Урок по теме

«Показательные уравнения
11 класс (новая тема - 2часа).

Разработан учителем математики
высшей квалификационной категории
МОБУ СОШ №2 с углубленным изучением отдельных
предметов г.Шимановска Амурской области
Андреевой Ольгой Алексеевной.

1).Представить выражение в виде степени с рациональным показателем:

$$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{6}=6^{\frac{1}{3}};\ \sqrt[5]{16}=16^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{4}{5}};$$

$$\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}};\ \sqrt[5]{a^4}=a^{\frac{4}{5}};\ \sqrt[3]{6^{-2}}=6^{-\frac{2}{3}};$$

$$\sqrt{\frac{1}{x}}=x^{-\frac{1}{4}}.$$

2).Вычислить:

$$9^{\frac{1}{2}} = 3; \quad 16^{\frac{1}{4}} = 2; \quad 121^{\frac{1}{2}} = 11;$$

$$8^{\frac{2}{3}} = 4; \quad 81^{\frac{3}{4}} = 27; \quad 1268^{0} = 1.$$

3).Найти области определения выражения:

$$a^{\frac{1}{2}}; \; (x-3)^{\frac{1}{3}}; \; (y+3)^{\frac{2}{5}}; \; x^{-\frac{1}{8}}; \quad (4-x)^{-\frac{1}{3}}.$$

$$[0;+\infty); [3;+\infty); \; [-3;+\infty); (0;+\infty); (-\infty;4).$$

4).Разложить на множители:

$$5-5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}}\left(5^{\frac{1}{2}}-1\right);\ x^{\frac{2}{3}}-x=x^{\frac{2}{3}}\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right);$$

$$a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}}\left(a^{\frac{1}{6}}+1\right);$$

$$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}\right).$$

Выносим степень с меньшим показателем!

4).Какие из перечисленных функций показательные:

$$y = 2^x; \qquad y = x^2; \qquad y = (-3)^x;$$

$$y = (\sqrt{2})^x; \qquad y = x; \qquad y = (x-2)^3;$$

$$y = \pi^x; \qquad y = 3^{-x}; \qquad y = \cos^2 x.$$

5).Какие из перечисленных функций возрастают, какие убывают:

$$y = 2^x, \quad y = (0{,}5)^x; \quad y = (\sqrt{2})^x;$$

$$y = 10^x, \quad y = \pi^x, \quad y = \left(\frac{2}{3}\right)^x;$$

$$y = 49^{-\frac{x}{2}}, \quad y = \left(14\cos\frac{\pi}{3}\right)^{-x}.$$

6).Дана функция $y=6^x$ и значения y, равные 1,5; 12; $\frac{1}{36}$; $\frac{1}{6}$; 6; $36^{\cos 180^0}$.

Выбрать те значения y, при которых $x<0$.

7).Решить уравнения:

$$x^2-3x+2=0;$$
$$x_1=1; x_2=2.$$

$$2\cos x=2;$$
$$x=2\pi n, n\in Z.$$

$$\sqrt{x-4}=2.$$
$$x=8.$$

$$3^x=27.$$
$$x=3.$$

К какому виду уравнений относится каждое из данных?

- *Все уравнения можно рассматривать, как равенства двух функций f(x) =φ(x).*
- *Задача решения уравнений заключается в отыскании всех тех значений x, для каждого из которых значения функций f(x) и φ(x) равны между собой.*
- ***Областью определения** уравнения называется общая часть областей определения каждой из функций.*
- *Обычно вид уравнения определяется функцией, содержащейся в этом уравнении:*

$$2x+4=15; \qquad 3x^2+4x-6=0;$$

$$3\sin x=3; \qquad 25^x=5,$$

линейное, квадратичное, тригонометрическое и показательное.

Тема: ***«Решение показательных уравнений».***

Задачи урока:

- ***Познакомиться с видами показательных уравнений.***
- ***Рассмотреть способы решений показательных уравнений различных видов.***
- ***Отработать навыки и умения решения показательных уравнений.***

I.Простейшие показательные уравнения вида

а) $a^x = b.$

$$y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1.$$

- D(y)=R;
- E(y)= $R_+;$
- *Монотонна на всей области определения,*

при а >1 возрастает,при 0< а <1 убывает, т.е

по теореме о корне уравнение $a^x = b.$

- *Имеет один корень при b>0;*
- *Не имеет корней при b* $\leq$ *0.*
- *Представим b в виде* $b = a^c$, *имеем:*

$$a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^c$$ по свойству степеней с одинаковыми основаниями

решением уравнения является равенство $x = c$.

Пример:

$$2^x = 16;$$

$$2^x = 2^4;$$

$$x = 4.$$

Ответ: 4.

2). В уравнении $a^x = a^\alpha$, левая и правая части приведены к одному основанию и решением уравнения является равенство $x = \alpha$

Т.к. $a^\alpha \neq 0$, разделим обе части уравнения на правую часть:

$$\frac{a^x}{a^\alpha} = \frac{a^\alpha}{a^\alpha} \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^\alpha} = 1 \Leftrightarrow a^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow a^{x-\alpha} = a^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha.$$

3). Очевидно, что уравнение $a^{f(x)} = a^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \alpha.$

Пример:

$$6^{x-3} = \sqrt[5]{36};$$

$$6^{x-3} = 6^{\frac{2}{5}};$$

$$x - 3 = \frac{2}{5}; \quad x = 3\frac{2}{5}.$$

Ответ: $3\frac{2}{5}.$

II. Показательные уравнения вида

а). $a^{f(x)} = 1,$

На основании определения о нулевом показателе имеем его решение: $f(x) = 0.$

Пример:

$$2^{x^2-5x+6} = 1;$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0;$$
$$x_1 = 2; x_2 = 3.$$

Ответ: 2 и 3.

б). $a^{f(x)} = b^{f(x)},$

Уравнения такого вида решаются с использованием теорем о возведении в степень произведения и дроби и им обратные, рассмотрим решение на примере:

Пример 1:

$$2^{x-2}=3^{x-2}.$$

Т.к. $3^{x-2}\neq 0,$

$$\frac{2^{x-2}}{3^{x-2}}=\frac{3^{x-2}}{3^{x-2}};$$

$$\frac{2^{x-2}}{3^{x-2}}=1;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}=1;$$

$$x-2=0;$$

$$x=2.$$

Ответ: $2.$

Пример 2:

$$5^{x-3}=7^{3-x}.$$

Т.к. $7^{3-x}\neq 0,$

$$\frac{5^{x-3}}{7^{3-x}}=\frac{7^{3-x}}{7^{3-x}};$$

$$5^{x-3}\cdot 7^{x-3}=1;$$

$$(5\cdot 7)^{x-3}=1;$$

$$x-3=0;$$

$$x=3.$$

Ответ: $3.$

III. Показательные уравнения вида

$$A_0 a^{mx+k_0} + A_1 a^{mx+k_1} + A_2 a^{mx+k_2} + \ldots + A_n a^{mx+k_n} = M,$$

где $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n, M, a, m, k_0, k_1, k_2, k_n - const.$

Вынесем за скобки a^{mx+k_i}, *где* k_i *-наименьшее число. Имеем:*

$$a^{mx+k_i}\underbrace{\left(A_0 a^{k_0-k_i} + A_1 a^{k_1-k_i} + A_2 a^{k_2-k_i} + \ldots + A_n a^{k_n-k_i}\right)}_{N - const.} = M,$$

$a^{mx+k_i} \cdot N = M,$ *при N≠0 получим уравнение:*

$$a^{mx+k_i} = \frac{M}{N},$$

$$a^{mx+k_i} = \frac{M}{N},$$

Возможны три случая:

- $\frac{M}{N} = 1$ *, уравнение сводится к виду* $a^{f(x)} = 1;$
- $\frac{M}{N} = a^{\alpha}$*, уравнение сводится к виду* $a^{f(x)} = a^{\alpha}$
- $\frac{M}{N} \le 0$ *, данное уравнение не имеет корней.*

Пример 1:

$$6^{x+1}+35\cdot 6^{x-1}=71.$$

Вынесем за скобки 6^{x-1},

$$6^{x-1}(6^2+35)=71;$$

$$6^{x-1}\cdot 71=71;$$

$$6^{x-1}=\frac{71}{71};$$

$$6^{x-1}=1;$$

$$x-1=0.$$

$$x=1.$$

Ответ: $1.$

Пример 2:

$$3^{x-1}-2\cdot 3^{x+2}=75.$$

Вынесем за скобки 3^{x-1},

$$3^{x-1}(1-2\cdot 3^3)=75;$$

$$3^{x-1}(1-54)=75;$$

$$3^{x-1}(-53)=75;$$

$$3^{x-1}=-\frac{75}{53};$$

уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

IV. Трёхчленное показательное уравнение:

а). $A_0 a^{2x} + A_1 a^x + A_2 = 0,$

Выполним подстановку $a^x = y,$ *где y>0,*

показательное уравнение превращается в обычное квадратное уравнение

$$A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0,$$

Решением этого уравнения являются значения

$$y_1 \quad и \quad y_2;$$

Чтобы найти корни показательного уравнения нужно решить уравнения $a^x = y_1$ *и* $a^x = y_2;$

Если $y_1 \le 0$ *и* $y_2 \le 0,$ *одновременно, то данное показательное уравнение корней не имеет.*

Пример:

$$2^x + 4^x = 80.$$

$$2^x + 2^{2x} - 80 = 0;$$

Выполним подстановку $2^x = t$, *где* $t>0$,

$$t^2 + t - 80 = 0;$$

$$t_1 = -10;$$ -посторонний корень;

$$t_2 = 8;$$

Решим уравнение

$$2^x = 8,$$

$$2^x = 2^3,$$

$$x = 3.$$

Ответ: 3.

б). $A_0 a^x + A_1 a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}} + A_2 b^x = 0,$

Разделим данное уравнение на b^x, ($b^x \neq 0$):

$$A_0 \frac{a^x}{b^x} + A_1 \frac{a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}}}{b^x} + A_2 \frac{b^x}{b^x} = 0,$$

$$A_0 \left(\frac{a}{b}\right)^x + A_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} + A_2 = 0,$$

Решение этого уравнения сводится к решению квадратного уравнения:

$A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0,$ где $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y,$ $y>0$

Чтобы найти корни показательного уравнения нужно решить уравнения $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_1$ и $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_2;$

Пример:

$$2^{2x+1}-5\cdot 6^{x}+3^{2x+1}=0.$$

Преобразуем уравнение по свойствам степени:

$$2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^{x}\cdot 3^{x}+3\cdot 3^{2x}=0;$$

Разделим уравнение на 3^{2x}, $3^{2x}\neq 0$:

$$2\cdot\frac{2^{2x}}{3^{2x}}-5\cdot\frac{2^{x}\cdot 3^{x}}{3^{2x}}+3\cdot\frac{3^{2x}}{3^{2x}}=0;$$

$$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+3=0;$$

выполним подстановку $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t,\quad t>0,$

Решим уравнение $2t^{2}-5t+3=0;$

$$2t^2-5t+3=0;$$

$$a+b+c=2+(-5)+3=0;$$

$t_1=1$ *и* $t_2=\frac{3}{2}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=1; \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{3}{2};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^0; \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1};$$

$$x=0. \qquad x=-1.$$

Ответ: -1 и 0.

Ответить на вопросы:

- *Какие уравнения называются показательными?*
- *Сколько корней имеет уравнение вида:*

$$a^x = b? \quad a^{f(x)} = b?$$

- *Когда показательное уравнение не имеет корней?*

Устно: решить показательные уравнения (по выбору):

1) $5^x=625$;

2) $100^x=10$;

3) $4^x=256$;

4) $3^{x-1}=27$;

5) $5^{x-2}=25$;

6) $3^x=\frac{1}{9}$;

7) $12^x=1$;

8) $\left(\frac{1}{7}\right)^x=49$;

9) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1{,}5$;

10) $a^x=a^2$; $a>0; a\neq 1$.

11) $5^{-x}=25$;

12) $2^{-x}=8$;

13) $4^x=2$;

14) $27^x=3$;

15) $2^x\cdot 3^x=36$;

16) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$;

17) $5^x\cdot 2^x=400$;

18) $10^{x+1}=0{,}1$;

19) $3^{x^2-x}=1$;

20) $5^x=-25$.

Работа в группах.

<u>Выполнить задания из учебника:</u>

Группы I и III решают:

№460(б), №461(б),

№462(а), №463(в),

№464(в), №469(в).

Группы II и IV решают:

№460(г), №461(г),

№462(а), №463(г),

№464(г), №469(а).

Формулы решения показательных уравнений *где* $a>0, a\neq 1, b>0.$

I.	$a^x=b$ $a^x=a^c$ $x=c.$	$a^x=a^\alpha$ $x=\alpha.$	$a^{f(x)}=a^\alpha$ $f(x)=\alpha.$	$a^{f(x)}=1$ $f(x)=0.$
II.	$a^{f(x)}=b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=0.$			
III.	$A_0a^{mx+k_0}+A_1a^{mx+k_1}+A_2a^{mx+k_2}+\ldots+A_na^{mx+k_n}=M,$ $\underbrace{a^{mx+k_i}\left(A_0a^{k_0-k_i}+A_1a^{k_1-k_i}+A_2a^{k_2-k_i}+\ldots+A_na^{k_n-k_i}\right)}_{N}=M,$ $a^{mx+k_i}\cdot N=M \Leftrightarrow a^{mx+k_i}=\frac{M}{N} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{M}{N}=1 \text{ к виду } a^{f(x)}=1. \\ \frac{M}{N}=a^\alpha \text{ к виду } a^{f(x)}=a^\alpha. \\ \frac{M}{N}\leq 0 \text{ не имеет корней.} \end{array}\right.$ k_i – *наименьшееиз чисел* k_n.			
IV.	$A_0a^{2x}+A_1a^x+A_2=0,$ $a^x=y, \quad y>0,$ $A_0y^2+A_1y+A_2=0,$ $a^x=y_1, \quad a^x=y_2.$ *К виду* $a^x=b.$	$A_0a^x+A_1a^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}}+A_2b^x=0,$ $A_0\left(\frac{a}{b}\right)^x+A_1\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}}+A_2=0, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}}=y, y>0,$ $A_0y^2+A_1y+A_2=0, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}}=y_1, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}}=y_2.$ *К виду* $a^x=b.$			

Индивидуальная работа.

Из данных вариантов решить один (по выбору):

III уровень	
Вариант №1. $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}=5\cdot 6^{x}.$	**Вариант №2.** $2\cdot 16^{x}-2^{4x}-4^{2x-2}=15.$
II уровень	
Вариант №3. $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-2}=75.$	**Вариант №4.** $7^{x-2}=4^{2-x}.$
Дополнительно:	
$\sqrt{3^{x}}=9.$ +1б.	$\sqrt[3]{2^{x}}=8.$ +1б.
I уровень	
Вариант №5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{x}=\frac{27}{64}.$	**Вариант №6.** $\sqrt{2^{x}}\cdot\sqrt{3^{x}}=36.$
Дополнительно:	
а). $2^{4x}=16$; б). $3^{x}=1$.	а). $3^{3x}=27$; б). $4^{x}=-64$.
+1б. +1б.	+1б. +1б.

Итоги урока.

- *Какие уравнения называются показательными?*
- *К какому типу уравнений относятся показательные уравнения? Почему?*
- *Какие виды показательных уравнений рассмотрели?*
- *Сколько решений может иметь показательное уравнение? Когда оно не имеет корней?*

Домашнее задание:

Теория п.36.1,

№463(а), №464(б), №468(в), №469(б).