Погрешности при решении задач

Пусть a - точное (истинное) числовое значение некоторой величины, а $\overline{a}$ - её приближённое значение, тогда число

$$\Delta(\overline{a}) = \left| a - \overline{a} \right|$$

называют истинной абсолютной погрешностью приближённого числа $\overline{a}$.

Если точное значение a неизвестно; то работаем с величиной

$$\Delta(\overline{a}) \geq \left| a - \overline{a} \right|$$

которая называется предельной абсолютной погрешностью числа $\overline{a}$ (или просто абсолютной погрешностью).

Число

$$\delta(\overline{a}) = \left| \frac{a - \overline{a}}{a} \right|$$

называется относительной погрешностью приближённого числа $\overline{a}$.

Если точное значение величины неизвестно, а истинная абсолютная погрешность Δ мала по сравнению с $\left| \overline{a} \right|$, то используем формулу: $\delta \approx \dfrac{\Delta}{\left| \overline{a} \right|}$.

В записи приближённых чисел абсолютная и относительная погрешности указываются так:

$$x = \overline{x} \pm \Delta; \quad x = \overline{x} \cdot (1 \pm \delta).$$

При сложении и вычитании абсолютные погрешности складываются, а при делении и умножении складываются относительные погрешности.

Вычислить приближённое число с точностью $\varepsilon = 10^{-n}$ означает, что необходимо сохранить верной значащую цифру, стоящую на n-м разряде после запятой.

Задача:

1) Число $14,75$ найдено с относительной погрешностью $0,5$ %. Найти абсолютную погрешность округления.

Обозначим:

a - точное число (неизвестно),

$\overline{a} = 14,75$ - приближённое число,

$\delta = 0,005$ - относительная погрешность приближённого числа $\overline{a}$,

Δ - абсолютная погрешность округления (истинная).

Погрешность мала, поэтому используем формулу

$$\delta \approx \frac{\Delta}{|a|}$$

$$0,005 \approx \frac{\Delta}{14,75}$$

$$\Delta \approx 0,005 \cdot 14,75 = 0,07375$$

Ответ: $\Delta \approx 0,07375$.

Задача:

2) Найти абсолютные и относительные погрешности числа $e = 2{,}71828182\ldots$, заданного двумя и трёмя цифрами после запятой (без округления !).

а)

Число $x = e$ задано двумя цифрами после запятой: $\bar{x} = 2{,}71$.

Абсолютная погрешность: $\left| x - \bar{x} \right| = \left| e - 2{,}71 \right| \le 0{,}009 = \Delta$,

$$e = \bar{x} \pm \Delta = 2{,}71 \pm 0{,}009$$

Относительная погрешность: $\delta = \dfrac{\Delta}{\bar{x}} \cdot 100\% = \dfrac{0{,}009}{2{,}71} \cdot 100\% \approx 0{,}332\%$

$$e = 2{,}71 \quad (100 \pm 0{,}332\%)$$

или в долях

$$e = 2{,}71 \quad (1 \pm 0{,}00332)$$

б)

Число $x = e$ задано трёмя цифрами после запятой: $\bar{x} = 2{,}718$.

Абсолютная погрешность: $\left| x - \bar{x} \right| = \left| e - 2{,}718 \right| \le 0{,}0003 = \Delta$,

$$e = \bar{x} \pm \Delta = 2{,}718 \pm 0{,}0003$$

Относительная погрешность: $\delta = \dfrac{\Delta}{\bar{x}} \cdot 100\% = \dfrac{0{,}0003}{2{,}718} \cdot 100\% \approx 0{,}011\%$

$$e = 2{,}718 \quad (100 \pm 0{,}011\%)$$

или в долях

$$e = 2{,}718 \quad (1 \pm 0{,}00011)$$

Правила оценки предельных погрешностей при выполнении операций над приближенными числами.

При сложении или вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются.

Относительная погрешность суммы заключена между наибольшим и наименьшим значениями относительных погрешностей слагаемых; на практике принимается наибольшее значение.

При умножении или делении чисел друг на друга их относительные погрешности складываются.

При возведении в степень приближенного числа его относительная погрешность умножается на показатель степени.

Для случая двух приближенных чисел *a* и *b* эти правила можно записать в виде формул:

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b, \quad \delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b$$

$$\delta(a / b) = \delta a + \delta b, \quad \delta\left(a^{k}\right) = k \cdot \delta a$$

Задача:

5) Стороны прямоугольника $a = 3,3$ см, $b = 5,2$ см измерены с абсолютной погрешностью $\Delta(\overline{a}) = \Delta(\overline{b}) = 0,1$ см. Найти:

а) абсолютную погрешность периметра и площади прямоугольника;

б) относительную погрешность периметра и определить пределы изменения относительной погрешности периметра.

Периметр прямоугольника и его площадь вычисляются приближённо, т.к. его стороны измерены с некоторой погрешностью:

$$\overline{p} = 2\cdot(\overline{a}+\overline{b}) = 2\cdot(3,3+5,2) = 17,0 \text{ (см)}$$

$$\overline{S} = \overline{a}\cdot\overline{b} = 3,3\cdot 5,2 = 17,16 \text{ (см}^2\text{)}$$

(черта сверху символа означает, что это величина приближённая)

Абсолютная погрешность вычисления периметра равна

$$\Delta(\overline{p}) = 2\cdot(0,1+0,1) = 0,4 \text{ (см)}$$

Теперь вычислим относительные погрешности сторон:

$$\delta(\overline{a}) = \frac{0,1}{3,3} \approx 0,030 \text{ (в долях)}$$

$$\delta(\overline{b}) = \frac{0,1}{5,2} \approx 0,019 \text{ (в долях)}$$

Относительная погрешность вычисления площади прямоугольника

$$\delta(\overline{S}) = \delta(\overline{a}) + \delta(\overline{b}) = \frac{0,1}{3,3} + \frac{0,1}{5,2} \approx 0,050 \text{ (в долях)} = 5 \text{ (\%)}$$

тогда абсолютная погрешность

$$\Delta(\overline{S}) = \overline{S}\cdot\delta(\overline{S}) = 17,16\cdot 0,050 = 0,858 \text{ (см}^2\text{)}$$