Показательная функция, ее свойства и применение.

Организация итогового повторения
по алгебре и началам анализа
в 11 классе

Основная цель:

Актуализация базовых знаний
и способов действий по теме.

Показательная функция, ее свойства и применение.

- Степень с рациональным показателем.
- Показательная функция.
- Показательные уравнения.
- Показательные неравенства.
- Дополнительный справочный материал.

Свойства степени с рациональным показателем

Если a>0, то:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n};$
2. $a^n : a^m = a^{n-m};$
3. $(ab)^n = a^n b^n;$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n;$
5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, где\ b \neq 0$
6. $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n;$
7. $a^1 = a;$
8. $a^0 = 1;$
9. $1^n = 1;$
10. $0^n = 0, где \quad n \neq 0;$
11. Если $r \in Q, 0 < a < b, то \quad a^r < b^r$ при r>0 и $a^r > b^r$ при r<0;
12. Если $r, s \in Q, r > s,$ то $a^r > a^s$ При a>1 и $a^r < a^s$ при 0<a<1.

«Деятельность учителя неотделима от деятельности учащихся… Она должна состоять из трех основных этапов: *мотивационного, операционно-познавательного и рефлексивно-оценочного*».

Фридман Л.М.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

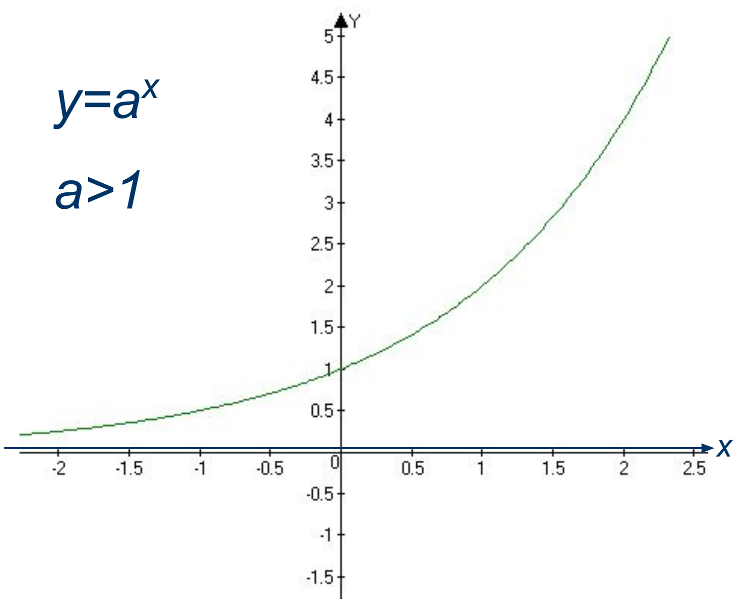
СВОЙСТВА И ГРАФИК

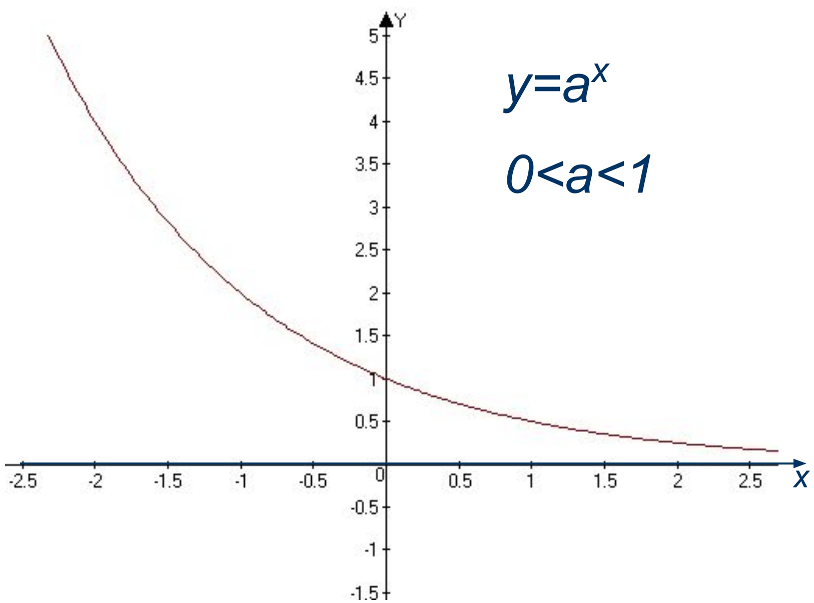
Определение

- Функция, заданная формулой $y=a^x$ (где $a>0$, $a \neq 1$), называется <u>показательной функцией с основанием *a*</u>

$y=a^x$

$a>1$





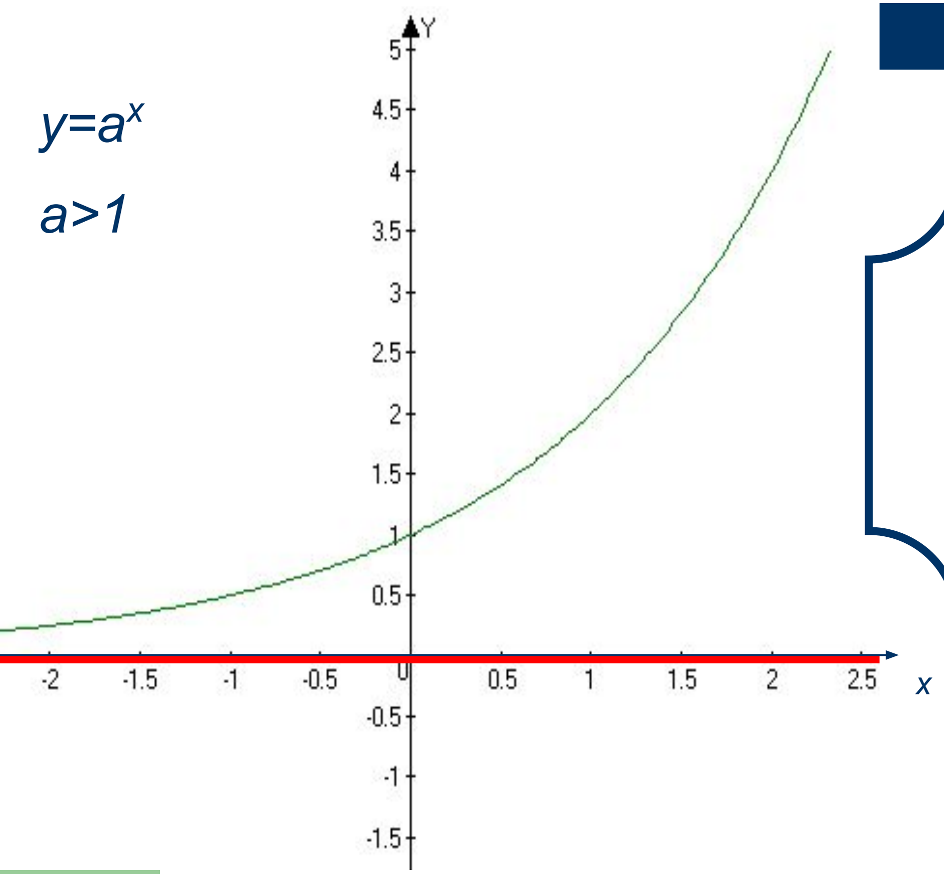
$y=a^x$

$0<a<1$

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

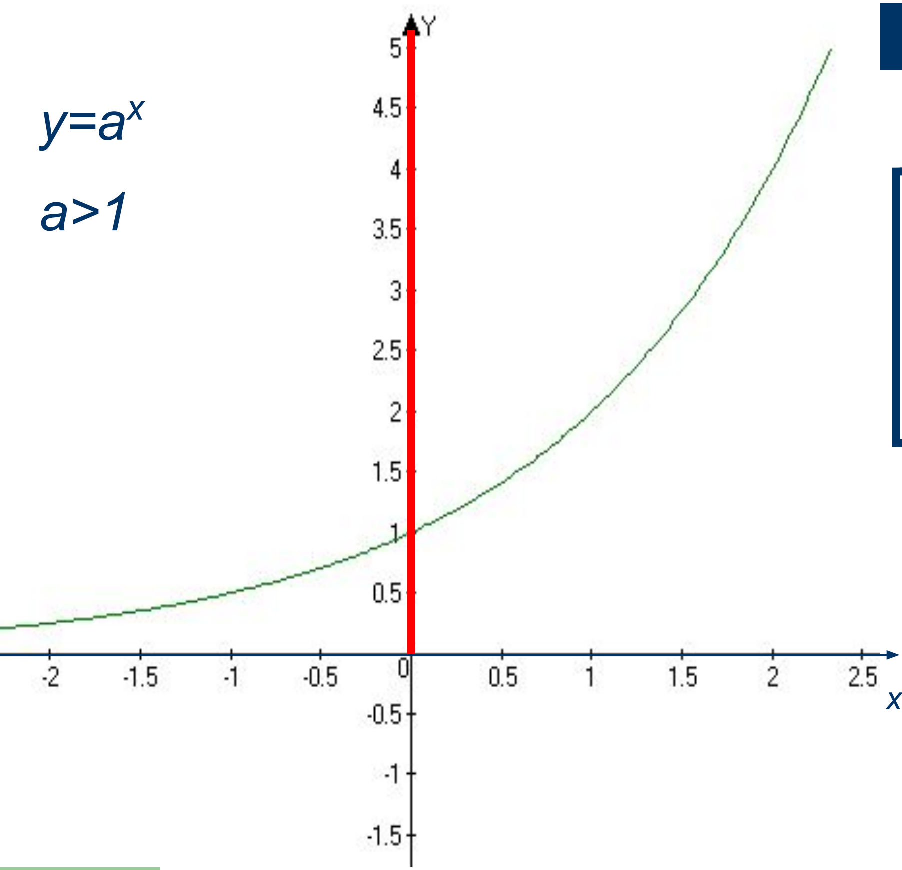
$y=a^x$

$a>1$



- Область определения – множество всех действительных чисел $D(a^x) = \mathbf{R}$

Свойства показательной функции
$y=a^x$ при $a>1$

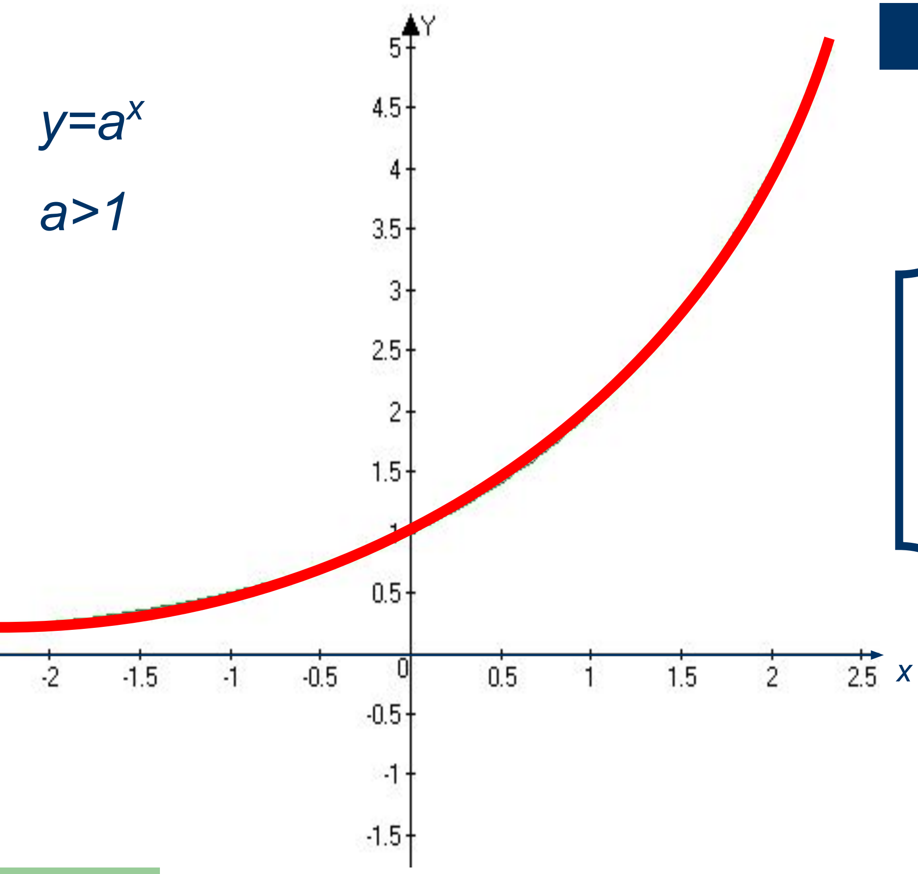


- Область значений – множество всех положительных чисел $E(a^x)= \mathbf{R_+}$

Свойства показательной функции
$y=a^x$ при $a>1$

$y=a^x$

$a>1$

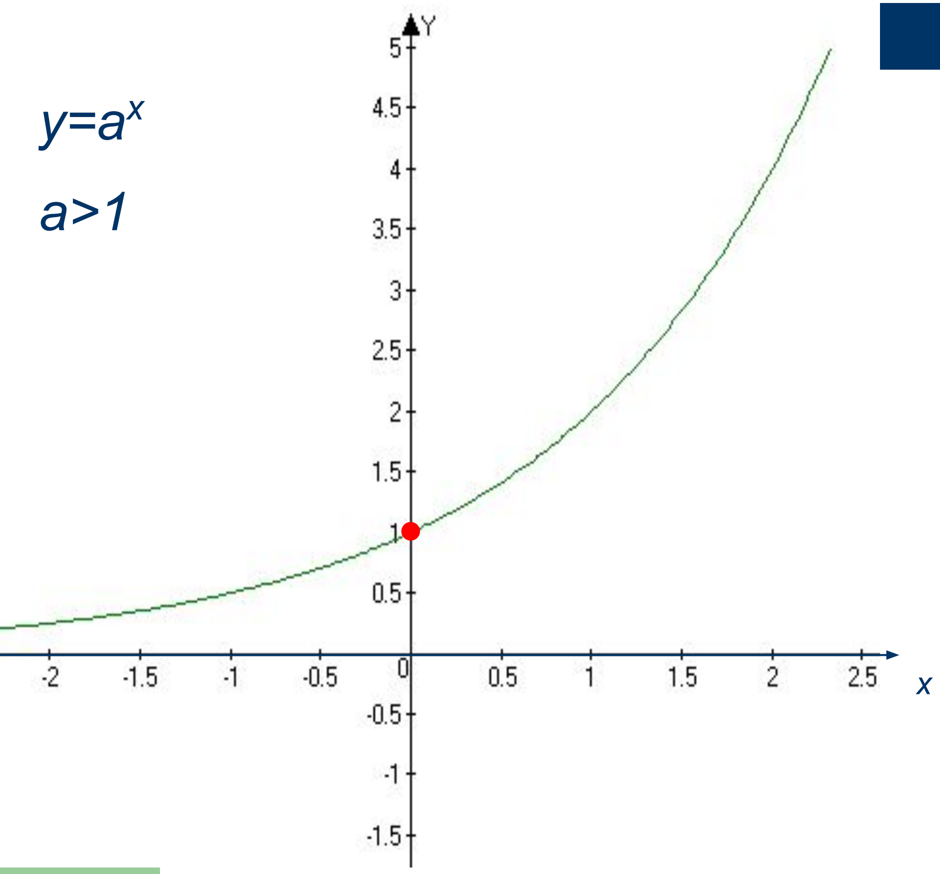


- Функция возрастает на всей области определения

Свойства показательной функции
$y=a^x$ при $a>1$

$y=a^x$

$a>1$

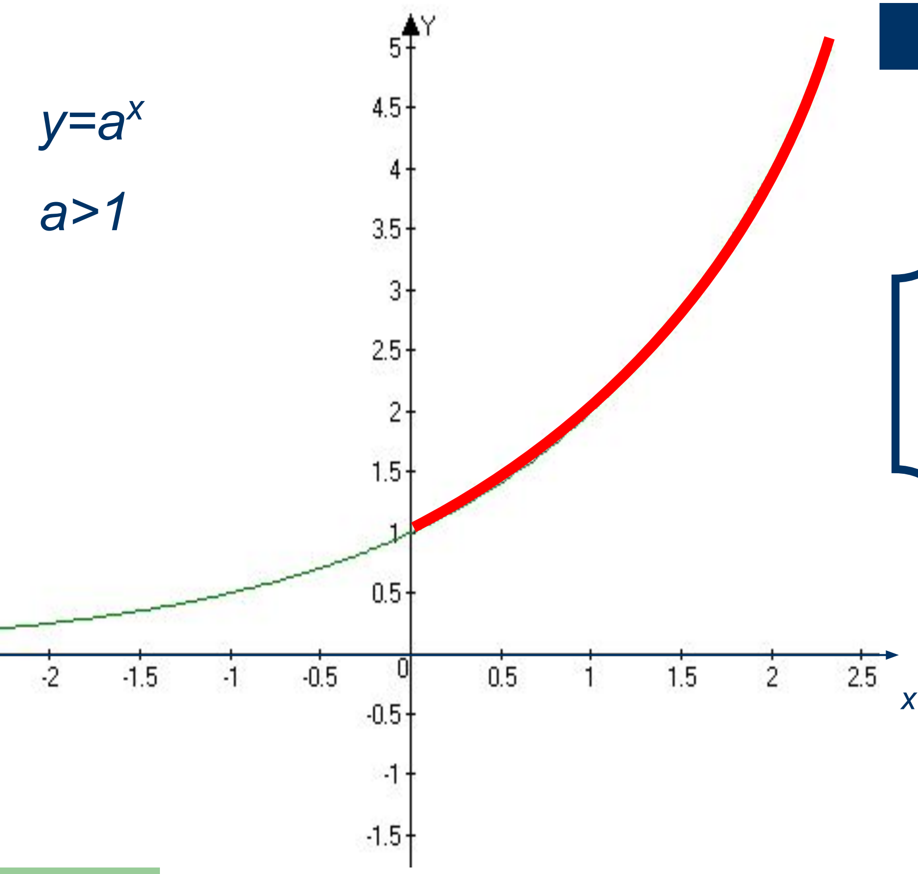


- При $x=0$ значение функции равно 1

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

$y=a^x$

$a>1$

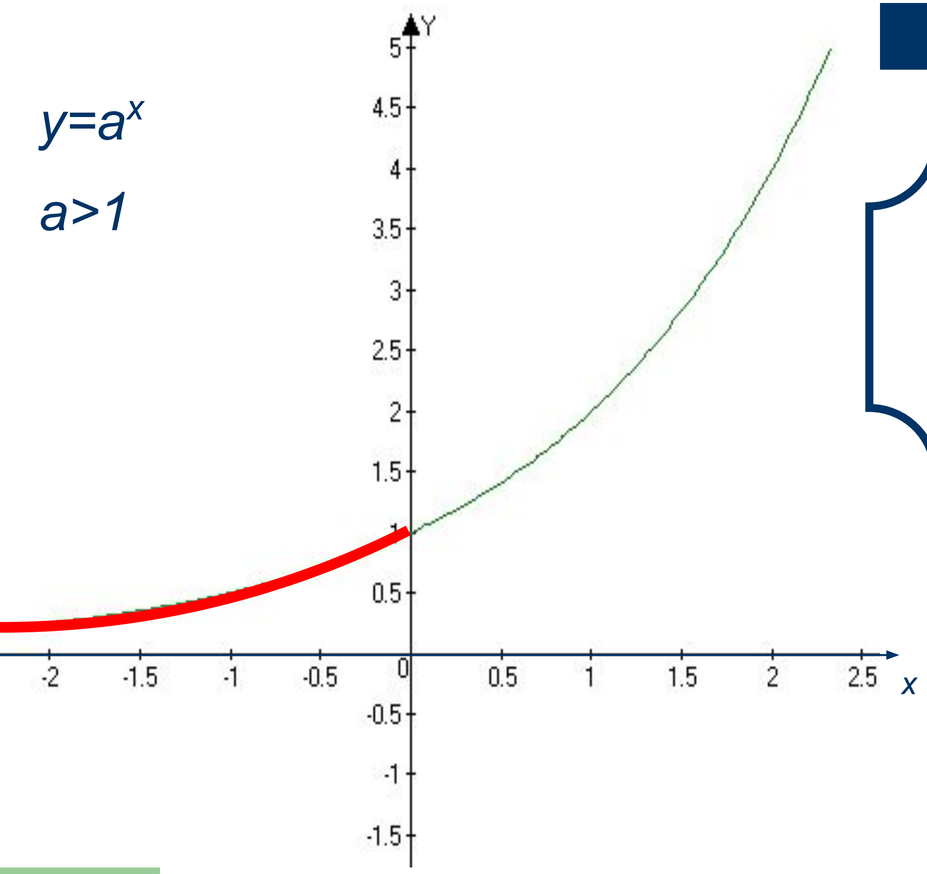


- Если $x>0$, то $a^x>1$

Свойства показательной функции
$y=a^x$ при $a>1$

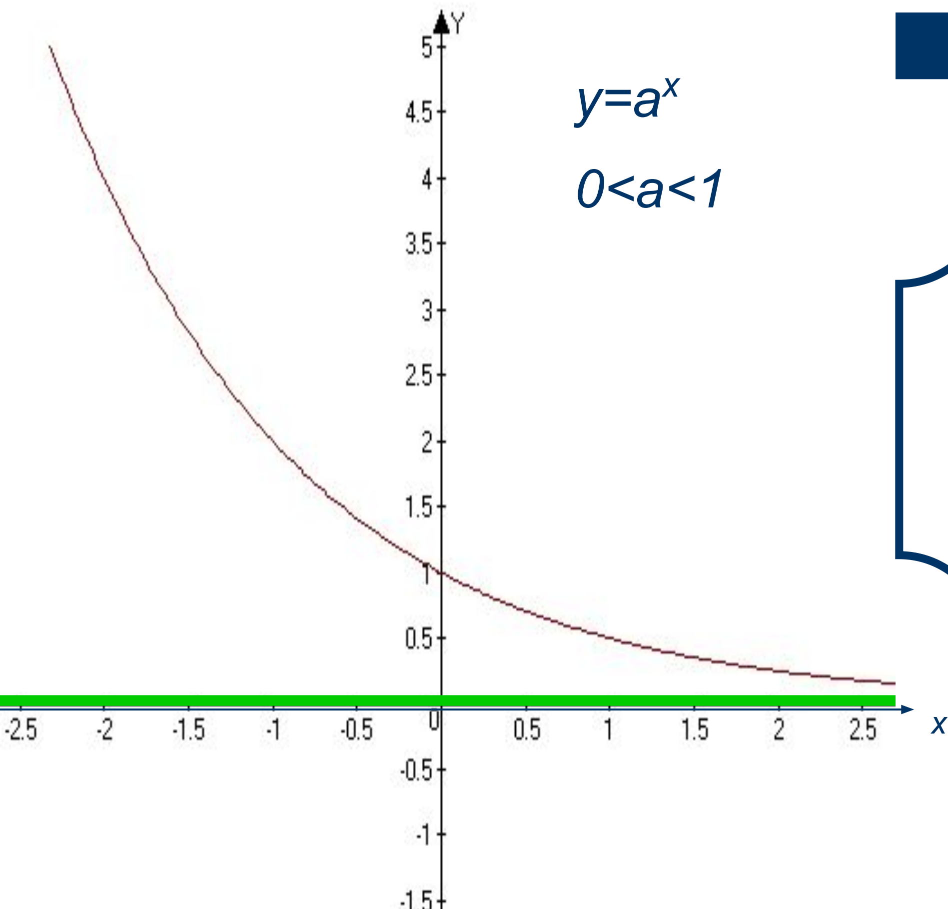
$y=a^x$

$a>1$



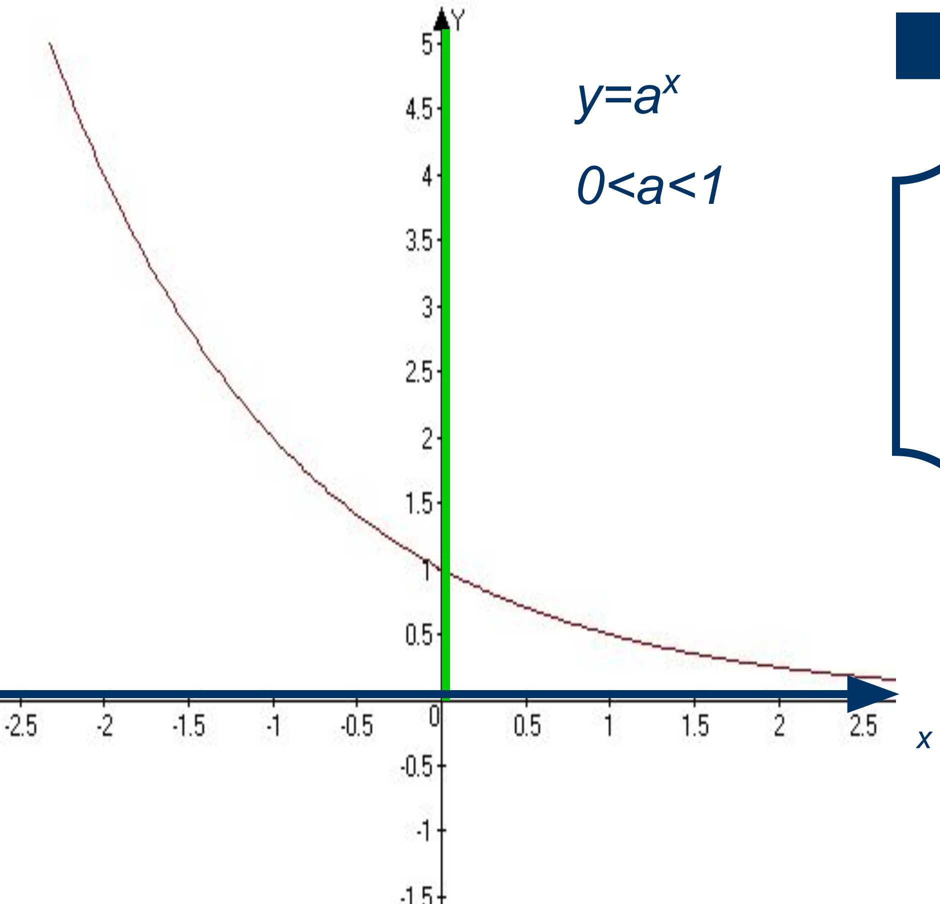
- Если $x<0$, то $0<a^x<1$

Свойства показательной функции
$y=a^x$ при *$0<a<1$*



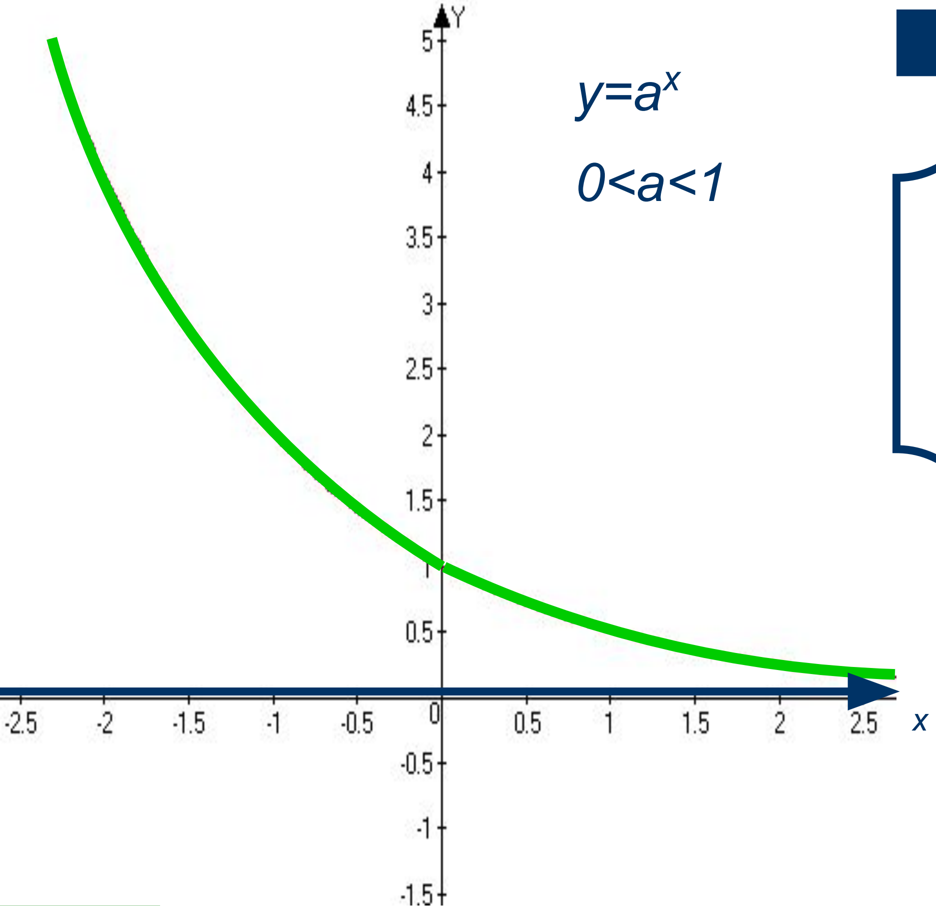
- Область определения – множество всех действительных чисел $D(a^x) = \mathbf{R}$

Свойства показательной функции
$y=a^x$ при $0<a<1$



- Область значений – множество всех положительных чисел $E(a^x)= \mathbf{R_+}$

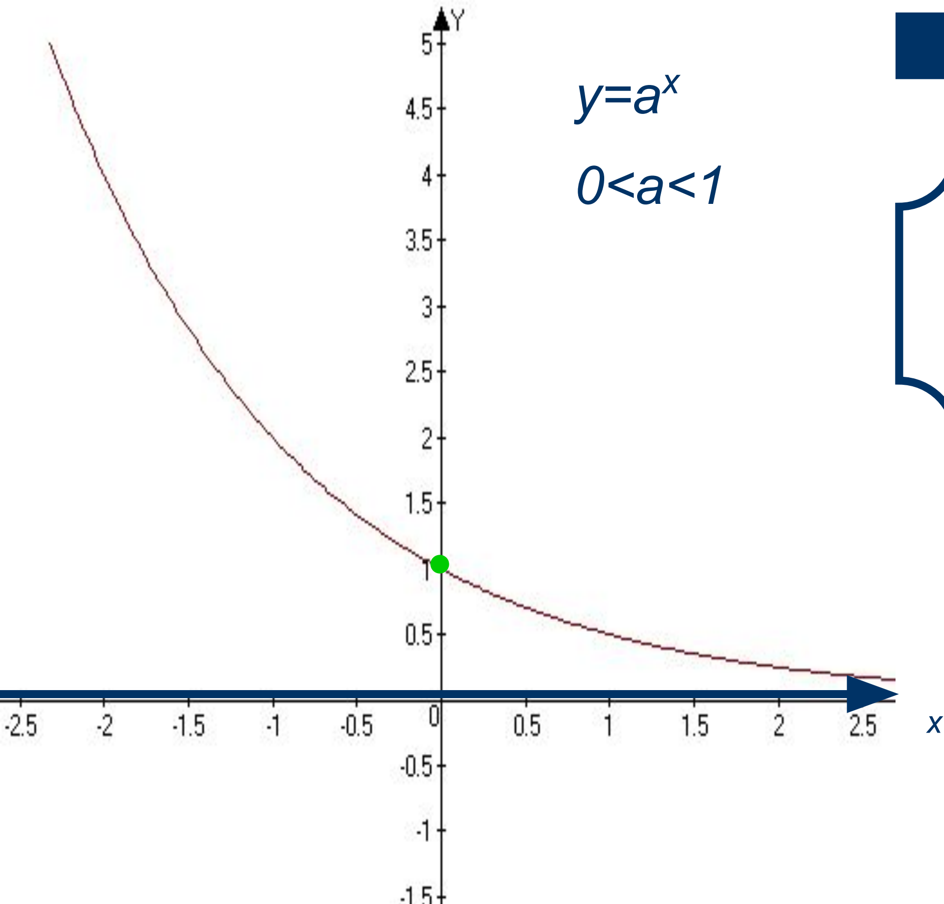
Свойства показательной функции
*y=a^x^* при *0<a<1*



- Функция убывает на всей области определения

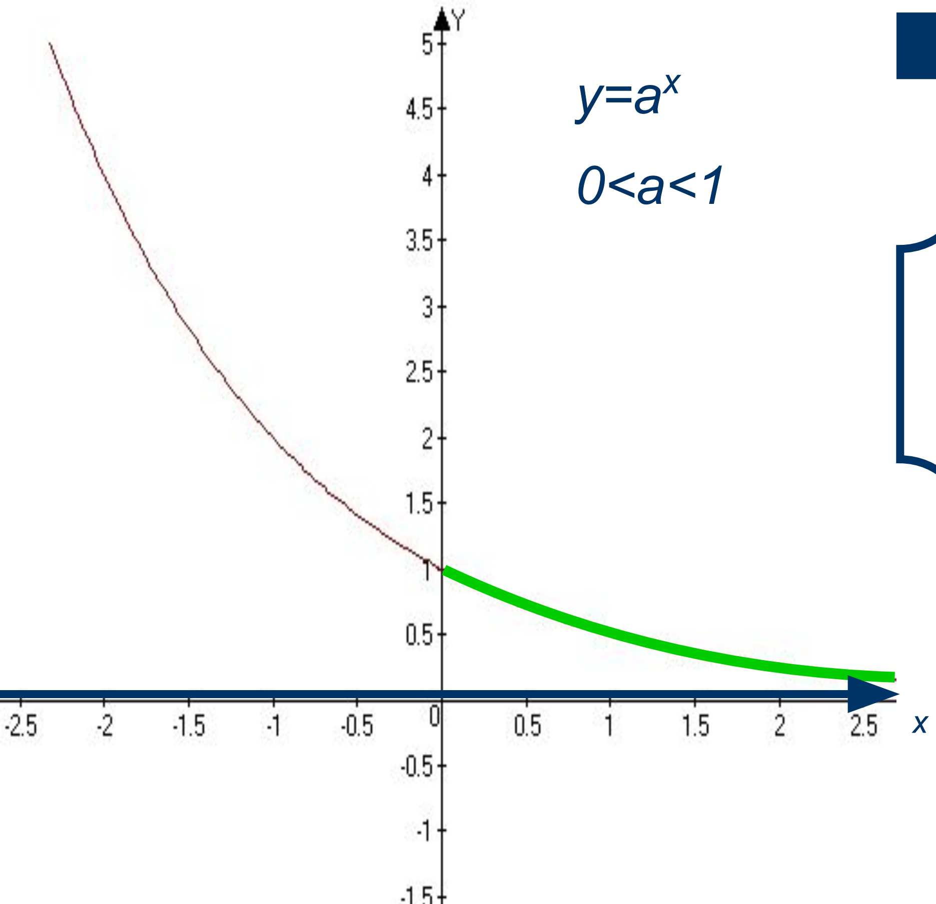
Свойства показательной функции

y=a^x при ***0<a<1***



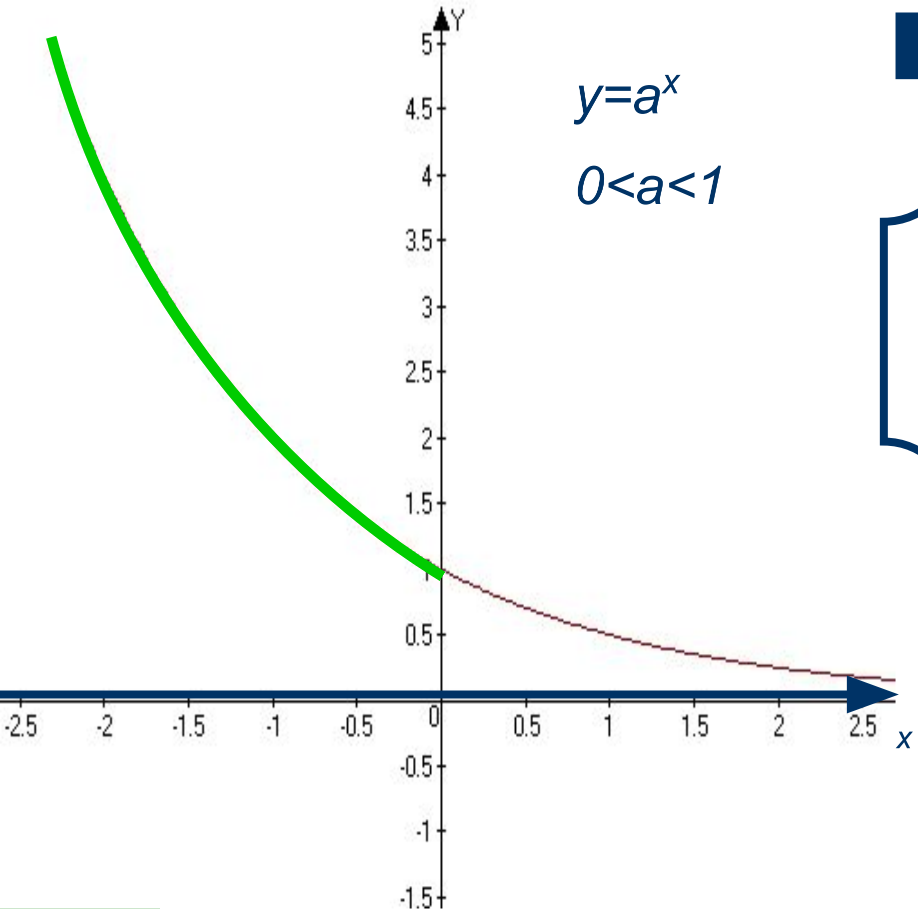
- При x=0 значение функции равно 1

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0<a<1$



- Если $x>0$, то $0<a^x<1$

Свойства показательной функции
$y=a^x$ при $0<a<1$



- Если $x<0$, то $a^x>1$

Показательные уравнения

$$a^x = b$$

Если

$$b = a^m,$$

то

$$a^x = a^m$$

и

$$x = m$$

Если

$$b > 0,$$

то

$$a^x = b \Leftrightarrow$$

$$x = \log_a b$$

Если

$$b < 0,$$

то

$$a^x = b$$

не имеет корней

Показательные неравенства

$$a^x \rangle b; \qquad a^x \geq b; \qquad a^x \langle b; \qquad a^x \leq b.$$

Если $0 \langle a \langle 1$

1. $a^x \rangle b,\ \text{где}\quad b = a^m \Leftrightarrow a^x \rangle a^m \Leftrightarrow x \langle m$
2. $a^x \leq b\ ,b \neq a^m, b \rangle 0 \Leftrightarrow x \geq \log_a b$
3. $a^x \leq b\ ,\text{если}\quad b \langle 0\ ,\text{то}$ не имеет решения
4. $a^x \rangle b,\ \text{если}\ b \langle 0\ ,\text{то}\quad x \in R$

Если $a \rangle 1$

1. $a^x \rangle b,\ \text{где}\quad b = a^m \Leftrightarrow x \rangle m$
2. $a^x \leq b\ ,\text{где}\quad b \neq a^m,\quad b \rangle 0 \Leftrightarrow x \leq \log_a b$

Производная и первообразная

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Тест 1

Проверь себя!

1. Да.
2. Нет.
3. Нет.
4. Да.
5. Да.
6. Да.
7. Да.
8. Нет.
9. Нет.
10. Нет.
11. Да.
12. Да.
13. Да.
14. Нет.
15. Да.
16. Да.
17. Да.
18. Да.
19. Нет.
20. Да.

Тест 2
Проверь себя !

1. «-»
2. «-»
3. «+»
4. «-»
5. «+»
6. «-»
7. «+»
8. «-»
9. «+»
10. «-»
11. «+»
12. «+»
13. «+»
14. «+»
15. «+»
16. «-»
17. «+»
18. «-»
19. «-»
20. «-»
21. «+»

18-21 правильных ответов – «5», 14-17 – «4», 11-13 – «3»,

меньше 11 – не владеете материалом

Основные опорные сигналы

1. $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right. \\ \exists \text{ A, B} \end{cases}$

2. $\dfrac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$

3. $A \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A > 0 \\ A = 0 \end{array}\right.$ $\qquad A \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A < 0 \\ A = 0 \end{array}\right.$

4. $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

5. $\sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B$

6. $|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$

7. $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases} \\ \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ и

$\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$

8. $\dfrac{A}{B} \leq \dfrac{A}{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq C \\ B \neq 0, C \neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} A < 0 \\ B \leq C < 0 \end{cases}$

9. $A^B = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} A = 1 \\ \exists \text{ B} \end{cases}$

Способы решения уравнений

- Разложение левой части на множители.
- Замена переменной.
- Функциональный (с помощью свойств функции).
- Однородные (делением обеих частей на выражение не равное нулю)
- Графический.
- Логарифмирование.

Проверь себя! Тест 3, часть 1

1. Опора 9 , функциональный способ
2. Опора 1 , функциональный способ
3. Опора 8 , замена переменной, функциональный способ
4. Опора 3 , функциональный способ, метод интервалов
5. Опора 6 , однородные уравнения
6. Опора 2 , замена переменной, разложение на множители
7. - замена переменной, метод интервалов
8. Опора 7 , функциональный способ
9. Опора 2 , замена переменной, функциональный способ
10. Опора 5 , $|a| = \begin{cases} a, если & a \geq 0 \\ -a, если & a < 0 \end{cases}$
11. Опора 1 , функциональный способ
12. - , графический способ
13. Опора 5 , геометрическая прогрессия
14. Опора 4 , функциональный способ
15. - , замена переменной, метод интервалов

Указания к заданиям 16 - 19

16. Используйте основное свойство дроби и исследование решений линейного уравнения.
17. $2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$
18. Базовые знания – производная и первообразная показательной функции.
19. Записать данную функцию в виде степени с основанием 2. опереться на свойства показательной и квадратичной функций.

Решите. Тест 3 (часть2)

Вариант 1.

Решите уравнение, в ответ запишите наименьший корень

$$|x|^{\frac{\sin x}{\sqrt{5-x^2-4x}}}=1$$

Вариант 2.

Решите уравнение, в ответ запишите корень или сумму корней

$$\left(3^x+81\right)\cdot\sqrt{3^{|x|}-9}\cdot\lg\left(4-3^x\right)=0$$

Вариант 3.

Решите уравнение

$$\left(2^{x^2-3x+2}-4\right)^2+\left(5^{x^2-x-6}-1\right)^2=0$$

Проверь себя!

Вариант 1

Решите уравнение. В ответ запишите наименьший корень $\left|\tilde{o}\right|^{\frac{\sin x}{\sqrt{5-x^2-4x}}}=1.$

Решение.

$$|x|^{\frac{\sin x}{\sqrt{5-x^2-4x}}}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x|=1 \\ -x^2-4x+5>0 \end{cases} \\ \begin{cases} |x|\neq 0 \\ |x|\neq 1 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{5-x^2-4x}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\neq \pm 1 \\ x^2+4x-5<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 1 \\ \sin x=0 \\ x^2+4x-5<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm 1 \\ -5<x<1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 1 \\ x=\pi n, n\in Z \\ -5<x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\pi \end{array}\right.$$

π

Ответ: -

Проверь себя!

Вариант 2

Решите уравнение. $\left(3^x+81\right)\cdot\sqrt{3^{|x|}-9}\cdot\lg\left(4-3^x\right)=0.$

Решение. Так как $3^x+81>0$ при любых *x*, то

$$\left(3^x+81\right)\cdot\sqrt{3^{|x|}-9}\cdot\lg\left(4-3^x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^{|x|}-9=0\\4-3^x>0\end{cases}\\\begin{cases}4-3^x=1\\3^{|x|}-9\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.\\3^x<4\end{cases}\\\begin{cases}3^x=3\\3^{|x|}\ge 3^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-2$$

Ответ: -2

Проверь себя!

Вариант 3

Решите уравнение. $\left(2^{x^2-3x+2}-4\right)^2+\left(5^{x^2-x-6}-1\right)^2=0.$

Решение
.

$$\left(2^{x^2-3x+2}-4\right)^2+\left(5^{x^2-x-6}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-3x+2}-4=0 \\ 5^{x^2-x-6}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-3x+2}=2^2 \\ 5^{x^2-x-6}=5^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x=0 \\ x^2-x-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Ответ:
3