



Погрешности при решении задач

Пусть a - точное (истинное) числовое значение некоторой величины, а \bar{a} - её приближённое значение, тогда число

$$\Delta(\bar{a}) = |a - \bar{a}|$$

называют истинной абсолютной погрешностью приближённого числа \bar{a} .

Если точное значение a неизвестно; то работаем с величиной

$$\Delta(\bar{a}) \geq |a - \bar{a}|$$

которая называется предельной абсолютной погрешностью числа \bar{a} (или просто абсолютной погрешностью).

Число

$$\delta(\bar{a}) = \left| \frac{a - \bar{a}}{\bar{a}} \right|$$

называется относительной погрешностью приближённого числа \bar{a} .

Если точное значение величины неизвестно, а истинная абсолютная погрешность Δ мала по сравнению с $|\bar{a}|$, то используем формулу: $\delta \approx \frac{\Delta}{|\bar{a}|}$.

В записи приближённых чисел абсолютная и относительная погрешности указываются так:

$$x = \bar{x} \pm \Delta; \quad x = \bar{x} \cdot (1 \pm \delta).$$

При сложении и вычитании абсолютные погрешности складываются, а при делении и умножении складываются относительные погрешности.

Вычислить приближённое число с точностью $\varepsilon = 10^{-n}$ означает, что необходимо сохранить верной значащую цифру, стоящую на n -м разряде после запятой.

Задача:

1) Число $14,75$ найдено с относительной погрешностью $0,5\%$. Найти абсолютную погрешность округления.

Обозначим:

a - точное число (неизвестно),

$\bar{a} = 14,75$ - приближённое число,

$\delta = 0,005$ - относительная погрешность приближённого числа \bar{a} ,

Δ - абсолютная погрешность округления (истинная).

Погрешность мала, поэтому используем формулу

$$\delta \approx \frac{\Delta}{|a|}$$

$$0,005 \approx \frac{\Delta}{14,75}$$

$$\Delta \approx 0,005 \cdot 14,75 = 0,07375$$

Ответ: $\Delta \approx 0,07375$.

Задача:

2) Найти абсолютные и относительные погрешности числа $e = 2,71828182\dots$, заданного двумя и тремя цифрами после запятой (без округления!).

а)

Число $x = e$ задано двумя цифрами после запятой: $\bar{x} = 2,71$.

Абсолютная погрешность: $|x - \bar{x}| = |e - 2,71| \leq 0,009 = \Delta$,

$$e = \bar{x} \pm \Delta = 2,71 \pm 0,009$$

Относительная погрешность: $\delta = \frac{\Delta}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0,009}{2,71} \cdot 100\% \approx 0,332\%$

$$e = 2,71 (100 \pm 0,332\%)$$

или в долях

$$e = 2,71 (1 \pm 0,00332)$$

б)

Число $x = e$ задано тремя цифрами после запятой: $\bar{x} = 2,718$.

Абсолютная погрешность: $|x - \bar{x}| = |e - 2,718| \leq 0,0003 = \Delta$,

$$e = \bar{x} \pm \Delta = 2,718 \pm 0,0003$$

Относительная погрешность: $\delta = \frac{\Delta}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0,0003}{2,718} \cdot 100\% \approx 0,011\%$

$$e = 2,718 (100 \pm 0,011\%)$$

или в долях

$$e = 2,718 (1 \pm 0,00011)$$

Правила оценки предельных погрешностей при выполнении операций над приближенными числами.

При сложении или вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются.

Относительная погрешность суммы заключена между наибольшим и наименьшим значениями относительных погрешностей слагаемых; на практике принимается наибольшее значение.

При умножении или делении чисел друг на друга их относительные погрешности складываются.

При возведении в степень приближенного числа его относительная погрешность умножается на показатель степени.

Для случая двух приближенных чисел a и b эти правила можно записать в виде формул:

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b, \quad \delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b$$

$$\delta(a / b) = \delta a + \delta b, \quad \delta(a^k) = k \cdot \delta a$$

Задача:

5) Стороны прямоугольника $a = 3,3$ см, $b = 5,2$ см измерены с абсолютной погрешностью

$\Delta(\bar{a}) = \Delta(\bar{b}) = 0,1$ см. Найти:

- а) абсолютную погрешность периметра и площади прямоугольника;
- б) относительную погрешность периметра и определить пределы изменения относительной погрешности периметра.

Периметр прямоугольника и его площадь вычисляются приближённо, т.к. его стороны измерены с некоторой погрешностью:

$$\bar{p} = 2 \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = 2 \cdot (3,3 + 5,2) = 17,0 \text{ (см)}$$

$$\bar{S} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 3,3 \cdot 5,2 = 17,16 \text{ (см}^2\text{)}$$

(черта сверху символа означает, что это величина приближённая)

Абсолютная погрешность вычисления периметра равна

$$\Delta(\bar{p}) = 2 \cdot (0,1 + 0,1) = 0,4 \text{ (см)}$$

Теперь вычислим относительные погрешности сторон:

$$\delta(\bar{a}) = \frac{0,1}{3,3} \approx 0,030 \text{ (в долях)}$$

$$\delta(\bar{b}) = \frac{0,1}{5,2} \approx 0,019 \text{ (в долях)}$$

Относительная погрешность вычисления площади прямоугольника

$$\delta(\bar{S}) = \delta(\bar{a}) + \delta(\bar{b}) = \frac{0,1}{3,3} + \frac{0,1}{5,2} \approx 0,050 \text{ (в долях)} = 5 \text{ (\%)}$$

тогда абсолютная погрешность

$$\Delta(\bar{S}) = \bar{S} \cdot \delta(\bar{S}) = 17,16 \cdot 0,050 = 0,858 \text{ (см}^2\text{)}$$