



ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

Задачи на совместную работу

Задачи на работу решаются с помощью одной-единственной формулы:

$$A = p \cdot t$$

A — работа,
t — время,
P - производительность

Правила решения задач на работу

- 1. $A = p \cdot t$, из этой формулы легко найти t или p .
- 2. Если объем работы не важен в задаче и нет никаких данных, позволяющих его найти — работа принимается за единицу. Построен дом (один), покрашен забор (один), наполнен резервуар. А вот если речь идет о количестве кирпичей, количестве деталей, литрах воды — работа как раз и равна этому количеству.
- 3. Если трудятся двое рабочих (два экскаватора, два мастера, Даша и Маша...) или трое (не важно) — их производительности складываются. Очень логичное правило.
- 4. В качестве переменной x удобно взять (в абсолютном большинстве задач) именно производительность.

Задача 1

- Заказ на 240 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?

	p	t	A
1 рабочий	$x + 1$	$t_1 = \frac{240}{x + 1}$	240
2 рабочий	x	$t_2 = \frac{240}{x}$	240

Первый рабочий выполнил заказ на час быстрее.
Следовательно, времени он затрачивает на 1 час
меньше, чем второй, то есть t_1 на 1 меньше, чем t_2 ,
значит

$$t_1 = t_2 - 1$$
$$\frac{240}{x+1} = \frac{240}{x} - 1$$

Очевидно, производительность
рабочего не может быть
отрицательной величиной. Значит,
отрицательный корень не подходит.

$$\frac{240}{x+1} = \frac{240}{x} - 1 \quad | \cdot x(x+1)$$
$$240x = 240(x+1) - x(x+1)$$
$$240x + x^2 + x - 240x - 240 = 0$$
$$x^2 + x - 240 = 0$$
$$D = 961 \quad x_1 = 15 \quad x_2 = -16$$

Ответ: 15

Задача 2

- На изготовление 40 деталей первый рабочий затрачивает на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 70 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

	p	t	A
1 рабочий	$x + 3$	$\frac{40}{x + 3}$	40
2 рабочий	x	$\frac{70}{x}$	70

- Сравнение будем проводить по времени. Сказано, что первый затрачивает на 6 часов меньше, чем второй. Значит:

$$\frac{40}{x+3} = \frac{70}{x} - 6 \quad | \cdot x(x+3)$$

$$40x = 70(x+3) - 6x(x+3)$$

$$6x^2 - 12x - 210 = 0$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$D = 144 \quad x_1 = 7 \quad x_2 = -5$$

Ответ: 7

Задача 3

- Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 192 литра она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

	p	t	A
1 труба	x	$\frac{192}{x}$	192
2 труба	$x + 4$	$\frac{192}{x + 4}$	192

- Первая труба заполняет резервуар на 4 минуты дольше, чем вторая. То есть времени уходит больше

$$\frac{192}{x} \text{ больше, чем } \frac{192}{x+4} \text{ на } 4$$

$$\frac{192}{x} = \frac{192}{x+4} + 4 \quad | \cdot x(x+4)$$

$$192(x+4) = 192x + 4x(x+4)$$

$$192x + 4 \cdot 192 = 192x + 4x^2 + 16x = 0$$

$$4x^2 + 16x - 4 \cdot 192 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{4}$$

$$x^2 + 4x - 192 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-192) = 16 + 768 = 784$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{784}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 28}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{784}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 28}{2} = -16$$

Ответ: 12

Задача 4

- Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 19 часов. Через 1 час после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Сразу отметим, что производительность каждого рабочего $\frac{1}{19}$ (заказа в час). Заказ это работа, она равна 1.

	p	t	A
1 рабочий	$\frac{1}{19}$	$x + 1$	$\frac{x + 1}{19}$
2 рабочий	$\frac{1}{19}$	x	$\frac{x}{19}$

- Сумма сделанных ими объёмов работы составляет всю работу, равную 1.

Совместно рабочие работали 9 часов.

Значит, на весь заказ ушло $9 + 1 = 10$ часов.

Ответ: 10

Задача 5

- Один мастер может выполнить заказ за 36 часов, а другой — за 12 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

Пусть x это время, за которое мастера выполнят работу вместе.
Производительность первого $1/36$ (заказа в час),
второго $1/12$ (заказа в час), этот вывод мы сделали из условия задачи.

- При совместной работе
производительности складываются:

$$\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\right)x = 1$$

$$x = 9$$

Ответ: 9

Задача 6

- В помощь садовому насосу, перекачивающему 9 литров воды за 4 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 6 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 30 литров воды?

Сразу, исходя из условия, можно определить производительности насосов: у первого $9/4$ (литра в минуту), у второго $9/6$ (литра в минуту).

Пусть совместно они будут работать x минут.

$$\text{Тогда } \left(\frac{9}{4} + \frac{9}{6} \right) x = 30$$

$$x = 8$$

Ответ: 8

Задача 7

- Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 12 вопросов теста, а Ваня — на 20. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 90 минут. Сколько вопросов содержит тест?

В данной задаче производительности даны:
у Пети 12 (вопросов в час), у Вани 20.

Количество вопросов это и есть работа, принимаем за её за x .

	p	t	A
Петя	12	$\frac{x}{12}$	x
Ваня	20	$\frac{x}{20}$	x

- Петя закончил свой тест на 90 минут позже Вани, то есть Петя затратил больше времени.
- Не забываем перевести минуты в часы: 90 минут это 1,5 часа.

$\frac{x}{12}$ больше, чем $\frac{x}{20}$ на 1,5

$$\frac{x}{12} = \frac{x}{20} + 1,5$$

$$x = 45$$

Ответ:45

Задача 8

- Через одну трубу бассейн наполняется за 7 часов, а через другую опустошается за 8 часов. За какое время бассейн будет наполнен, если открыть обе трубы?

	p	t	A
1 труба	$\frac{1}{7}$	7	1
2 труба	$\frac{1}{8}$	8	1
Вместе	?	?	1

- Сначала найдем производительность труда совместной работы обеих труб за один час. Поскольку одна труба бассейн наполняет, а другая — опустошает, производительность совместной работы равна разности производительности первой и второй труб:

$$1) \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{8 - 7}{56} = \frac{1}{56}$$

Теперь найдем время, за которое бассейн будет наполнен при открытии обеих труб одновременно. Чтобы найти время работы, надо объем работы разделить на производительность труда:

$$2) 1 : \frac{1}{56} = 1 \cdot \frac{56}{1} = 56$$

Ответ: 56