

Урок в 11 академическом классе по теме:

**От показательных  
уравнений -  
к показательным  
неравенствам**

**"Что значит решить  
задачу?**

**Это значит  
свести ее к уже  
решенным"**

**С.А. Яновско**


**- Какие из данных уравнений являются показательными?**

1)  $100^2 (0,01)^2 = 10^x$

9)  $\sqrt[x]{3} \cdot \sqrt[x]{5} = 225$

2)  $(x+1)^5 = 25$

10)  $x^2 + 3x - 4 = 0$

3)  $(\sqrt{3})^{2x} = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{x+1}$   3)  $(\sqrt{3})^{2x} = (\sqrt{3})^{x+1}$

4)  $6^{\sqrt{x}} + 8^{\sqrt{x}} = 10^{\sqrt{x}}$

5)  $2^x = 3 - x$

11)  $(2x+1)^{x^2} = (2x+1)^x$

6)  $2^{\cos^2 x} - 8^{\sin^2 x} = 0$

12)  $5^{2x+12} = \sin 210^\circ$

7)  $\cos(3\pi \cdot 5^x) - \cos(\pi \cdot 5^x) = \sin(\pi \cdot 5^x)$

8)  $\sqrt{\frac{1}{3^x} + 7} = 4$

## Определение

### Показательное

уравнение –  
это уравнение,

неравенство –  
это неравенство,

содержащее переменную  
в показателе степени

- Каков общий вид простейших показательных уравнений?
- Метод решения?

1.  $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$   
равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$   
**(уравнивание показателей)**

---

Обоснование: 1) Если степени с равными основаниями, отличными от единицы и большими нуля, равны, то показатели равны;

2) функция монотонна на  $\mathbb{R}$ , поэтому каждое свое значение она принимает при единственном значении аргумента.

---

2.  $a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$

- Каков общий вид простейших показательных неравенств?
- Метод решения?

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

- 1) Равносильно неравенству  $f(x) > g(x)$ ,  $a > 1$
  - 2) Равносильно неравенству  $f(x) < g(x)$ ,  $0 < a < 1$ .
- (сравнение показателей)

**Обоснование:** а) Показательная функция монотонно возрастает (убывает) на  $\mathbb{R}$ , поэтому большему (меньшему) значению функции соответствует большее значение аргумента.

б) Если  $a > 1$ , то из неравенства  $a^u > a^v \Rightarrow u > v$   
если  $0 < a < 1$ , то из неравенства  $a^u > a^v \Rightarrow u < v$ .

## Работаем устно:

Сравните  $x$  и  $y$ :  $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^y$        $\pi^x < \pi^y$

Сравните основание  $a$  с единицей:  $a^{\frac{2}{5}} > a^{\frac{3}{5}}$ ,  $a^{-5,7} > a^{-6}$ ,

1.  $5^x < 125$       2.  $4^x > 1$       3.  $0,2^x > \left(\frac{1}{5}\right)^2$

4.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < -12$       5.  $3^x > -1$

6.  $100^{3-x} > \cos \frac{2\pi}{3}$       7.  $0,1^{3x} > 0,01$

8.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-2)} > 1$

## Решите двойные неравенства:

$$1 < 5^x < 125$$

---

**Решение.**  $1 < 5^x < 125$

$$5^0 < 5^x < 5^3$$

**т.к. показательная функция с основанием  $a=5$ ,  $a>1$  возрастает на  $\mathbb{R}$ , то большему значению функции соответствует большее значение аргумента, имеем**

$$0 < x < 3$$

**Ответ:**  $(0;3)$

$$3 < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$$

---

**Решение.**

$$3 < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

**т.к. основание степени  $a=1/3$ ,  $0<a<1$ , то из неравенства**

$$a^u < a^t < a^v \Rightarrow \text{неравенство}$$

$$v < t < u$$

**Имеем**

$$-1 > x \geq -3$$

$$-3 \leq x < -1$$

**Ответ:**  $[-3; -1)$



# *Функционально-графический метод решения неравенства $f(x) < g(x)$*

---

1. Подбором найдем корень уравнения  $f(x)=g(x)$ , используя свойства монотонных функций;
2. Построим схематически графики обеих функций, проходящие через точку с найденной абсциссой;
3. Выберем решение неравенства, соответствующее знаку неравенства;
4. Запишем ответ.

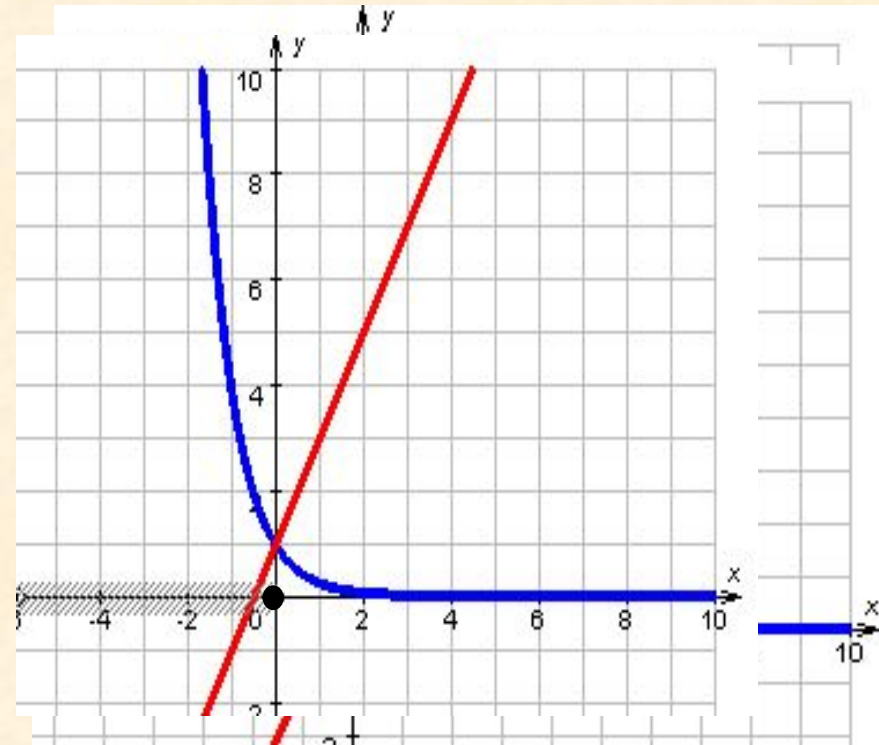
**Решить неравенства,  
используя функционально-графический метод**

1)  $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$

2)  $2^x \leq 3 - \sqrt{x}$

1) Решение.

1.  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  убывает на  $\mathbb{R}$
2.  $g(x) = 2x + 1$  возрастает на  $\mathbb{R}$
3. Уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет не более одного корня
4. Подбором  $x=0$
5. Строим схематически графики через точку  $(0, 1)$
6. Неравенство выполняется при  $x \leq 0$
7. **Ответ** :  $\left(-\infty; 0\right]$



**Решить неравенства,  
используя функционально-графический метод**

1)  $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$

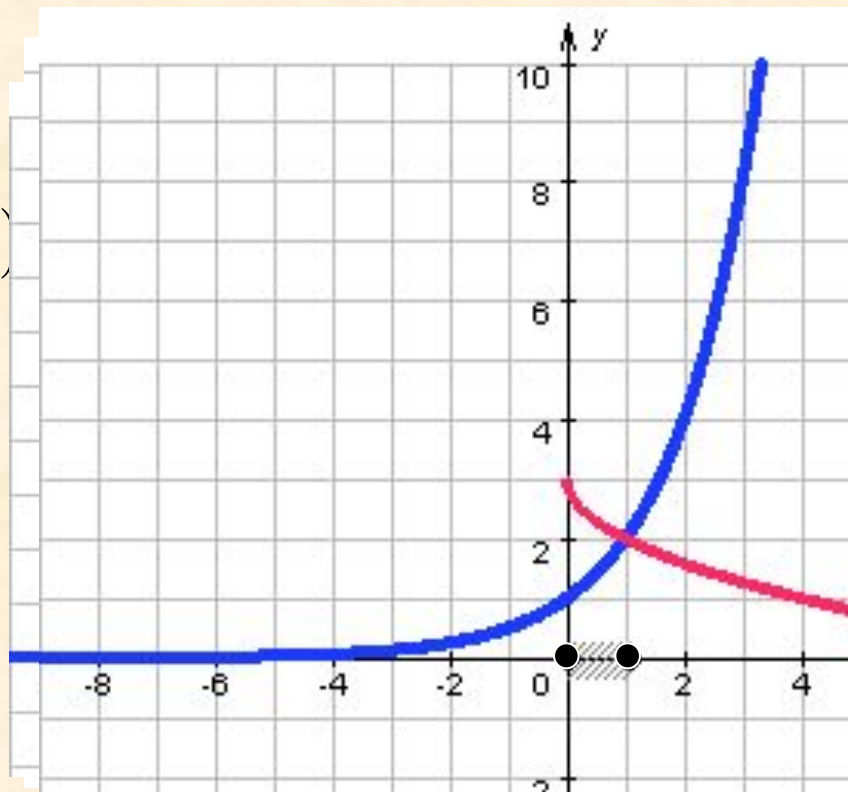
2)  $2^x \leq 3 - \sqrt{x}$

**2) Решение.**

1.  $f(x) = 2^x$  **возраст. на  $\mathbf{R}$**
2.  $g(x) = 3 - \sqrt{x}$  **убывает на  $[0; +\infty)$**
3. Уравнение  $f(x) = g(x)$  **имеет не более одного корня**
4. Подбором  **$x=1$**
5. Строим схематически графики **через точку (1, 2)**
6. Неравенство выполняется при

$$0 \leq x \leq 1$$

7. **Ответ:  $[0; 1]$**



- Каков общий вид простейших показательных неравенств?
- Метод решения?

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

- 1) Равносильно неравенству  $f(x) > g(x)$ ,  $a > 1$
  - 2) Равносильно неравенству  $f(x) < g(x)$ ,  $0 < a < 1$ .
- (сравнение показателей)

Обоснование: а) Показательная функция монотонно возрастает (убывает) на  $\mathbb{R}$ , поэтому большему (меньшему) значению функции соответствует большее значение аргумента.

б) Если  $a > 1$ , то из неравенства  $a^u > a^v \Rightarrow u > v$   
если  $0 < a < 1$ , то из неравенства  $a^u > a^v \Rightarrow u < v$ .

# «КЛЮЧ»

Вариант - 1

Вариант - 2

-1	1
Б	В
2	2
$(-1; +\infty)$	$[2; +\infty)$

## Задания группам:

**1 группа**  $\frac{1}{2^x - 1} + 2^x = 3 \quad (>)$

**2 группа**  $(\sqrt{7} - \sqrt{6})^{\frac{x-1}{x-3}} = \sqrt[x]{(\sqrt{7} + \sqrt{6})^2} \quad (\geq)$

**3 группа**  $9^x + 6^x = 4^{x+0,5}; \quad (>)$

**4 группа**  $\sqrt{2^x - 1} + \sqrt{2^x + 2} = 3; \quad (\leq)$

**5 группа**  $\left(\frac{1}{5}\right)^x + 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = 30 \quad (<)$

*В каждом уравнении замените знак равенства на указанный знак неравенства и решите полученное неравенство. (Используйте при необходимости метод интервалов).*

*Спасибо все*

*за урок!*