

Урок по теме

«Показательные уравнения 11 класс (новая тема - 2 часа).

Разработан учителем математики
высшей квалификационной категории
МОБУ СОШ №2 с углубленным изучением отдельных
предметов г.Шимановска Амурской области
Андреевой Ольгой Алексеевной.

1). Представить выражение в виде степени с рациональным показателем:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}; \sqrt[5]{16} = 16^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{4}{5}};$$

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}; \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}; \sqrt[3]{6^{-2}} = 6^{-\frac{2}{3}};$$

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = x^{-\frac{1}{4}}.$$



2).Вычислить:

$$9^{\frac{1}{2}} = 3; \quad 16^{\frac{1}{4}} = 2; \quad 121^{\frac{1}{2}} = 11;$$

$$8^{\frac{2}{3}} = 4; \quad 81^{\frac{3}{4}} = 27; \quad 1268^0 = 1.$$

3).Найти область определения выражения:

$$a^{\frac{1}{2}}; (x-3)^{\frac{1}{3}}; (y+3)^{\frac{2}{5}}; x^{-\frac{1}{8}}; (4-x)^{-\frac{1}{3}}.$$
$$[0;+\infty); [3;+\infty); [-3;+\infty); (0;+\infty); (-\infty;4).$$



4). Разложить на множители:

$$5 - 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \left(5^{\frac{1}{2}} - 1 \right); \quad x^{\frac{2}{3}} - x = x^{\frac{2}{3}} \left(1 - x^{\frac{1}{3}} \right);$$

$$a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{6}} \left(a^{\frac{1}{6}} + 1 \right);$$

$$x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} \left(y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} \right).$$

Выносим степень с меньшим показателем!



4).Какие из перечисленных функций
показательные:

$$y = 2^x; \quad y = x^2; \quad y = (-3)^x;$$

$$y = (\sqrt{2})^x; \quad y = x; \quad y = (x - 2)^3;$$

$$y = \pi^x; \quad y = 3^{-x}; \quad y = \cos^2 x.$$


5). Какие из перечисленных функций
возрастают, какие убывают:

$$y = 2^x \nearrow, \quad y = (0,5)^x \searrow, \quad y = (\sqrt{2})^x \nearrow;$$

$$y = 10^x \nearrow, \quad y = \pi^x \nearrow, \quad y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \searrow;$$

$$y = 49^{-\frac{x}{2}} \searrow, \quad y = \left(14 \cos \frac{\pi}{3}\right)^{-x} \searrow.$$

6). Дана функция $y=6^x$ и значения y ,
равные $1,5$; 12 ; $\frac{1}{36}$; $\frac{1}{6}$; 6 ; $36^{\cos 180^\circ}$.

Выбрать те значения y , при которых $x < 0$.

7). Решить уравнения:

$$x^2 - 3x + 2 = 0; \quad 2 \cos x = 2; \quad \sqrt{x-4} = 2.$$

$$x_1 = 1; x_2 = 2. \quad x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad x = 8.$$

$$3^x = 27. \quad x = 3.$$

К какому виду уравнений относится каждое из данных?

- 
- Все уравнения можно рассматривать, как равенства двух функций $f(x) = \varphi(x)$.
 - Задача решения уравнений заключается в отыскании всех тех значений x , для каждого из которых значения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны между собой.
 - **Областью определения** уравнения называется общая часть областей определения каждой из функций.
 - Обычно вид уравнения определяется функцией, содержащейся в этом уравнении:

$$2x + 4 = 15;$$

$$3x^2 + 4x - 6 = 0;$$

линейное, квадратное, тригонометрическое и показательное.

$$3\sin x = 3;$$

$$25^x = 5,$$



Тема: «*Решение показательных уравнений*».

Задачи урока:

- *Познакомиться с видами показательных уравнений.*
 - *Рассмотреть способы решений показательных уравнений различных видов.*
 - *Отработать навыки и умения решения показательных уравнений.*
- 

I. Простейшие показательные уравнения вида

$$a^x = b.$$

- $y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1.$
- $D(y) = \mathbb{R};$
- $E(y) = \mathbb{R}_+;$
- *Монотонна на всей области определения, при $a > 1$ возрастает, при $0 < a < 1$ убывает, т.е по теореме о корне уравнение $a^x = b.$*
- *Имеет один корень при $b > 0;$*
- *Не имеет корней при $b \leq 0.$*
- *Представим b в виде $b = a^c$, имеем:*



$a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^c$ по свойству
степеней с одинаковыми основаниями

решением уравнения является равенство x

$= c.$

Пример:

$$2^x = 16;$$

$$2^x = 2^4;$$

$$x = 4.$$

Ответ: 4.



2). В уравнении $a^x = a^\alpha$ левая и правая части приведены к одному основанию и решением уравнения является равенство $x = \alpha$

Т.к. $a^\alpha \neq 0$, разделим обе части уравнения на правую часть:

$$\frac{a^x}{a^\alpha} = \frac{a^\alpha}{a^\alpha} \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^\alpha} = 1 \Leftrightarrow a^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow a^{x-\alpha} = a^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha.$$

3). Очевидно, что уравнение

$$a^{f(x)} = a^\alpha \Leftrightarrow$$

Пример:

$$6^{x-3} = \sqrt[5]{36};$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \alpha.$$

$$6^{x-3} = 6^{\frac{2}{5}};$$

$$x - 3 = \frac{2}{5}; \quad x = 3\frac{2}{5}. \quad \text{Ответ: } 3\frac{2}{5}.$$

II. Показательные уравнения вида

а). $a^{f(x)} = 1,$

На основании определения о нулевом показателе

имеем его решение:

$$f(x) = 0.$$

Пример:

$$2^{x^2 - 5x + 6} = 1;$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0;$$

$$x_1 = 2; x_2 = 3. \text{ Ответ: } 2 \text{ и } 3.$$

б). $a^{f(x)} = b^{f(x)},$

Уравнения такого вида решаются с использованием теорем о возведении в степень произведения и дроби и их обратные, рассмотрим решение на примере:

Пример 1:

$$2^{x-2} = 3^{x-2}.$$

Т.к. $3^{x-2} \neq 0,$

$$\frac{2^{x-2}}{3^{x-2}} = \frac{3^{x-2}}{3^{x-2}};$$

$$\frac{2^{x-2}}{3^{x-2}} = 1;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = 1;$$

$$x - 2 = 0;$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 2:

$$5^{x-3} = 7^{3-x}.$$

Т.к. $7^{3-x} \neq 0,$

$$\frac{5^{x-3}}{7^{3-x}} = \frac{7^{3-x}}{7^{3-x}};$$

$$5^{x-3} \cdot 7^{x-3} = 1;$$

$$(5 \cdot 7)^{x-3} = 1;$$

$$x - 3 = 0;$$

$$x = 3.$$

Ответ: 3.

III. Показательные уравнения вида

$$A_0 a^{m \circledast + k_0} + A_1 a^{m \circledast + k_1} + A_2 a^{m \circledast + k_2} + \dots + A_n a^{m \circledast + k_n} = M,$$

где $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, M, a, m, k_0, k_1, k_2, k_n - \text{const.}$

Вынесем за скобки a^{mx+k_i} где, $-k_i$ наименьшее число. Имеем:

$$a^{mx+k_i} (A_0 a^{k_0-k_i} + A_1 a^{k_1-k_i} + A_2 a^{k_2-k_i} + \dots + A_n a^{k_n-k_i}) = M,$$

$N - \text{const.}$

$a^{mx+k_i} \cdot N = M,$ при $N \neq 0$ получим уравнение:

$$a^{mx+k_i} = \frac{M}{N},$$



$$a^{mx+k_i} = \frac{M}{N},$$

Возможны три случая:

- $\frac{M}{N} = 1$, *уравнение сводится к виду* $a^{f(x)} = 1;$
 - $\frac{M}{N} = a^\alpha$, *уравнение сводится к виду* $a^{f(x)} = a^\alpha$,
 - $\frac{M}{N} \leq 0$, *данное уравнение не имеет корней.*
- 

Пример 1:

$$6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71.$$

Вынесем за скобки 6^{x-1} ,

$$6^{x-1} (6^2 + 35) = 71;$$

$$6^{x-1} \cdot 71 = 71;$$

$$6^{x-1} = \frac{71}{71};$$

$$6^{x-1} = 1;$$

$$x - 1 = 0.$$

$$x = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 2:

$$3^{x-1} - 2 \cdot 3^{x+2} = 75.$$

Вынесем за скобки 3^{x-1} ,

$$3^{x-1} (1 - 2 \cdot 3^3) = 75;$$

$$3^{x-1} (1 - 54) = 75;$$

$$3^{x-1} (-53) = 75;$$

$$3^{x-1} = -\frac{75}{53};$$

уравнение корней не имеет.

Ответ: *корней нет.*

IV. Трёхчленное показательное уравнение:

а). $A_0 a^{2x} + A_1 a^x + A_2 = 0,$

Выполним подстановку $a^x = y, y > 0,$

показательное уравнение превращается в обычное
квадратное уравнение

$$A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0,$$

Решением этого уравнения являются значения

$$y_1 \text{ и } y_2;$$

Чтобы найти корни показательного уравнения нужно
решить уравнения

Если $y_1 \leq 0$ и $y_2 \leq 0,$ $a^x = y_1$ и $a^x = y_2;$ одновременно, то данное
показательное уравнение **корней не имеет.**

Пример:

$$2^x + 4^x = 80.$$

$$2^x + 2^{2x} - 80 = 0;$$

Выполним подстановку $2^x = t, t > 0,$

$$t^2 + t - 80 = 0;$$

$$t_1 = -10; \text{ -посторонний корень;}$$

$$t_2 = 8;$$

Решим уравнение

$$2^x = 8,$$

$$2^x = 2^3,$$

$$x = 3.$$

Ответ: 3.

$$6). A_0 a^x + A_1 a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}} + A_2 b^x = 0,$$

Разделим данное уравнение на b^x , ($b^x \neq 0$):

$$A_0 \frac{a^x}{b^x} + A_1 \frac{a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}}}{b^x} + A_2 \frac{b^x}{b^x} = 0,$$

$$A_0 \left(\frac{a}{b} \right)^x + A_1 \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{x}{2}} + A_2 = 0,$$

Решение этого уравнения сводится к решению квадратного уравнения:

$$A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0, \quad \text{где} \quad \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{x}{2}} = y, \quad y > 0$$

Чтобы найти корни показательного уравнения нужно

решить уравнения

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{x}{2}} = y_1 \quad \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{x}{2}} = y_2;$$



Пример:

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0.$$

Преобразуем уравнение по свойствам степени:

$$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0;$$

Разделим уравнение на 3^{2x} , $3^{2x} \neq 0$:

$$2 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - 5 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + 3 \cdot \frac{3^{2x}}{3^{2x}} = 0;$$

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0;$$

выполним подстановку

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, \quad t > 0,$$

Решим уравнение

$$2t^2 - 5t + 3 = 0;$$



$$2t^2 - 5t + 3 = 0;$$

$$a + b + c = 2 + (-5) + 3 = 0;$$

$$t_1 = 1 \quad u \quad t_2 = \frac{3}{2}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0;$$

$$x = 0.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1};$$

$$x = -1.$$

Ответ: **-1** и **0**.





ОТВЕТИТЬ на вопросы:

- *Какие уравнения называются показательными?*
- *Сколько корней имеет уравнение вида:*

$$a^x = b? \quad a^{f(x)} = b?$$

- *Когда показательное уравнение не имеет корней?*
- 

Устно: решить показательные

уравнения (по выбору):

1) $5^x = 625;$

6) $3^x = \frac{1}{9};$

11) $5^{-x} = 25;$

16) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4;$

2) $100^x = 10;$

7) $12^x = 1;$

12) $2^{-x} = 8;$

17) $5^x \cdot 2^x = 400;$

3) $4^x = 256;$

8) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 49;$

13) $4^x = 2 ;$

18) $10^{x+1} = 0,1;$

4) $3^{x-1} = 27;$

9) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1,5;$

14) $27^x = 3 ;$

19) $3^{x^2-x} = 1;$

5) $5^{x-2} = 25;$

10) $a^x = a^2;$

15) $2^x \cdot 3^x = 36;$

20) $5^x = -25.$

$a > 0; a \neq 1.$



Работа в группах.

Выполнить задания из учебника:

Группы I и III решают:

№460(б), №461(б),
№462(а), №463(в),
№464(в), №469(в).

Группы II и IV решают:

№460(г), №461(г),
№462(а), №463(г),
№464(г), №469(а).



Формулы решения показательных уравнений где $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

I.	$a^x = b$ $a_x \equiv a_c$	$a^x = a^\alpha$ $x = \alpha.$	$a^{f(x)} = a^\alpha$ $f(x) = \alpha.$	$a^{f(x)} = 1$ $f(x) = 0.$
II.	$a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0.$			
III.	$A_0 a^{mx+k_0} + A_1 a^{mx+k_1} + A_2 a^{mx+k_2} + \dots + A_n a^{mx+k_n} = M,$ $a^{mx+k_i} (A_0 a^{k_0-k_i} + A_1 a^{k_1-k_i} + A_2 a^{k_2-k_i} + \dots + A_n a^{k_n-k_i}) = M,$ $a^{mx+k_i} \cdot N = M \Leftrightarrow a^{mx+k_i} = \frac{M}{N} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{M}{N} = 1 \text{ к виду } a^{f(x)} = 1. \\ \frac{M}{N} = a^\alpha \text{ к виду } a^{f(x)} = a^\alpha. \\ \frac{M}{N} \leq 0 \text{ не имеет корней.} \end{cases}$ <u>k_i – наименьшее из чисел k_n.</u>			
IV.	$A_0 a^{2x} + A_1 a^x + A_2 = 0,$ $A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0,$ $a^x = y_1, a^x = y_2.$ К виду $a^x = b$.	$A_0 a^x + A_1 a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}} + A_2 b^x = 0,$ $A_0 \left(\frac{a}{b}\right)^x + A_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} + A_2 = 0, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y, y > 0,$ $A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_1, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_2.$ К виду $a^x = b$.		

Индивидуальная работа.

Из данных вариантов решить один(по выбору):

<u>Вариант №1.</u> $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x.$	III уровень <u>Вариант №2.</u> $2 \cdot 16^x - 2^{4x} - 4^{2x-2} = 15.$
<u>Вариант №3.</u> $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75.$ <u>Дополнительно:</u> $\sqrt{3^x} = 9.$	II уровень <u>Вариант №4.</u> $7^{x-2} = 4^{2-x}.$ <u>Дополнительно:</u> $\sqrt[3]{2^x} = 8.$
<u>Вариант №5.</u> $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}.$ <u>Дополнительно:</u> а). $2^{4x} = 16$; б). $3^x = 1.$	<u>Вариант №6.</u> $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36.$ <u>Дополнительно:</u> а). $3^{3x} = 27$; б). $4^x = -64.$
+16.	+16.

Итоги урока.

- Какие уравнения называются показательными?
- К какому типу уравнений относятся показательные уравнения? Почему?
- Какие виды показательных уравнений рассмотрели?
- Сколько решений может иметь показательное уравнение? Когда оно не имеет корней?

Домашнее задание:

Теория п.36.1,
№463(а), №464(б), №468(в), №469(б).