

A stylized, light-colored illustration of a plant with a central stem, several large leaves, and a cluster of small, round buds or flowers at the top, set against a dark brown background.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Урок обобщения и
систематизации знаний

Выполнила
Учитель математики I категории
МБОУ Федосеевской СОШ
Лозовая Раиса Михайловна

1. Показательная функция

2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ

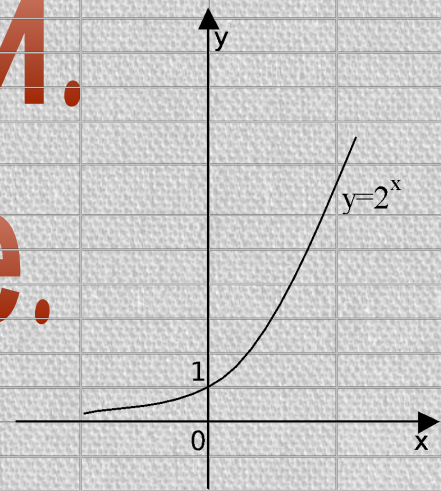
ФУНКЦИЯ

И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В

ПРИРОДЕ И ТЕХНИКЕ.

3. В биологии.

4. В экономике.



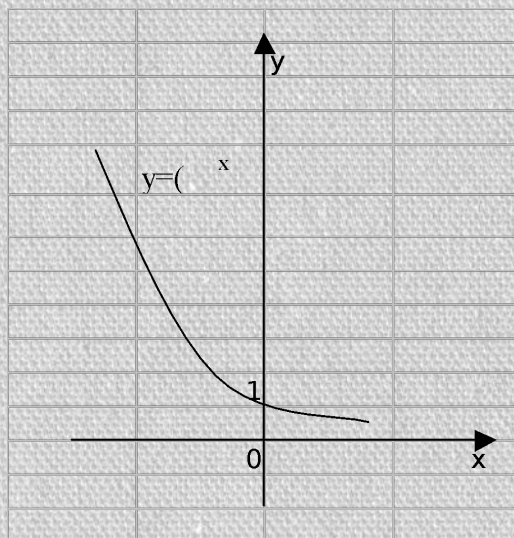
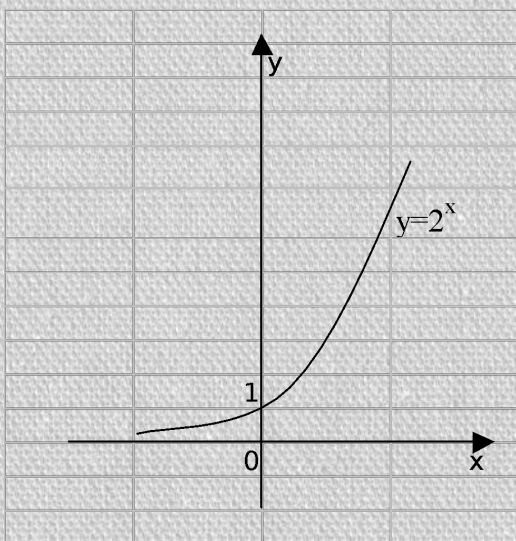
«ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ».

Некоторые наиболее часто
встречающиеся виды
трансцендентных функций,
прежде всего показательные,
открывают доступ ко
многим исследованиям.

Л.Эйлер.



Графики функции $y=2^x$ и $y=(\frac{1}{2})^x$



1. График функции $y=2^x$ проходит через точку $(0;1)$ и расположен выше оси Ox .

$a > 1$ $D(y): x \in \mathbb{R}$

$E(y): y > 0$

Возрастает на всей области определения.

2. График функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ также проходит через точку $(0;1)$ и расположен выше оси Ox .

$0 < a < 1$ $D(y): x \in \mathbb{R}$

$E(y): y > 0$

Убывает на всей области определения.

Блиц – опрос

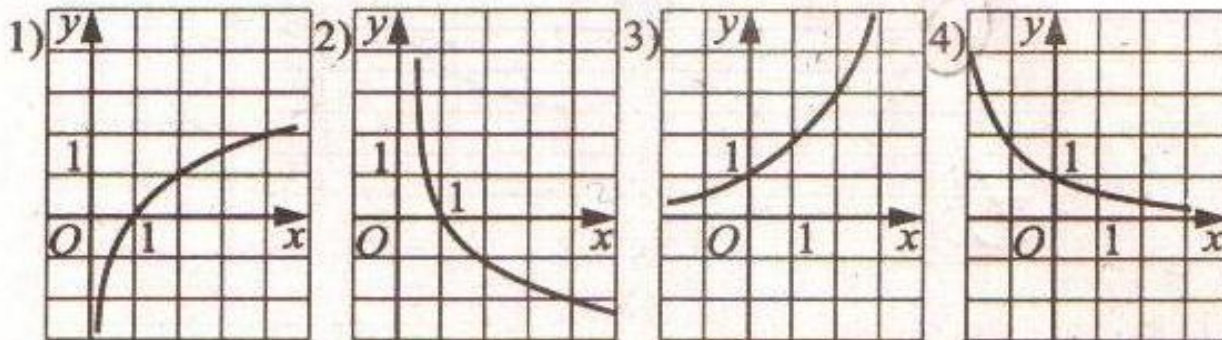
1. Какая функция называется показательной?
2. Какова область определения функции $y=0,3x$?
3. Каково множество значения функции $y=3x$?
4. Дайте определение возрастающей, убывающей функции.
5. При каком условии показательная функция является возрастающей?
6. При каком условии показательная функция является убывающей?
7. Возрастает или убывает показательная функция

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y = 4^x$$

8. Определить при каком значении a функция $y = a^x$ проходит через точку $A(1; 2)$;

9

Укажите график функции, заданной формулой $y = 0,5^x$



Какие из перечисленных функций являются возрастающими, а какие убывающими?

1) $y = 5^x$ *возрастающая, т.к. $5 > 1$*

2) $y = 0,5^x$ *убывающая, т.к. $0 < 0,5 < 1$*

3) $y = 10^x$ *возрастающая, т.к. $10 > 1$*

4) $y = \pi^x$ *возрастающая, т.к. $\pi > 1$*

какие из функций являются
возрастающими, а какие
убывающими?

$$5) y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad \text{убывающая, т.к. } 0 < \frac{2}{3} < 1$$

$$6) y = 49^{-x} \quad \text{убывающая, т.к. } 49^{-1} = \frac{1}{49} \text{ и } 0 < \frac{1}{49} < 1$$

Показательные уравнения.

Уравнения, у которых неизвестное находится в показателе степени, называются показательными.

Способы решения:

1. По свойству степени;
2. Вынесение общего множителя за скобки;
3. Деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, принимающее значение отличное от нуля при всех действительных значениях x ;
4. Способ группировки;
5. Сведение уравнения к квадратному;
6. Графический.

Например:

$$3^{2x+6} = 2^{x+3}$$

Решение.

$$(3^2)^{x+3} = 2^{x+3}$$

$$9^{x+3} = 2^{x+3}$$

т.к. $2 \square 0$, тогда $\left(\frac{9}{2}\right)^{x+3} = 1$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^{x+3} = \left(\frac{9}{2}\right)^0$$

$$x+3 = 0$$

$$x = -3$$

Ответ. $x = -3$.

$$9^{-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{27}$$

Решение.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$(2\sqrt{x-1})^2 = 3^2$$

$$4x - 4 = 9$$

$$4x = 13$$

$$x = 3,25$$

Ответ. $x = 3,25$.

УСТНО):

$$\bullet 5^x = 25$$

$$\underline{\mathbf{x=2}}$$

$$\bullet 7^{x-2} = 49$$

$$\underline{\mathbf{x=4}}$$

$$\bullet 4^x = 1$$

$$\underline{\mathbf{x=0}}$$

$$\bullet 5,7^{x-3} = 1$$

$$\underline{\mathbf{x=3}}$$

$$\bullet 2 \cdot 2^x = 64$$

$$\underline{\mathbf{x=5}}$$

$$\bullet 3 \cdot 9^x = 81$$

$$\underline{\mathbf{x=1,5}}$$

$$\bullet 5^x = 7^x$$

$$\underline{\mathbf{x=0}}$$

$$\bullet 3,4^{x+2} = 4,3^{x+2}$$

$$\underline{\mathbf{x=-2}}$$

Указать способы решения показательных уравнений.

$$1. 5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31 \quad 5. 36 \cdot 216^{3x+1} = 1 \quad 9. 3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 36$$

$$2. 27^{1-x} = \frac{1}{81}$$

$$6. 3^{2x+1} - 8 \cdot 3^x = 3$$

$$10. 49^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$$

$$3. 9^x - 3^{x+1} = 54$$

$$7. 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 4$$

$$11. 7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5$$

$$4. 4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$$

$$8. 4^{2x+2} + 4^{x+1} - 1 = 0$$

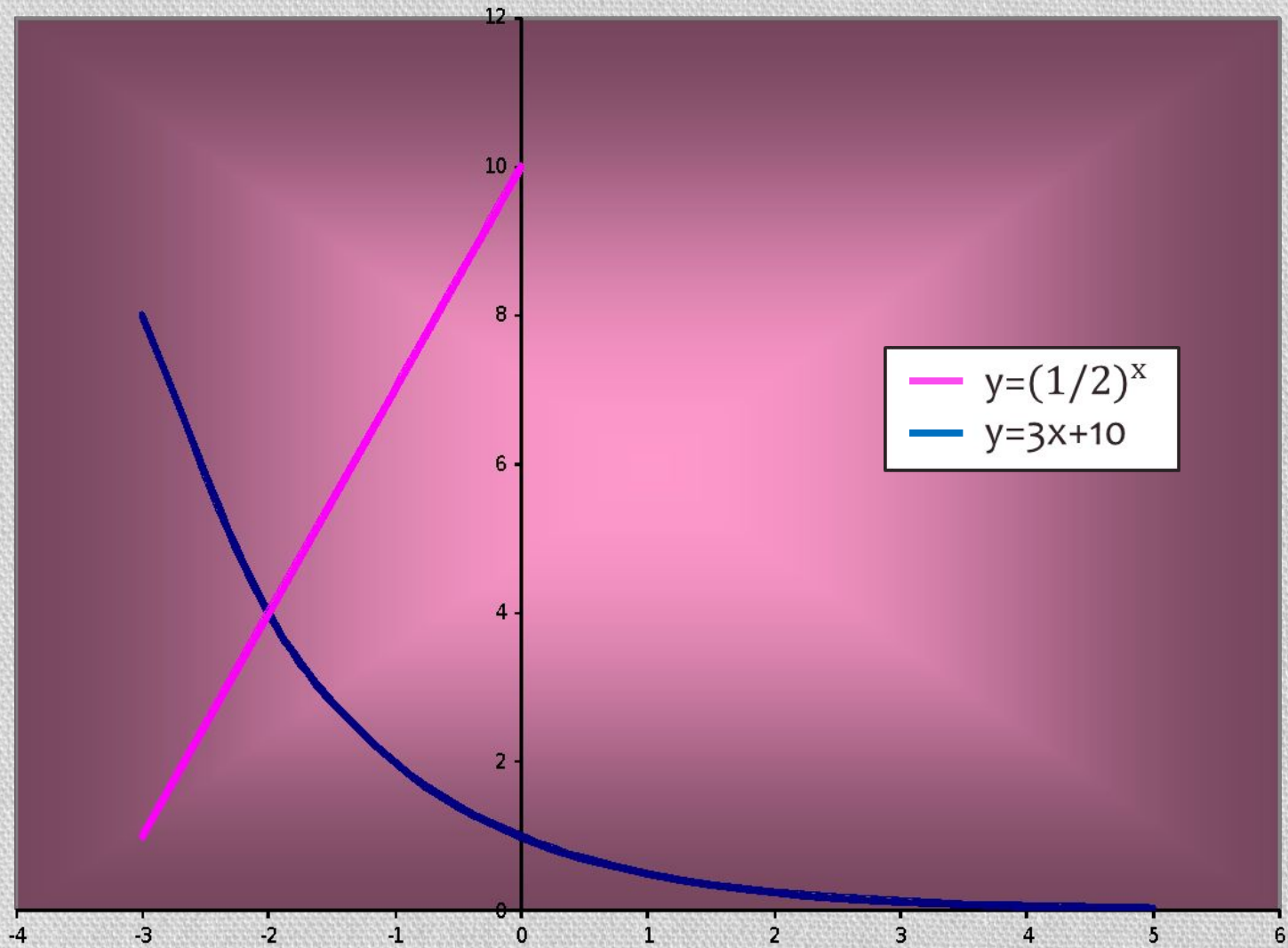
$$12. 9 \cdot 81^{1-2x} = 27^{2-x}$$

Диагностика уровня формирования практических навыков

Приведение к одному основанию	Вынесение общего множителя за скобки	Замена переменного (приведение к квадратному)
2, 5, 10, 12	1, 7, 9, 11	3, 4, 6, 8

Чтобы решить графически уравнение $f(x) = g(x)$, надо:

- построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$
- найти абсциссу точки пересечения графиков функций
- рассмотреть возможность существования других точек пересечения



Определение

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых

неизвестное содержится в

показателе степени.

Примеры: $3^x \leq 9;$ $2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

Показательные неравенства

решаются по следующим свойствам показательной функции:

- если $a > 1$, то неравенство справедливо \Leftrightarrow $a^{x_1} < a^{x_2}$
 $x_1 < x_2$
- если $0 < a < 1$, то неравенство справедливо \Leftrightarrow $a^{x_1} > a^{x_2}$
 $x_1 < x_2$

(устно):

• $2^x > 0$

x -любое

• $2^x > 1$

$x > 0$

• $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 1$

$x \leq 0$

• $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0$

$x = \emptyset$

• $5^x > 25$

$x > 2$

$0,7^x < 0,49$

$x > 2$

• $0,2^{x+1} < 0,2^4$

$x > 3$

• $9,7^{x-2} < 9,7^{10}$

$x < 12$

Решения показательных неравенств:

1. Способ Уравнивание оснований правой
и левой части

Решите неравенство:

$$3^x > 81$$

$$3^x > 3^4$$

т.к. $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ возрастающая

$$\underline{x > 4}$$

$$x \in (4; +\infty)$$

Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

т.к. $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывающая

$$x \leq \frac{3}{2}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$

Решение показательных неравенств

Способ 2: Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x > 10$$

$$3^{x-3} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 3^3\right) > 10$$

$$3^{x-3} (1 + 9) > 10$$

$$3^{x-3} \cdot 10 > 10 \quad | : 10$$

$$3^{x-3} > 1$$

$$3^{x-3} > 3^0$$

$$3 > 1, \text{ то } x - 3 > 0$$

$$x > 3.$$

Ответ: $x > 3$

Решение показательных неравенств

Способ 3: введение новой переменной

$$9^x - 10 \cdot 3^x < -9$$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0)$$

$$t^2 - 10t + 9 < 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

$$t_1 = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$(t-9)(t-1) < 0$$



$$1 < t < 9$$

$$1 < 3^x < 9$$

$$3^x < 3^2; \quad 3^x > 3^0;$$
$$x < 2 \quad x > 0.$$

$3 > 1$, то

Ответ: $x < 2$. $x > 0$



ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

*И её применение в
природе и технике.*



Подумайте! Где может использоваться показательная функция?



- Тема «Показательная функция» является основополагающей при изучении таких тем, как «Производная показательной функции», «Термодинамика», «Электромагнетизм», «Ядерная физика», «Колебания», используется для решения некоторых задач судовождения.

Наглядный бытовой пример!

- Все, наверное, замечали, что если снять кипящий чайник с огня, то сначала он быстро остывает, а потом остывание идет гораздо медленнее. Дело в том, что скорость остывания пропорциональна разности между температурой чайника и температурой окружающей среды. Чем меньше становится эта разность, тем медленнее остывает чайник. Если сначала температура чайника равнялась T_0 , а температура воздуха T_1 , то через t секунд температура T чайника выразится формулой:
- $T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1$,
- где k - число, зависящее от формы чайника, материала, из которого он сделан, и количества воды, которое в нем находится.

При падении тел в безвоздушном пространстве скорость их непрерывно возрастает.

- При падении тел в воздухе скорость падения тоже увеличивается, но не может превзойти определенной величины.

- Рассмотрим задачу о падении парашютиста. Если считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости падения парашютиста, т.е. что $F = kv$, то через t секунд скорость падения будет равна: $v = mg/k(1 - e^{-kt/m})$, где m - масса парашютиста. Через некоторый промежуток времени $e^{-kt/m}$ станет очень маленьким числом, и падение станет почти равномерным. Коэффициент пропорциональности k зависит от размеров парашюта. Данная формула пригодна не только для изучения падения парашютиста, но и для изучения падения капли дождевой воды, пушинки и т.д.

- Много трудных математических задач приходится решать в теории межпланетных путешествий. Одной из них является задача об определении массы топлива, необходимого для того, чтобы придать ракете нужную скорость v . Эта масса M зависит от массы m самой ракеты (без топлива) и от скорости v_0 , с которой продукты горения вытекают из ракетного двигателя.

- Если не учитывать сопротивление воздуха и притяжение Земли, то масса топлива определится формулой:
 $M = m(ev/v_0 - 1)$ (формула К.Э. Циолковского). Например, для того чтобы ракете с массой 1,5 т придать скорость 8000 м/с, надо при скорости истечения газов 2000 м/с взять примерно 80 т топлива.

- Если при колебаниях маятника, гири, качающейся на пружине, не пренебрегать сопротивлением воздуха, то амплитуда колебаний становится все меньше, колебания затухают. Отклонения точки, совершающей затухающие колебания, выражается формулой: $s = Ae^{-kt} \sin(\omega t + \varphi)$. Так как множитель e^{-kt} уменьшается с течением времени, то размах колебаний становится все меньше и меньше.

- Когда радиоактивное вещество распадется, его количество уменьшается. Через некоторое время остается половина первоначального количества вещества. Этот промежуток времени t_0 называется периодом полураспада. Вообще через t лет масса m вещества будет равна: $m = m_0(1/2)^{t/t_0}$, где m_0 - первоначальная масса вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество.
- Явление радиоактивного распада используется для определения возраста археологических находок, например, определен примерный возраст Земли, около 5,5 млрд. лет, для поддержания эталона времени.

Задача:

Период полураспада плутония равен 140 суткам. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8г ?

Решение.

$$T = 140 \text{ сут.}$$

$$t = 10 \text{ лет}$$

$$m_0 = 8 \text{ г}$$

$$m = ?$$

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$t = 365 \cdot 10 = 3650 \text{ (дней)}$$

$$m(t) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3650}{140}} = 1,1345 \cdot 10^{-7} \text{ (г)} = 1,13 \cdot 10^{-7} \text{ (г)}.$$

Ответ: $1,13 \cdot 10^{-7}$ (г).



- **Как видите, во всех приведенных выше исследованиях использовалась показательная функция.**

• Вот некоторые из Нобелевских лауреатов, получивших премию за исследования в области физики с использованием показательной функции:

• Пьер Кюри - 1903 г.

• Ричардсон Оуэн - 1928 г.

• Игорь Тамм - 1958 г.

• Альварес Луис - 1968 г.

• Альфвен Ханнес - 1970 г.

• Вильсон Роберт Вудро - 1978 г.

Она не перестаёт нас удивлять!

- Показательная функция также используется при решении некоторых задач судовождения, например, функцию e^{-x} используют в задачах, требующих применения биномиального закона (повторение опытов), закона Пуассона (редких событий), закона Релея (длина случайного вектора).



*Применение
показательной
функции
в биологии .*



Применение логарифмической функции в биологии.

В питательной среде бактерия кишечной палочки делится каждую минуту. Понятно, что общее число бактерий за каждую минуту удваивается. Если в начале процесса была одна бактерия, то через x минут их число (N) станет равной 2^x , т.е.

$$N(x) = 2^x.$$



ПРИМЕНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В ЭКОНОМИКЕ



Задача: Ежемесячно на банковский вклад, равный S_0 рублей начисляется $r\%$. На сколько процентов возрастет банковский вклад за x месяцев?

Решение.

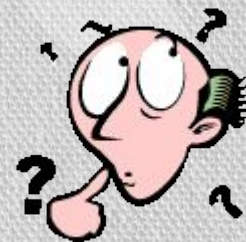
Пусть $r = 2\%$, $x = 12$ месяцев.

Тогда за год банковский вклад возрастет на

$$S_0(x) - S_0 = S_0(1 + 0,02)^{12} - S_0 = S_0(1,02^{12} - 1) = S_0(1,268241 - 1) \approx S_0 \cdot 0,27,$$

$$\frac{0,27S_0}{S_0} \cdot 100\% = 27\%.$$

Ответ: на 27%.



А теперь, в конце урока хочется, чтобы вы выразили свое отношение к нашей сегодняшней работе и всему уроку в целом. Ответьте на вопросы в листах рефлексии и сдайте их мне.

1) Понравилось на уроке? (отметь галочкой мордашку)



2) Поставь оценку учителю за работу по 10 бальной системе.

3) Поставь оценку себе за работу по 10 бальной системе.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- *Страница 57 учебника – «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»*

**СПАСИБО ЗА
УРОК!**

A faint, light-colored illustration of a sunflower and a smaller flower is visible in the background on the right side of the page. The sunflower is the larger, more prominent one, with its head tilted slightly to the right. The smaller flower is positioned below and to the left of the sunflower's head.