



ПОГРЕШНОСТИ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

**Кафедра Информационных технологий и
управляющих систем**

**Предмет «Вычислительные методы и их
применение в ЭВМ»**

Лекция

Доцент Стрельцова Г. А.



Введение

При выполнении массовых вычислений важно придерживаться определенных простых правил, выработанных практикой, которые позволяют экономить труд вычислителя и рационально использовать вычислительную технику. Одно из таких правил – разработка подробной вычислительной схемы.



Повестка дня

- Список изучаемых разделов:
- **Приближенные числа и правила приближений.**
- **Погрешности арифметических операций.**
- **Основные свойства решений.**
- Время, отводимое на каждый раздел: 5-10 минут.



Обзор

Разделы лекции

**Приближенные числа
и правила
приближений**

**Погрешности
арифметических
операций**

**Основные свойства
решений**



Словарь терминов

Приближенным числом a^* называется число, отличающееся от точного a и заменяющее последнее в вычислениях. Если известно, что $a^* < a$, то a^* называют приближенным значением числа a по недостатку; если же $a^* > a$, то - по избытку.



Приближенные числа и правила приближений

Значащими цифрами числа a^* называются все цифры его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Значащую цифру числа a^* называют **верной**, если абсолютная погрешность числа не превышает единицу разряда, соответствующего этой цифре.

Пример: $\Delta \square (a^*) = 0,000002$, $a^* = 0,0\underline{103000}$ – 4 верных цифры.



Приближенные числа и правила приближений

Округление числа – замена его другим числом с меньшим числом значащих цифр.

Погрешность такой замены называется погрешностью округления.

Виды округления:

- **Усечение** – отбрасывание всех цифр, расположенных слева от значащей цифры. Абсолютная погрешность не превышает единицы разряда.
- **Округление по дополнению** – при разряде, меньшим 5, остается та же цифра, при большем или равном 5 добавляется 1. Абсолютная погрешность не превышает $\frac{1}{2}$ разряда последней оставляемой цифре.

Границы погрешностей всегда округляют в сторону увеличения.



Приближенные числа и правила приближений

Относительная погрешность (%) чисел с n верными знаками.

Начало таблицы.

Первые значащие цифры	$n=2$	$n=3$	$n=4$
10-11	10	1	0,1
12-13	8,3	0,83	0,083
14,...,16	7,1	0,71	0,071
17,...,19	5,9	0,59	0,059
20,...,22	5	0,5	0,05
23,...,26	4,3	0,43	0,043
26,...,29	3,8	0,38	0,038
30,...,34	3,3	0,33	0,033



Приближенные числа и правила приближений

Относительная погрешность (%) чисел с n верными знаками.

Окончание таблицы.

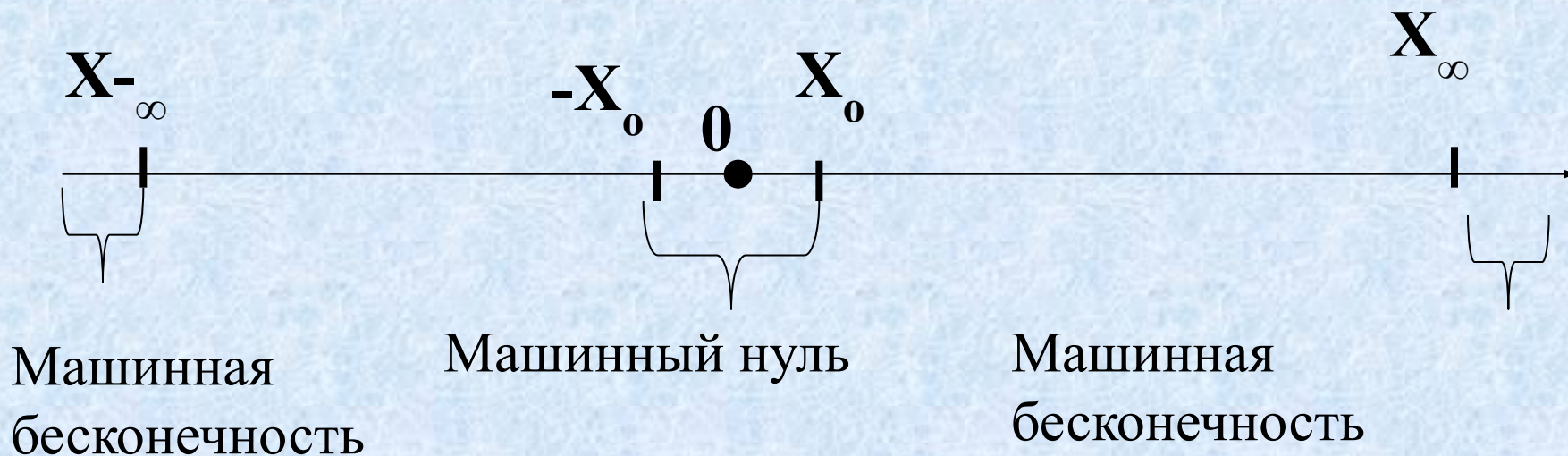
Первые значащие цифры	$n=2$	$n=3$	$n=4$
35,...,39	2,9	0,29	0,029
40,...,44	2,5	0,25	0,025
45,...,49	2,2	0,22	0,022
50,...,59	2	0,2	0,02
60,...,69	1,7	0,17	0,017
70,...,79	1,4	0,14	0,014
80,...,89	1,2	0,12	0,012
90,...,99	1,1	0,11	0,011
Пример: 0,00354	35,...,39	3	$\delta = 0,29\%$



Приближенные числа и правила приближений

Для двоичных чисел существуют понятия:

- Машинный нуль.
- Машинная бесконечность.
- Переполнение.
- Исчезновение порядка.





Приближенные числа и правила приближений

Числа, большие по модулю, чем X_{∞} , рассматриваются, как машинная бесконечность, и попытка получить такое число приводит к аварийному останову по переполнению. Числа, меньшие по модулю, чем X_0 представляются машинным нулем. При получении таких чисел возможно исчезновение порядка (или антипереполнение).

Для двоичных чисел при потери точности вычислений используют так называемую **удвоенную точность.**



Приближенные числа и правила приближений

Пример: Имеется гипотетическая машина с 6 двоичными разрядами мантиссы, в которой округление происходит только по дополнению.

Выполнить арифметические действия для двух чисел в двоичном коде:

$$a=20.5D=10100.1B; b=1.75D=1.11B$$

$$a+b=22.25D; \quad a*b=35,785D$$

$$a+b=10100.1+1.11=101101.01B \approx 10110.1B =22.5D$$

$$a*b=10100.1*1.11=1100011.111B \approx 100100.1B =36D$$



Приближенные числа и правила приближений

Проверка точности вычислений проводится по так называемому машинному эпсилону ε_M . Машинный эпсилон ε_M – это минимальное из представленных чисел ε , для которых $1 \oplus \varepsilon_M > 1$

Алгоритм проверки (вставка в фрагмент программы):

1. Задается шаг $\varepsilon^{(0)}=1$, проводится вычисление,
2. Задается шаг $\varepsilon^{(1)}=0.5 \varepsilon^{(0)}$ проводится вычисление и проверяется неравенство $1 \oplus \varepsilon > 1$

.....

- n. Задается шаг $\varepsilon^{(n)}=0.5 \varepsilon^{(n-1)}$ проводится вычисление и проверяется неравенство $1 \oplus \varepsilon > 1$

Если неравенство выполняется, то принимается $\varepsilon_M = \varepsilon^{(n-1)}$ и переходят к следующему этапу вычислений.



Приближенные числа и правила приближений

В представленном примере $\varepsilon_M = 0.000001$,
т. к. $1 + \varepsilon_M = 1.000001$, тогда $1 \oplus \varepsilon_M = 1.000001$

Если же к 1 добавить любое положительное
число $\varepsilon < \varepsilon_M$, то в седьмом разряде
результата будет стоять нуль, и после
округления получается:

$$1 \oplus \varepsilon = 1$$



Приближенные числа и правила приближений

В современной мировой практике используется ошибка вычислений приближенного числа:

$$\text{Error} = |a - a^*| / (1 + a)$$

$$\text{Error} \rightarrow \Delta(a^*) \text{ при } |a| \ll 1$$

$$\text{Error} \rightarrow \delta(a^*) \text{ при } |a| \gg 1$$



Погрешности арифметических операций

Погрешности суммы и разности:

$$\Delta (a^* \pm b^*) \leq \Delta (a^*) + \Delta (b^*)$$

$$\delta (a^* + b^*) \leq \delta_{\max} ; \delta (a^* - b^*) \leq v^* \delta_{\max}$$

$$\delta_{\max} = \max\{\delta (a^*), \delta (b^*)\}, v = |a+b|/|a-b|$$

Относительные погрешности произведения и частного:

$$\Delta (a^* \cdot b^*) \leq \Delta (a^*) + \Delta (b^*)$$

$$\delta (a^* \cdot b^*) \leq \delta (a^*) + \delta (b^*) + \delta (a^*) * \delta (b^*)$$

$$\delta (a^* / b^*) \leq (\delta (a^*) + \delta (b^*)) / (1 - \delta (b^*))$$

Границы относительных погрешностей:

$$\square \delta \square (a^* \cdot b^*) \approx \delta \square (a^*) + \delta \square (b^*) \approx \delta \square (a^* / b^*)$$



Основные свойства решений

Корректность вычислительной задачи.

Это выполнение условий: 1) ее решение y , принадлежащих Y , существует при всех входных x , принадлежащих X . 2) это решение единственное 3) решение устойчиво по отношению к малым возмущениям входных величин.

Единственность вычислительной задачи. Задача должна иметь единственное решение.

Устойчивость вычислительной задачи. Задача устойчива по входным данным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что всякому исходному x^* при котором $\Delta(x^*) < \delta$, соответствует y^* , для которого $\Delta(y^*) < \varepsilon$.

Т. е. решение y зависит от входного x непрерывным образом.

Относительная устойчивость решения – замена Δ на δ .



ВЫВОДЫ

Рассмотренные вопросы

- **Приближенные числа и правила приближений.**
- **Погрешности арифметических операций.**
- **Основные свойства решений.**

Практические работы

1. **Примеры вычислений.**