина ребра AB , точка K – середина ребра DD_1 . Найти угол между плоскостями AKB_1 и KMC .

РЕШЕНИЕ. Введем прямоугольную систему координат, поместив начало координат в точку A . Составим уравнение плоскости AKB_1 . Точка $A(0;0;0)$ принадлежит этой плоскости, то $d=0$.

Подставим координаты точек $K(0;1;0,5)$ и $B_1(1;0;1)$ в уравнение плоскости, получим $b+c/2=0$, $a+c=0$.

Таким образом имеем $2x+y-2z=0$.

Составим уравнение плоскости KMC .

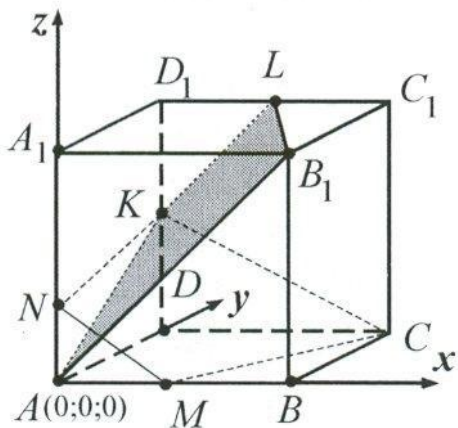
Подставим координаты точек $K(0;1;0,5)$ и $M(0,5;0;0)$, $C(1;1;0)$ в уравнение плоскости, получим систему:

$$\begin{cases} B + 0,5C + D = 0, \\ 0,5A + D = 0, \\ A + B + D = 0. \end{cases} \begin{cases} C = 2A, \\ B = -0,5A, \\ D = -0,5A. \end{cases} \quad \text{Уравнение плоскости (KMC) принимает вид}$$

$$2x - y + 4z = 1. \text{ Итак, } \vec{n}_1 \{2;1;-2\}, |\vec{n}_1| = 3, \vec{n}_2 \{2;-1;4\}, |\vec{n}_2| = \sqrt{21}$$

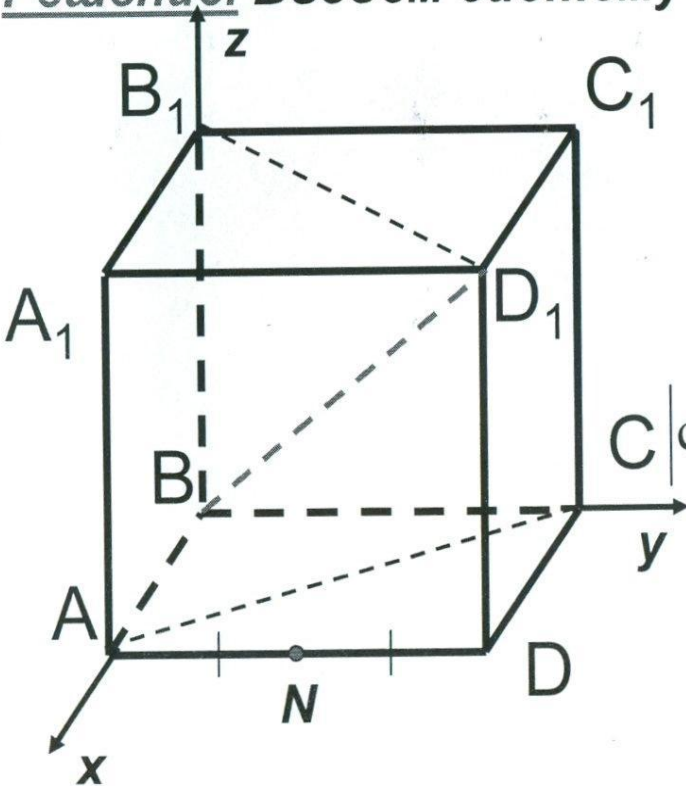
и угол между плоскостями AKB_1 и KMC находим из

$$\cos \varphi = \frac{|-5|}{3\sqrt{21}}, \varphi = \arccos \frac{5}{3\sqrt{21}}.$$



Задача 1. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{11}$. Найти тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1 , если расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 12.

Решение. Введем систему координат. $B(0;0;0)$, $A(5;0;0)$, $C(0;\sqrt{11};0)$, $D_1(5;\sqrt{11};12)$



Координаты нормали к плоскости сечения: $\overrightarrow{BD_1} \{5; \sqrt{11}; 12\}$

Координаты нормали к плоскости основания: $BB_1 \{0; 0; 12\}$

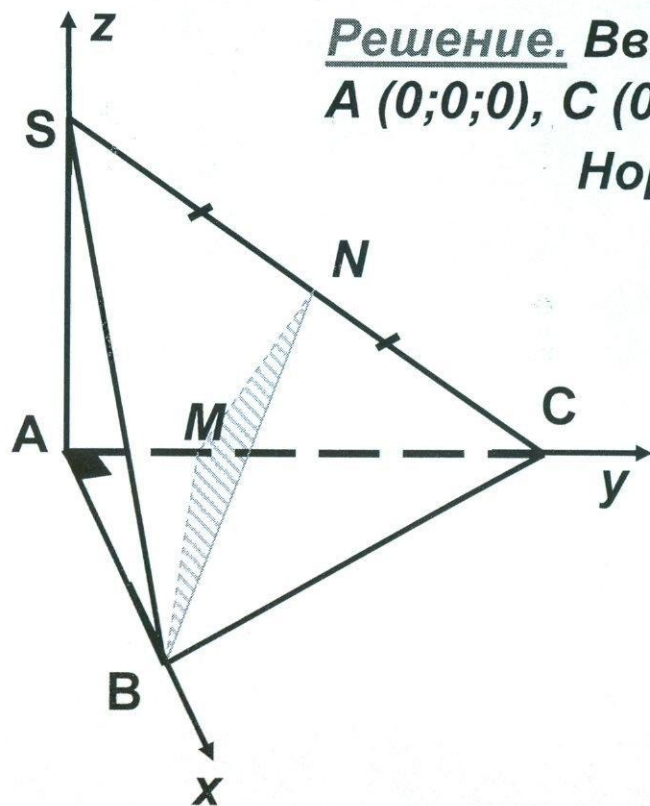
$$\cos \angle(\overrightarrow{BD_1}; \overrightarrow{BB_1}) = \frac{|0 \cdot 5 + 0 \cdot \sqrt{11} + 12 \cdot 12|}{\sqrt{25 + 11 + 144} \cdot \sqrt{144}} = \frac{12}{\sqrt{180}}$$

α – острый угол, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{180}{144} - 1} = 0,5$$

Ответ: 0,5.

Задача 2. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC . Угол A – прямой. $AC = 8$, $BC = 2\sqrt{19}$. Высота пирамиды SA равна 6. На ребре AC взята точка M так, что $AM = 2$. Через точку M , вершину B и точку N – середину ребра SC – проведена плоскость α . Найти двугранный угол, образованный плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.



Решение. Введем систему координат. Тогда $A(0;0;0)$, $C(0;8;0)$, $M(0;2;0)$, $N(0;4;3)$, $S(0;0;6)$, $B(\sqrt{12};0;0)$

Нормаль к плоскости (ABC) вектор

$$\vec{n}_1 = \vec{AS} \{0;0;6\}$$

Уравнение плоскости (BMN) :

$$\sqrt{3}x + 3y + 2z - 6 = 0$$

Нормаль к плоскости (BMN) $\vec{n}_2 \{ \sqrt{3}; 3; 2 \}$

$$\left| \cos \angle(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \left| \frac{12}{6 \cdot \sqrt{3+9+4}} \right| = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$$

Ответ: 60° .

Для самостоятельного решения

- **Задача (С2 ЕГЭ 2010).** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 6$. Найдите угол между плоскостями $CD_1 B_1$ и $AD_1 B_1$.
- **Задача (С2 ЕГЭ 2010).** Все ребра пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны между собой. Найдите угол между плоскостями SBM и SCD , где точка M - середина ребра CD . Ответ:
- **Задача.** В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями $AD_1 E$ и $D_1 FC$, где точки E и F - середины ребер $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ соответственно.
Ответ: 60° .
 $\arccos \sqrt{\frac{3}{11}}$
- **Задача.** В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между плоскостями ACB_1 и $BA_1 C_1$.
- **Задача.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания равна a , боковое ребро равно 10. Найти угол между плоскостями ABC и ASM , где точка M делит ребро BS так, что $BM : MS = 2 : 1$.

ИСТОЧНИКИ:

- <http://ege-ok.ru/>
- <http://nsportal.ru/>