

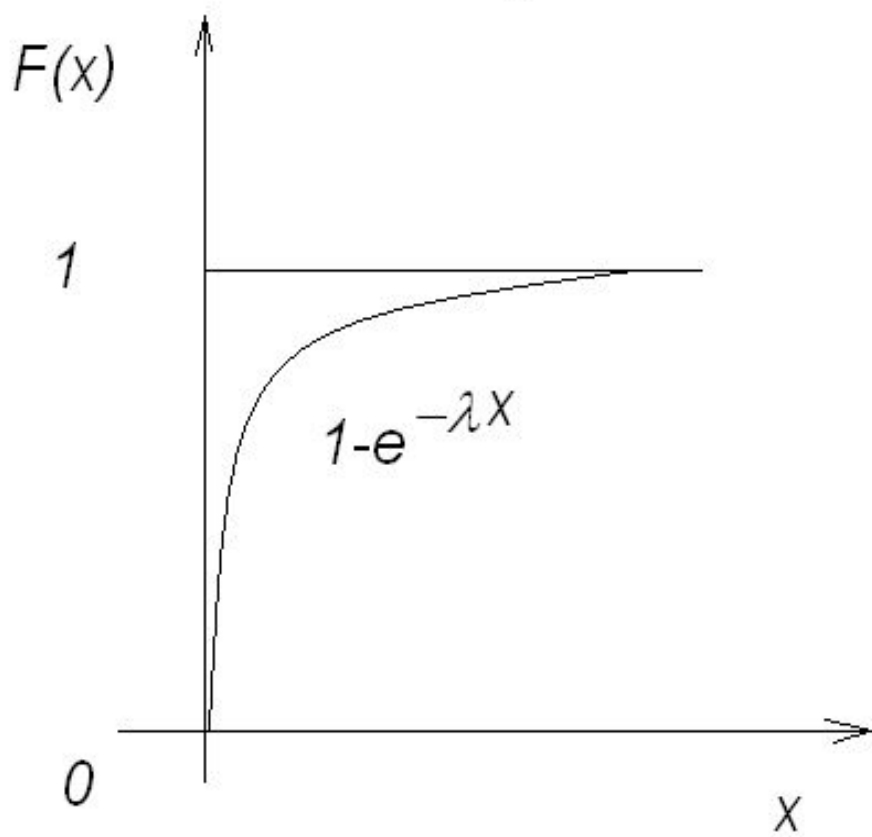
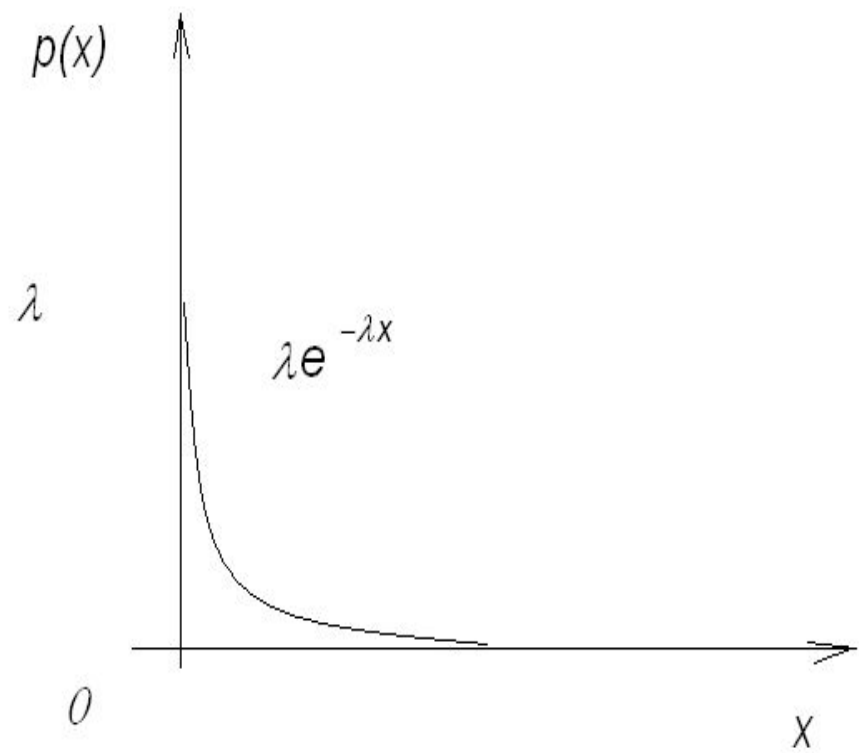
§3.6.2.2. Показательное распределение

Показательным (экспоненциальным) распределением СВ называют распределение СВ, которое описывается плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda \exp(-\lambda x), & x \geq 0, \end{cases}$$

где λ -положительная постоянная величина.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \lambda \exp(-\lambda x) dx = 1 - \exp(-\lambda x)$$



Найдем функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \exp(-\lambda x), & x \geq 0 \end{cases}$$

Определим числовые характеристики распределения.

Вычислим МО по формуле:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda x \exp(-\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \lambda x \exp(-\lambda x) d(\lambda x)$$

Обозначим $y=\lambda x$, $dy=d(\lambda x)$.

и проинтегрируем интеграл по частям,
полагая $u=y$, $du=dy$,

а $dv=\exp(-y)dy$, $v=-\exp(-y)$.

Тогда после всех преобразований
получим: $M[X]=1/\lambda$.

Вычислим дисперсию

$$D[X]=\alpha_2[X]-(M[X])^2$$

Определим второй начальный момент:

$$\alpha_2[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 \exp(-\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} (\lambda x^2) \exp(-\lambda x) d(\lambda x)$$

Введем обозначения $y = \lambda x$, $dy = d(\lambda x)$

и проинтегрируем интеграл по частям, полагая $u = y^2$, $du = 2y dy$, а $dv = \exp(-y) dy$, $v = -\exp(-y)$.

Тогда после всех преобразований получим

$$\alpha_2[X] = 2/\lambda^2.$$

Дисперсия и стандартное отклонение соответственно:

$$D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2 = 1/\lambda^2;$$

$$\sigma = 1/\lambda.$$

Показательный закон широко используется в теории надежности при исследовании отказов и безотказной работы процессов и систем.

§3.6.2.3. Нормальное распределение

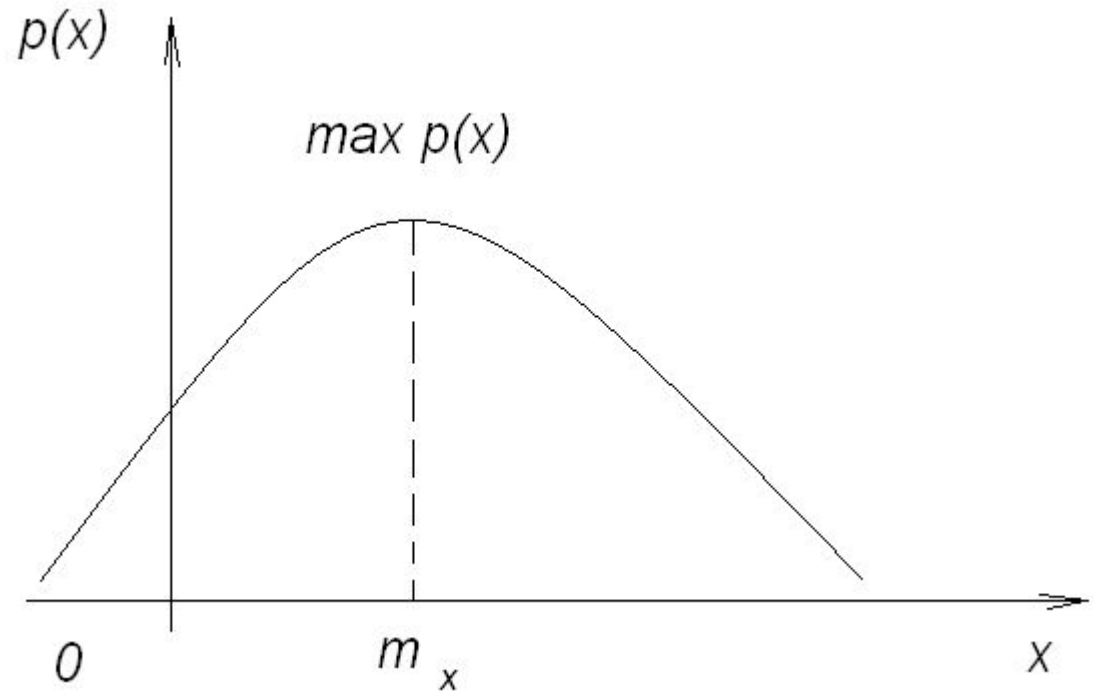
Нормальный закон распределения (закон Гаусса) наиболее часто встречающийся на практике закон распределения, описывающий случайные возмущения и отклонения основных характеристик процессов и систем, ошибки измерений и т.д.

Этот закон является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Непрерывная СВ называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность вероятности определяется выражением:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp[-(x - m_x)^2 / (2\sigma^2)].$$

Кривая
нормального
закона имеет
вид:



Максимальное значение $\max p(x)$ достигается при значении $x=m_x$ и равно $\max p(x)=1/ \sigma \sqrt{2\pi}$. При $x \rightarrow \infty$ плотность $p(x) \rightarrow 0$. Параметры m_x и σ называются параметрами распределения.

Вычислим основные характеристики СВ X.

МО:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp[-(x - m_x)^2 / (2\sigma)^2] dx$$

$$t = \frac{x - m_x}{\sigma \sqrt{2}}, \quad x = \sigma \sqrt{2} t + m_x$$

Полагая что
 $dx = \sigma \sqrt{2} dt$

получим

$$\begin{aligned} M[X] &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma \sqrt{2} t + m_x) \exp[-t^2] \sigma \sqrt{2} dt = \\ &= -\frac{\sigma \sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \exp[-t^2] \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-t^2] dt = m_x \end{aligned}$$

Т.к.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \exp[-t^2] dt = 0$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-t^2] dt = \sqrt{\pi}$$

- интеграл Эйлера-Пуассона.

Т.о.

$$M[X] = m_x.$$

Определим теперь дисперсию:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx =$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \exp[-(x - m_x)^2 / (2\sigma)^2] p(x) dx$$

Заменяем переменную $t = \frac{x - m_x}{\sigma\sqrt{2}}$

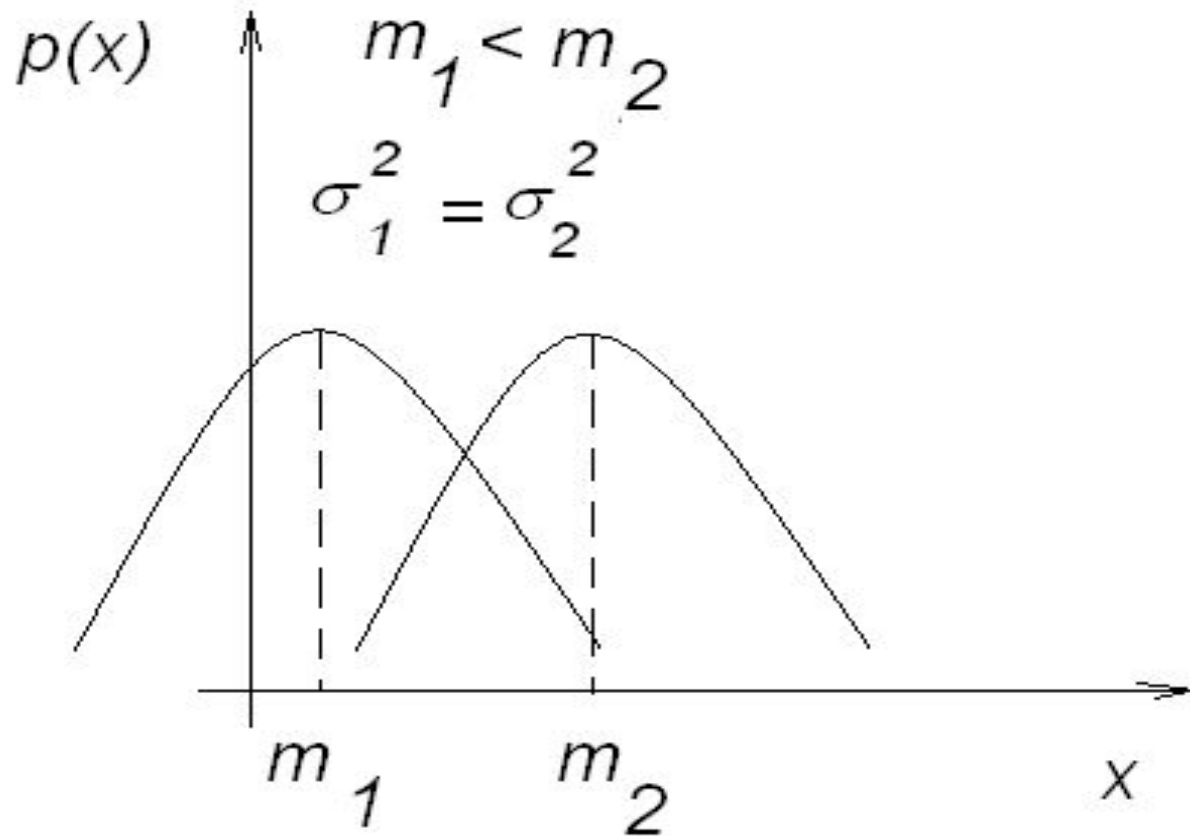
применим интегрирование по частям ($u=t$,
 $dv=2t\exp(-t^2)dt$, $du=dt$, $v=-\exp(-t^2)$)

После всех преобразований получим $D[X]=\sigma^2$,
поскольку $-\exp(-t^2)$ при $t \rightarrow \pm\infty$ убывает
быстрее, чем возрастает t .

Рассмотрим влияние параметров
нормального распределения на форму
кривой распределения.

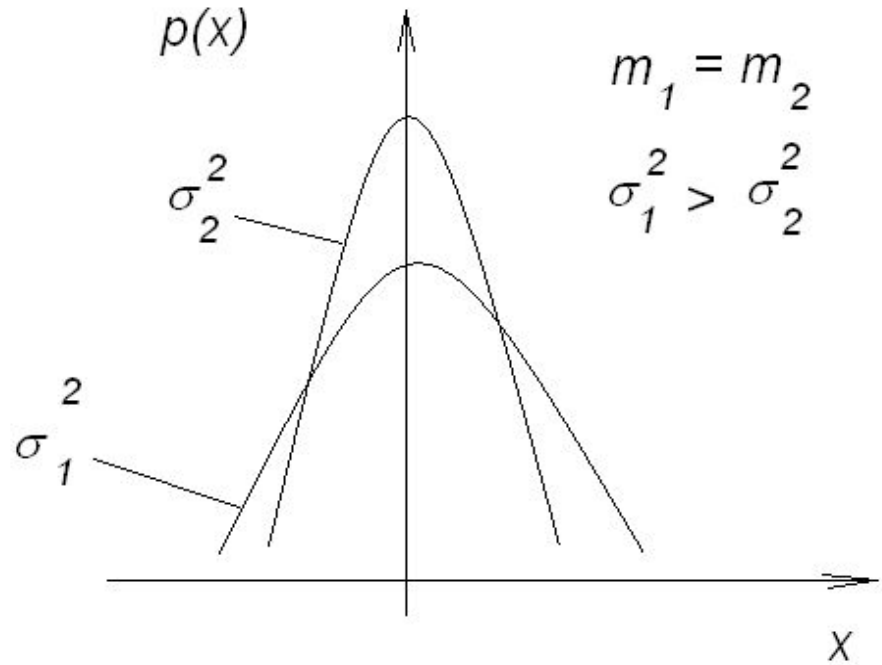
Из выражения для плотности вероятности
нормального распределения следует, что
 m_x является центром симметрии и
рассеивания,

Т.к. изменение $(x - m_x)$ на обратный знак не влияет на кривую распределения.
Увеличение или уменьшение m_x ведет к смещению кривой распределения



Увеличение или уменьшение σ^2 ведет соответственно к увеличению крутизны и пологости кривой распределения .

Т.о. параметр m_x характеризует положение кривой Распределения на оси x , а параметр σ^2 характеризует форму кривой.



Функция распределения случайной величины X находится по формуле

$$F[X] = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma}\right)$$

Для случайной величины X , распределенной по нормальному закону, вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$, вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right)$$

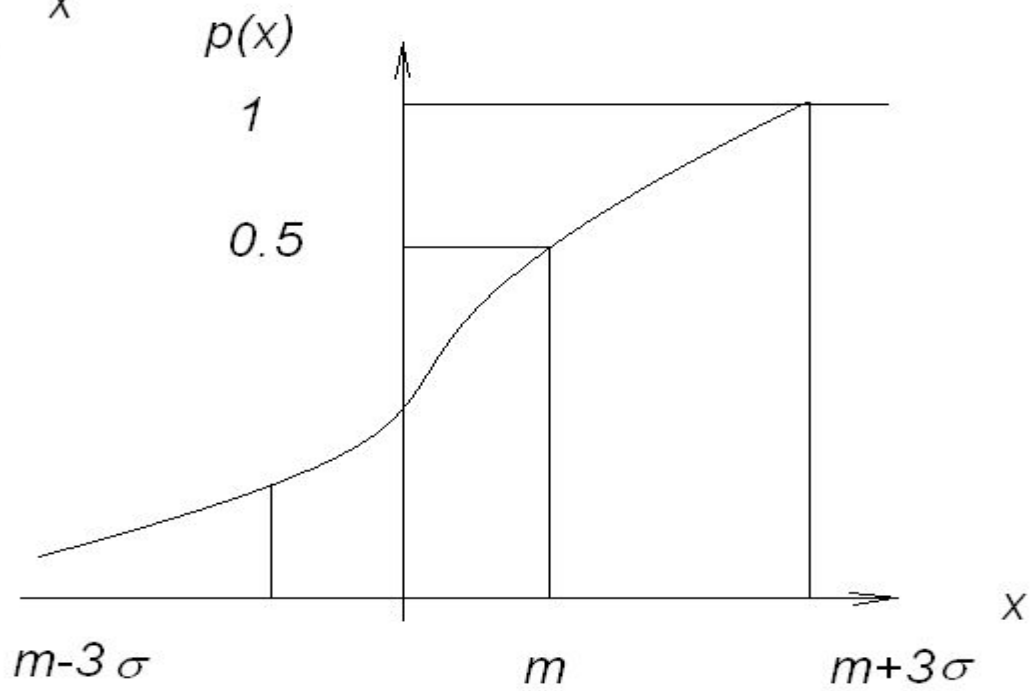
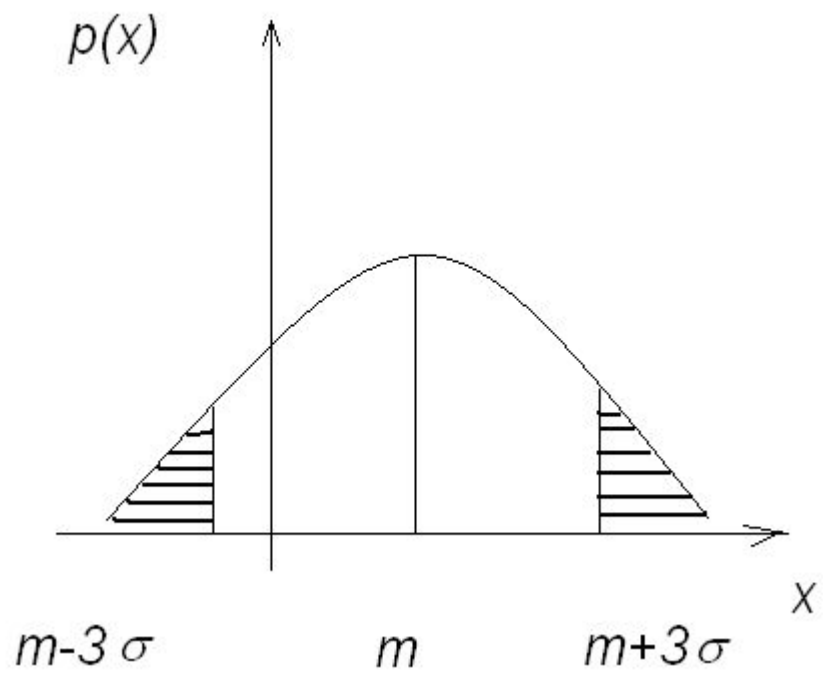
где $\Phi(x)$ - функция Лапласа.

Функция распределения случайной величины X находится по формуле

Для случайной величины X , распределенной по нормальному закону, вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$, вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right)$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа.



Правило трёх сигм.

Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения с вероятностью 0,9973.

Если закон распределения СВ неизвестен, а известны только m и σ , на практике обычно считают отрезок $m \pm 3\sigma$, участком практически возможных значений СВ.