ЕГЭ-2013. Задачи типа С2

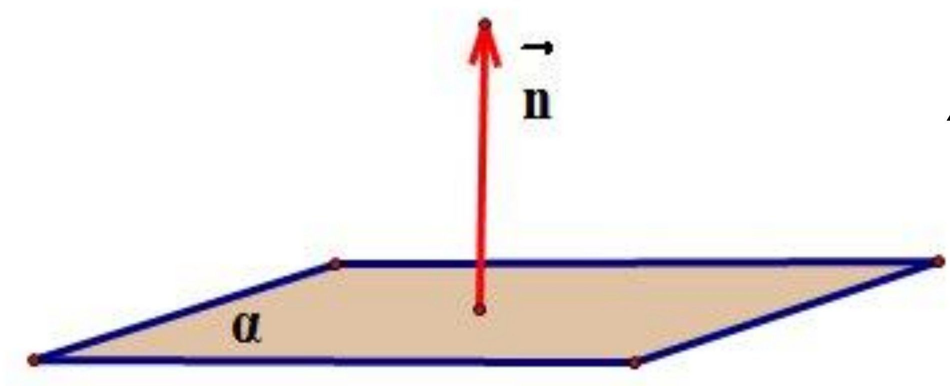
Задание С2 ЕГЭ. Угол между плоскостями. Координатный метод решения стереометрических задач типа С2.

Разработка учителя ГБОУ СОШ№618 Макаровой Т.П.

$\vec{n}$

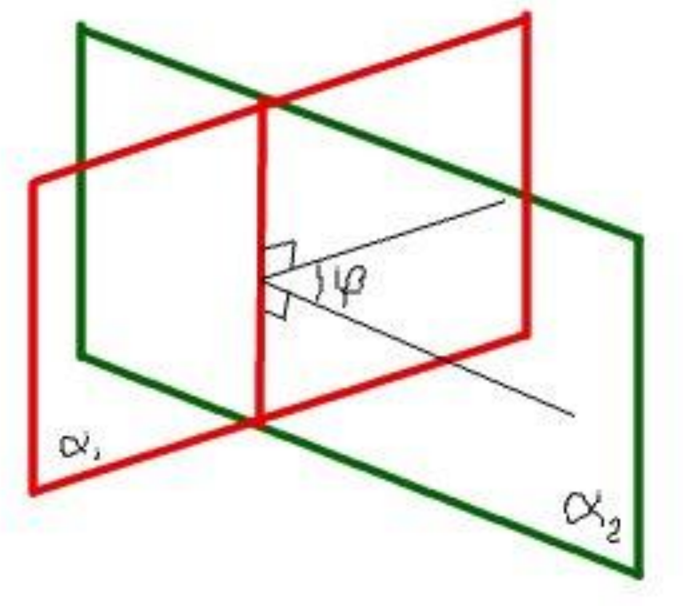
1. Уравнение плоскости имеет вид *ax+by+cz+d=0*

- **В этом уравнении плоскости коэффициенты – координаты вектора нормали к плоскости** (то есть вектора, перпендикулярного плоскости).



$$\vec{n}(a, b, c)$$

Угол между плоскостями



Величина двугранного угла измеряется величиной соответствующего линейного угла. Чтобы построить **линейный угол двугранного угла**, нужно взять на линии пересечения плоскостей произвольную точку, и в каждой плоскости провести к этой точке луч перпендикулярно линии пересечения плоскостей. **Угол, образованный этими лучами и есть линейный угол двугранного угла:** φ

- **Величиной угла между плоскостями называется величина меньшего двугранного угла.**
- Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы уравнениями:

$$\alpha_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d = 0$$

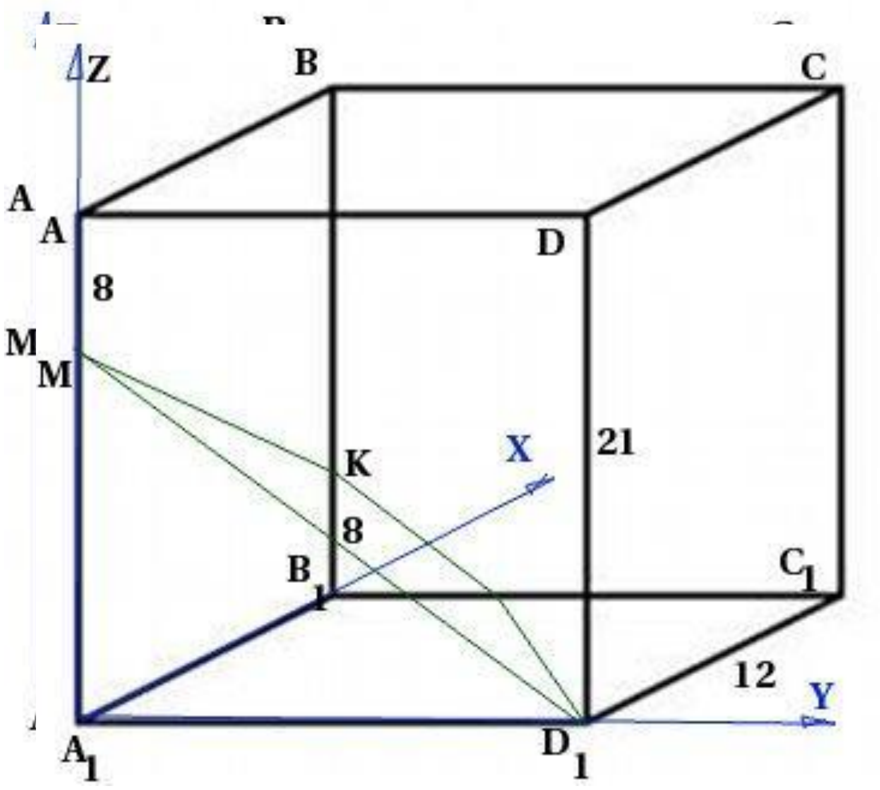
$$\alpha_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d = 0$$

- **Косинус угла между плоскостями находится по такой формуле:**

$$\cos\varphi = \frac{\left|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- В ответе мы записываем $\left|\cos\varphi\right|$, так как величиной угла между плоскостями называется величина **меньшего** двугранного угла.

Задача (ЕГЭ-2012).

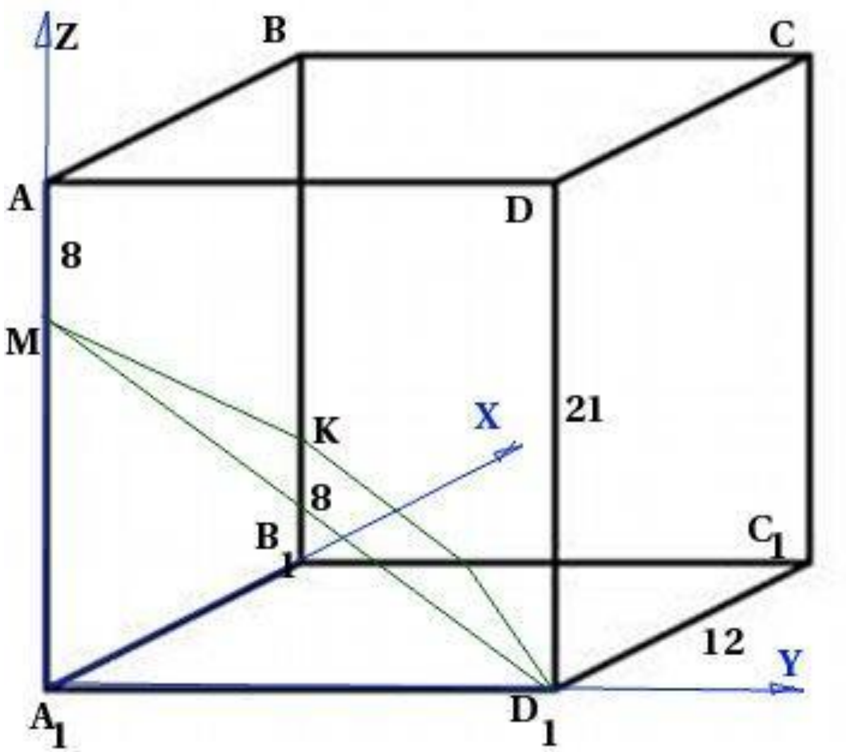


- В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, что AM=8 . На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 8$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1 .

Решение.

D_1MK :

Запишем координаты точек: М (0;0;13),К(12;0;8), $D_1(0;12;0)$



Подставим их в систему уравнений:

$$\begin{cases} 0\times A+0\times B+13C+1=0 \\ 12A+0\times B+8C+1=0 \\ 0\times A+12B+0\times C+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13C+1=0 \\ 12A+8C+1=0 \\ 12B+1=0 \end{cases}$$

Отсюда:

C= -1/13, B= -1/12, A= -5/(12x13).

Подставим найденные коэффициенты в уравнение плоскости:

$$5x+13y+12z-156=0$$

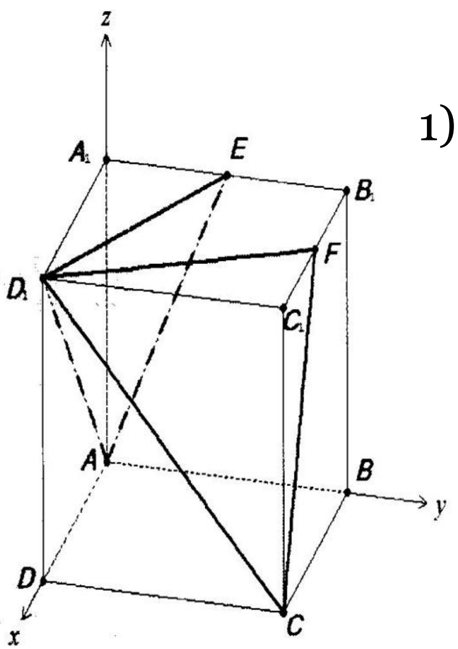
$$Аналогично, C(12;12;21), C_1(12;12;0), D_1(0;12;0)$$

$$\begin{cases} 12A+12B+1=0, \\ 12B+1=0, \\ 12A+12B+21C+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=0, \\ C=0, \\ B=-\dfrac{1}{12}. \end{cases} \quad \frac{-1}{12}y+1=0,\ y-12=0.$$

Подставим их в формулу для нахождения косинуса угла между плоскостями, и найдем угол:

$$cos\varphi = \frac{5\cdot 0+13\cdot 1+12\cdot 0}{\sqrt{5^2+13^2+12^2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \varphi = 45^0$$

Задача (ЕГЭ,2011). В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F-середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.



Решение.

Введём прямоугольную систему координат. Тогда A (0;0;0), C(1;1;0), D_1(1;0;1), E(0;0,5;1), F(0,5;1;1).

1)Решая систему
$$\begin{cases} 0\cdot A+0\cdot B+0\cdot C+D=0, \\ A+C+D=0, \\ 0{,}5B+C+D=0, \end{cases}$$

составляем уравнение плоскости *(AD_1E): $x+2y-z=0$.*

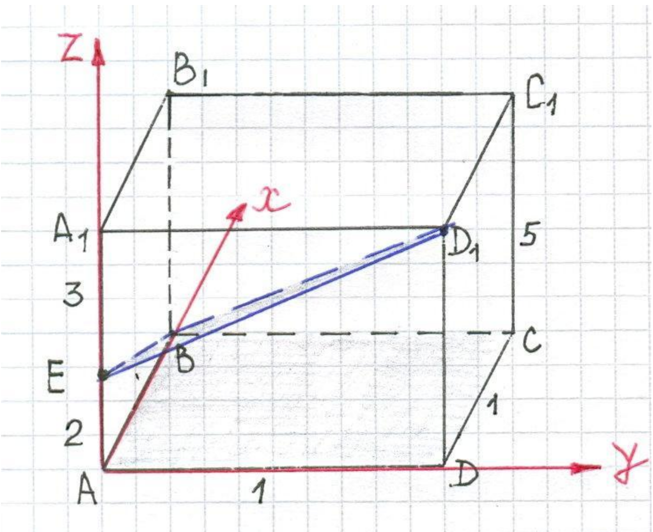
2) плоскость CFD_1:
$$\begin{cases} A+C+D=0, \\ 0{,}5A+B+C+D=0, \\ A+B+D=0 \end{cases}$$

отсюда находим уравнение *$2x+y+z-3=0$*. Найдём искомый угол как угол между нормалями плоскостей.

$\vec{n}\{1;2;-1\}$, $\vec{m}\{2;1;1\}$,
$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{2+2-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

откуда φ=60˚ **Ответ:** 60˚

Задача (ДР_2013). В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=2:3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.



Решение. Введем прямоугольную систему координат. Тогда B(1;0;0), E(0;0;2), D_1 (0;1;5).

Решаем систему

$$\begin{cases} A+1=0, \\ 2C+1=0, \\ B+5C+1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1, \\ C=-0{,}5; \\ B=1{,}5. \end{cases}$$

Составляем уравнение плоскости (BED_1): $-x+1{,}5y-0{,}5z+1=0$, вектор нормали плоскости (BED_1) $\vec{n}_1\{-1;1{,}5;-0{,}5\}$

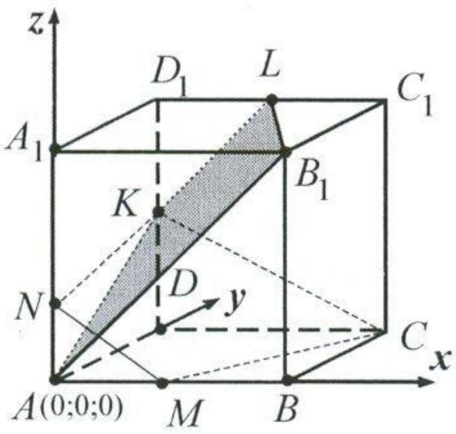
Вектор нормали плоскости (ABC) $\vec{AA_1}=\vec{n}_2\{0;0;5\}$

Найдем искомый угол как угол между нормалями плоскостей

$$\cos\varphi=\frac{|0\cdot(-1)+0\cdot 1{,}5+5\cdot(-0{,}5)|}{\sqrt{0+0+5^2}\cdot\sqrt{1^2+(1{,}5)^2+(-0{,}5)^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}},\ \varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{14}}.$

Задача. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка М-середина ребра АВ, точка К – середина ребра DD_1. Найти угол между плоскостями AKB_1 и КМС.



РЕШЕНИЕ. Введем прямоугольную систему координат, поместив начало координат в точку А. Составим уравнение плоскости AKB_1. Точка А (0;0;0) принадлежит этой плоскости, то d=0.

Подставим координаты точек К(0;1; 0,5) и B_1 (1;0;1) в уравнение плоскости, получим $b+c/2=0$, $a+c=0$.

Таким образом имеем $2x+y - 2z=0$.

Составим уравнение плоскости КМС.

Подставим координаты точек К(0;1; 0,5) и М (0,5;0;0), С(1;1;0) в уравнение плоскости, получим систему:

$$\begin{cases} B+0{,}5C+D=0, \\ 0/5A+D=0, \\ A+B+D=0. \end{cases} \begin{cases} C=2A, \\ B=-0{,}5A, \\ D=-0{,}5A. \end{cases}$$

Уравнение плоскости (КМС) принимает вид

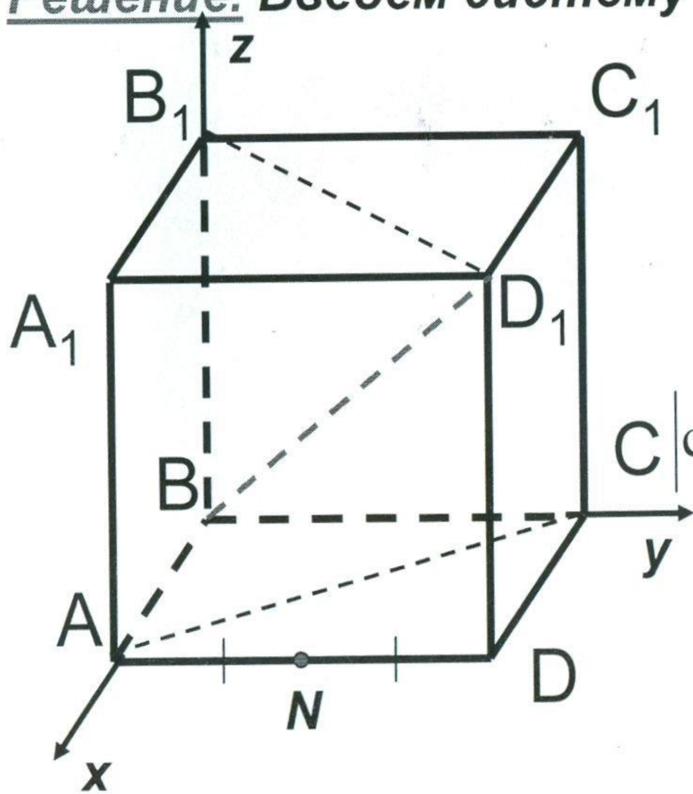
$2x - y + 4z=1$. Итак, $\overset{\sqcup}{n_1}\{2;1;-2\}, |\overset{\sqcup}{n_1}|=3, \overset{\sqcup}{n_2}\{2;-1;4\}, |\overset{\sqcup}{n_2}|=\sqrt{21}$

и угол между плоскостями ABK_1 и КМС находим из

$$cos\varphi=\frac{|-5|}{3\sqrt{21}}, \varphi=\arccos\frac{5}{3\sqrt{21}}.$$

Задача 1. **Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{11}$. Найти тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 12.**

Решение. **Введем систему координат. $B(0;0;0)$, $A(5;0;0)$, $C(0;\sqrt{11};0)$, $D_1(5;\sqrt{11};12)$**



Координаты нормали к плоскости сечения: $\overrightarrow{BD_1}\{5;\sqrt{11};12\}$

Координаты нормали к плоскости основания: $\overrightarrow{BB_1}\{0;0;12\}$

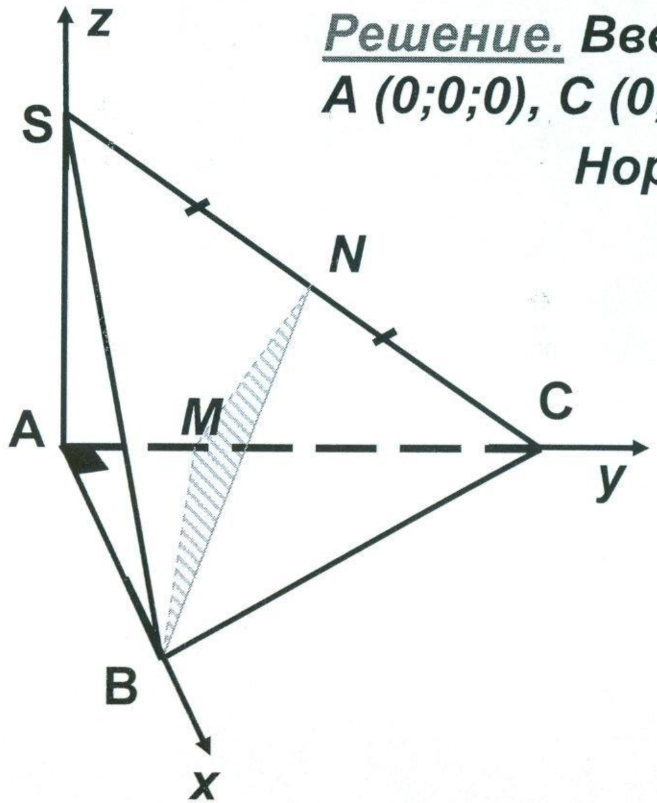
$$\left|\cos\angle\left(\overrightarrow{BD_1};\overrightarrow{BB_1}\right)\right| = \left|\frac{0\cdot 5 + 0\cdot\sqrt{11} + 12\cdot 12}{\sqrt{25+11+144}\cdot\sqrt{144}}\right| = \frac{12}{\sqrt{180}}$$

α **– острый угол, то**

$$tg\alpha = \sqrt{\frac{180}{144} - 1} = 0,5$$

Ответ: **0,5.**

Задача 2. В основании треугольной пирамиды SABC лежит прямоугольный треугольник ABC. Угол A – прямой. AC = 8, BC = $2\sqrt{19}$. Высота пирамиды SA равна 6. На ребре AC взята точка M так, что AM = 2. Через точку M, вершину B и точку N – середину ребра SC – проведена плоскость α. Найти двугранный угол, образованный плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.



Решение. Введем систему координат. Тогда A (0;0;0), C (0;8;0), M (0;2;0), N (0;4;3), S (0;0;6), $B\left(\sqrt{12};0;0\right)$

Нормаль к плоскости (ABC) вектор

$$\vec{n_1} = \overrightarrow{AS} \quad \{0;0;6\}$$

Уравнение плоскости (BMN):

$$\sqrt{3}x + 3y + 2z - 6 = 0$$

Нормаль к плоскости (BMN) $\vec{n_2} \quad \left\{\sqrt{3};3;2\right\}$

$$\left|\cos\angle\left(\vec{n_1};\vec{n_2}\right)\right| = \left|\frac{12}{6\cdot\sqrt{3+9+4}}\right| = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$$

Ответ: 60°.

Для самостоятельного решения

- **Задача (С2 ЕГЭ 2010)**. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра AB = 8 , AD = 6 , CC_1 =6 . Найдите угол меду плоскостями CD_1 B_1 и AD_1B_1 .
- **Задача (С2 ЕГЭ 2010).** Все ребра пирамиды SABCD с вершиной S равны между собой. Найдите угол между плоскостями SBM и SCD , где точка M - середина ребра CD . Ответ:

- **Задача.** В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F-середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.
  Ответ: 60^0. $\arccos\sqrt{\frac{3}{11}}$
- **Задача.** В правильной треугольной призме *ABCA1B1C1*, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между плоскостями *ACB1* и *BA1C1*.
- **Задача.** В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* с основанием *ABCD* сторона основания равна , *a* боковое ребро равно 10. Найти угол между плоскостями *ABC* и *ACM*, где точка *M* делит ребро *BS* так, что *BM* : *MS* = 2 : 1.

Источники:

- http://ege-ok.ru/
- http://nsportal.ru/