Показательные уравнения и неравенства.

Выполнил:
Студент группы
2016-ЭОП-35Д
Васляев Дмитрий

Проверил:
Преподаватель
математики
Москвичёва Т.В.

Содержание

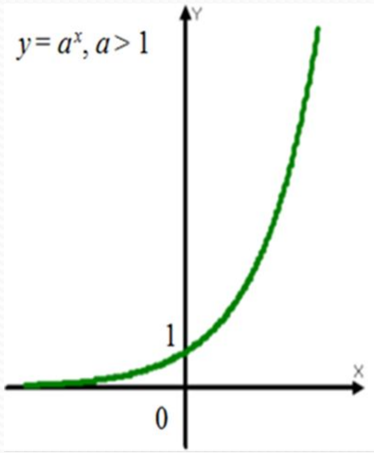
- Показательные уравнения и их функция
- Показательные неравенства
- Способы решения показательных уравнений и неравенств
- Логарифмических уравнений их функция
- Логарифмические неравенства
- Способы решения логарифмических уравнений и неравенств
- Примеры для самостоятельного решения

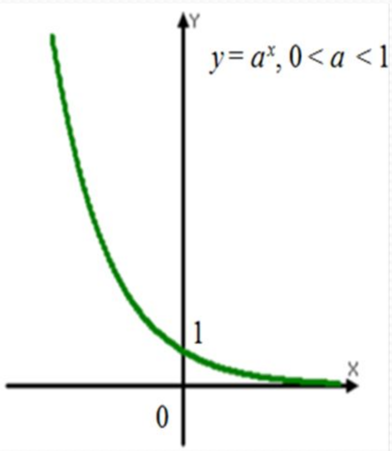
Что такое показательная функция?

Функцию вида y = ax, где a > 0 и a ≠ 1, называют показательной функцией.

Основные свойства показательной функции y = ax:

Свойство	a > 1	0 < a < 1
Область определения	D(f) = (-∞; +∞)	D(f) = (-∞; +∞)
Область значений	E(f) = (0; +∞)	E(f) = (0; +∞)
Монотонность	Возрастает	Убывает
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная





Показательное уравнение

Показательными называются уравнения, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения показательных уравнений требуется знать и уметь использовать следующую несложную теорему:

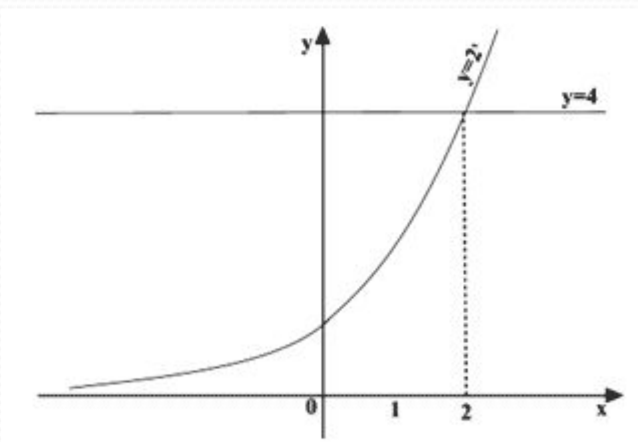
Показательное уравнение af(x) = ag(x) (где a > 0, a ≠ 1) равносильно уравнению f(x) = g(x).

Способы решения показательных уравнений

Выделяют две группы способов: графический и аналитические.

1. Построить графики двух функций (левая и правая части уравнения);
2. Найти абсциссы точек пересечения графиков;
3. Записать ответ.

Рассмотрим графический способ решения на примере уравнения 2x = 4 Построим граф
функций y = 2x, y = 4 и найдем абсциссу точки пересечения графиков: x = 2.



Ответ: x = 2

Основные формулы действий со степенями:

$$a > 0,\ b > 0:$$

$$a^0 = 1,\ 1^x = 1;$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}\ (k \in Z,\ n \in N);$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x;$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Пример 1. Решите уравнение:

22x+1-5•2x-88=0

Решение: используем приведенные выше формулы и подстановку:

$t=2^x$

Уравнение тогда принимает вид:

$2t^2-5t-88=0$

Дискриминант полученного квадратного уравнения положителен:

$D = b^2-4ac = 5^2-4\cdot2\cdot(-88) = 729 = 27^2 > 0$

Это означает, что данное уравнение имеет два корня. Находим их:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{729}}{2\cdot2} = 8, \\ t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{729}}{2\cdot2} = -5,5. \end{array}\right.$$

Переходя к обратной подстановке, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 8, \\ 2^x = -5,5. \end{array}\right.$$

Ответ: x=3

Показательное неравенство

Показательными называются неравенства, в которых неизвестная переменная содержится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения показательных неравенств требуется знание следующей теоремы:

Если a > 1, то неравенство af(x) > ag(x) равносильно неравенству того же смысла: f(x) > g(x). Если 0 < a < 1, то показательное неравенство af(x) > ag(x) равносильно неравенству противоположного смысла: f(x) < g(x).

Способы решения показательных неравенств

При решении показательных неравенств используются те же приемы, что при решении показательных уравнений.

Будьте внимательны: показательная функция в зависимости от основания может быть возрастающей (а>1) или убывающей (а>1)

Пример:

Неравенства, сводящиеся к простейшим. Решаются приведением обеих частей неравенства к степени с одинаковым основанием.

а)2х2> 2 х+2.

Решение:

2х2> 2 х+2;

х2 > х+2, т.к. функция у =2t возрастает,

х2 − х−2 > 0;

х < − 1; х > 2.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Пример 2. Решите неравенство:

$$16^x-2*12^x\le 3^{2x+1}$$

Решение:

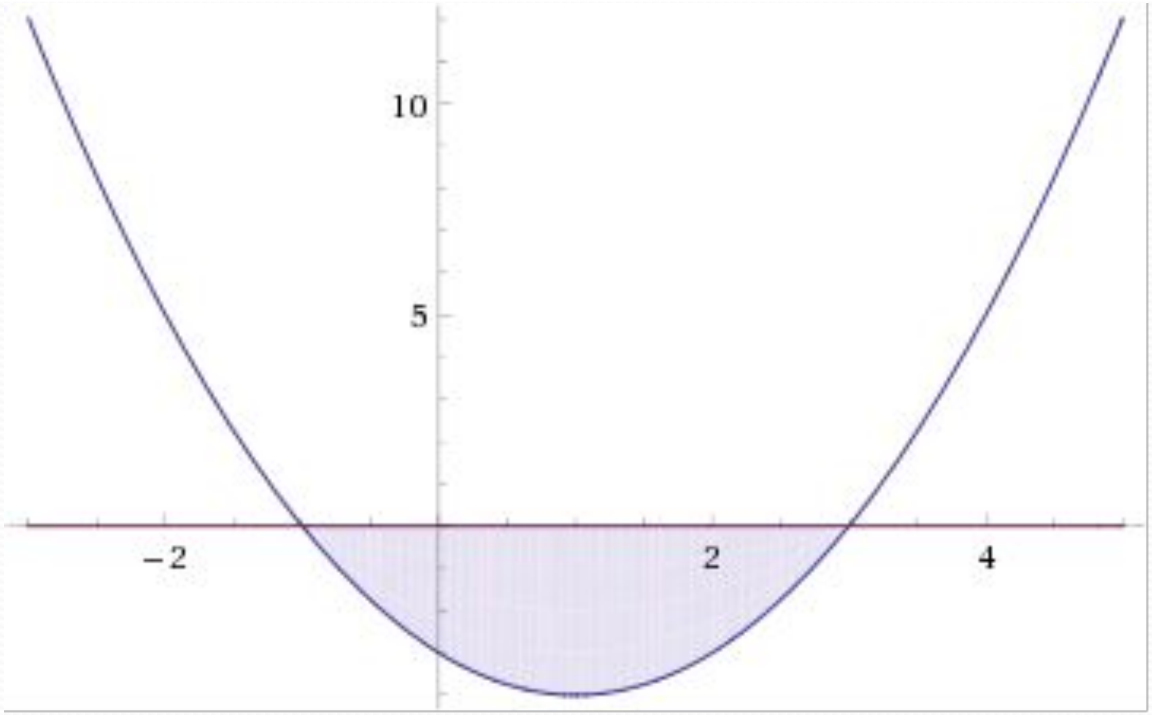
1.представим исходное неравенство в виде: $4^{2x}-2*4^x*3^x-3*3^{2x}\le 0$

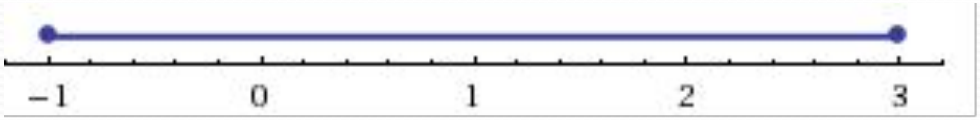
2.Разделим обе части этого неравенства на 3^2x, при этом (в силу положительности функции y = 3^2x) знак неравенства не изменится

3.Воспользуемся подстановкой

Тогда неравенство примет вид:

$t^2-2t-3\leq 0$





5.Итак, решением неравенства является промежуток, переходя к обратной подстановке

6.Левое неравенства в силу положительности показательной функции выполняется автоматически. Воспользовавшись известным свойством логарифма, переходим к эквивалентному неравенству

7.Поскольку в основании степени стоит число, большее единицы, эквивалентным (по теореме 2) будет переход к следующему неравенству

Итак, окончательно получаем ответ:

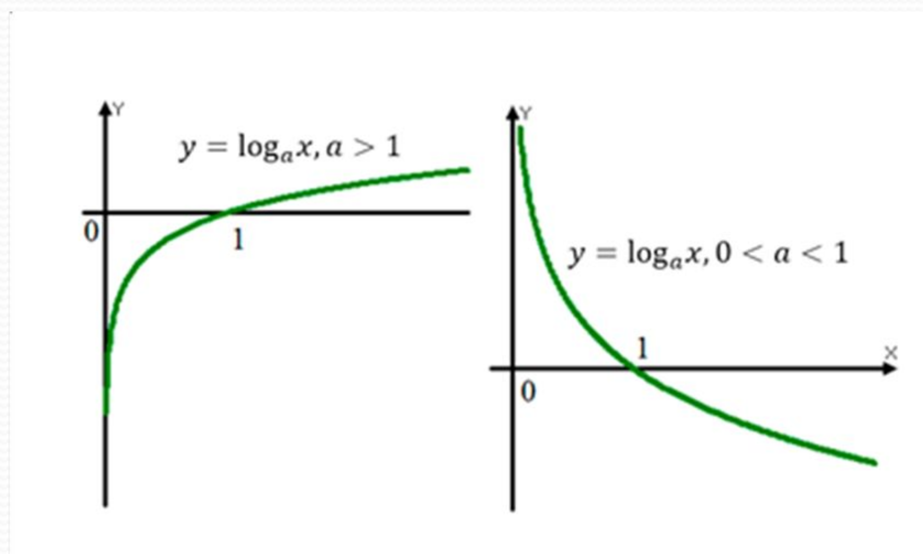
$$\mathbf{X} \in \left(-\infty; \log_{\frac{4}{3}} 3\right]$$

Логарифмическая функция

- Функцию вида y= $\log_a x$, a > 0, $a \neq 1$ называют логарифмической функцией.

Основные свойства логарифмической функции y = loga x:

Свойство	a > 1	0 < a < 1
Область определения	D(f) = (0; +∞)	D(f) =(0; +∞)
Область значений	E(f) = (-∞; +∞)	E(f) = (-∞; +∞)
Монотонность	Возрастает на (0;+∞)	Убывает на (0;+∞)
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная
Выпуклость	Выпукла вверх	Выпукла вниз



Способы решения логарифмических уравнений.

1.По определению логарифма.

2.Потенцирование.

3.Введение новой переменной.

4. Логарифмирование обеих частей уравнения.

5. Приведение к одному основанию.

6. Функционально-графический метод.

Свойства логарифмов:

- Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел: $\log_a bc$=$\log_a b + \log_a c$, a> 0, b>o, c> 0, a≠1

Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов этих чисел:

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, , a>o, b>o, c>o, a≠1

Если a и b — положительные числа, причем a ≠ 1, то для любого числа r справедливо равенство:

$\log_a b^r$=r$\log_a b$, a> 0, b>o, a≠1

Способы решения логарифмических неравенств

Простейшее логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводится к одной из двух систем неравенств:

1 случай. Если $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$, *a > 1*.

2 случай. Если $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$, *0 < a < 1*.

Пример 1 *Решить неравенство*: $\log_3(x-1) + \log_3(x+5) < \log_3(5x+1)$.

Решение. Используя свойства логарифмов, преобразуем левую часть: $\log_3(x-1) + \log_3(x+5) = \log_3((x-1)(x+5)) = \log_3(x^2+4x-5)$ и решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+5>0 \\ 5x+1>0 \\ x^2+4x-5<5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-x-6<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ -2<x<3 \end{cases} \Rightarrow 1<x<3.$$

Обращаем ваше внимание на то, что положительным должно быть **каждое** логарифмируемое выражение, а не только их произведение.

Ответ: (1; 3).

Решение логарифмических уравнений и неравенств

- Решите уравнение:
  lg(x^2-6)=lg(8=5x)

  Решение:

  1.В область допустимых значений входят только те x, при которых выражение, находящееся под знаком логарифма, больше нуля. Эти значения определяются следующей системой неравенств:

  2.получаем промежуток, определяющий область допустимых значений данного логарифмического уравнения:

  3.На основании теоремы , все условия которой здесь выполнены, переходим квадратичному уравнению

  В область допустимых значений входит только первый корень.

  Ответ: x = 7.

Решение логарифмических уравнений и неравенств

- Пример 2. Решите уравнение: $\log_{0,2}(-x^2+4x+5)=\log_{0,2}(-x-31)$

  Решение: Область допустимых значений уравнения определяется системой неравенств. Очевидно, что эти два условия противоречат друг другу. То есть нет ни одного такого значения x, при котором одновременно выполнялись бы оба неравенства. Область допустимых значений уравнения является пустым множеством, а значит решений у данного логарифмического уравнения нет.

  Ответ: корней нет.

Логарифмические неравенства

Теорема 2. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то:

- при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$;
- при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Логарифмические неравенства

- Пример 3. Решите неравенство:
  $\log_{0,5}(x^2 + x - 6) \geq \log_{0,5}(x + 4)$
  Решение:
  Начнем с определения области допустимых значений неравенства. Выражение, стоящее под знаком логарифмической функции, должно принимать только положительные значения. Это значит, что искомая область допустимых значений определяется системой неравенств.
  Так как в основании логарифма стоит число, меньшее единицы, соответствующая логарифмическая функция будет убывающей, а потому равносильным по теореме 2 будет переход к следующему квадратичному неравенству:

  Окончательно, с учетом области допустимых значений получаем ответ: $x \in \left[-\sqrt{10}; -3\right) \cup \left(2; \sqrt{10}\right]$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-5x} - 1 \leq 0.$

$$1)\ (-\infty; 0{,}4); 2)\ (-\infty; 0{,}4]; 3)\ (0{,}2; +\infty); 4)\ [0{,}4; \infty);$$

2. Решите неравенство: $\log_3(4-2x) \geq 1.$

$$1)\ (-\infty; 0{,}5]; 2)\ (-\infty; 2]; 3)\ [2; +\infty); 4)\ [0{,}5; +\infty);$$

3. Решите неравенство: $\log_\pi(3x+2) \leq \log_\pi(x-1).$

$1)\ (-\frac{2}{3}; +\infty); 2)\ (-\infty; -\frac{2}{3}); 3)\ \left[-1{,}5; -\frac{2}{3}\right)$; 4) Нет решений

Примеры для самостоятельного решения.

1. Решите уравнение: $2^{x-1} + 2^{x+1} = 2.$
2. Решите уравнение: $\left(\frac{1}{8}\right)^{0{,}1x-1} = 4^3.$
3. Решите уравнение: $x \cdot 6^{3x} - 36 \cdot 6^{3x} = 0.$
4. Решите уравнение: $\log_6 x = \log_6 5 + \log_6 4.$
5. Решите уравнение: $8 \cdot 3^{\log_2 x} = 13x - 6.$
6. Решите уравнение: $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 324.$

Показательные уравнения :

$5^{x+2} = 125$

$3^x \cdot 2^x = 8^{x+3}$

$3^{2x} + 4 \cdot 3^x - 5 = 0$

Показательные неравенства :

$5^{2x+1} = 5 \cdot 5^{2x} = 5 \cdot (5^x)^2$

a) $\sqrt{4 - 2^{x-2}} < \log_2(x-5),$

b) $3^x + 4^x \geq 25,$

c) $\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\frac{x^4+1}{2x^2}\right)^{2x-2},$

d) $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}},$

e) $3^{\sqrt[12]{x-1}} + 3^{\sqrt[4]{x-1}} \geq 2 \cdot 3^{\sqrt[6]{x-1}}.$

Используемая литература.

- http://festival.1september.ru/articles/600586/
- http://www.yaklass.ru/materiali?mode=lsntheme&themeid=8
- http://www.math.md/school/praktikum/logr/logr.html
- http://pptcloud.ru/matematika/pokazatelnye-uravneniya-i-neravenstva
- http://ru.solverbook.com/primery-reshenij/primery-resheniya-logarifmicheskix-neravenstv/
- http://free.megacampus.ru/xbookM0001/index.html?go=part-025*page.htm
- https://yandex.ru/search/?text=%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%20%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%85%20%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2&lr=47&clid=1985544-205&win=168
- http://festival.1september.ru/articles/576163/
- http://www.egesdam.ru/page270.php
- http://www.math.md/school/praktikum/expr/expir.html

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!