Полезные функции Matlab’a

Функции работы с изображениями

- Imshow
- Imwrite
- imread

Функции конвертации

- Im2bw
- Im2double
- Rgb2gray
- Uint8
- uint16

Функции работы с матрицами

- Max
- Min
- Sum
- Zeros
- Ones
- .* и *
- ./ и /

Векторизация

- meshgrid

Общие задания

Вывод сферического волновоо фронта

- Задача: вывести на экран картинку сферического (кругового в 2D случае) волнового фронта

Перестановки

- Задача: реализовать функцию, принимающую на вход произвольный набор элементов, результатом работы которой является список всех возможных перестановок этих элементов.
- input: a b c output: a b c; a c b;

  b a c; b c a;

  c a b; c b a.

Дискретное преобразование Фурье

- Дискретное преобразование Фурье

$$\mathrm{X_k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

- N – число элементов последовательности (размер массива)
- k – k-ый элемент нового массива
- j – мнимая единица (в матлабе переменная i)

Дискретное преобразование Фурье

- Обратное дискретное преобразование Фурье

$$\mathrm{X}_{\mathrm{n}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

- Поворачивающий множитель

$$W_N^k = e^{\frac{-j2\pi k}{N}}$$

Свойства поворачивающего множителя

- k – степень, а не индекс. Если равен 1, то не записываем

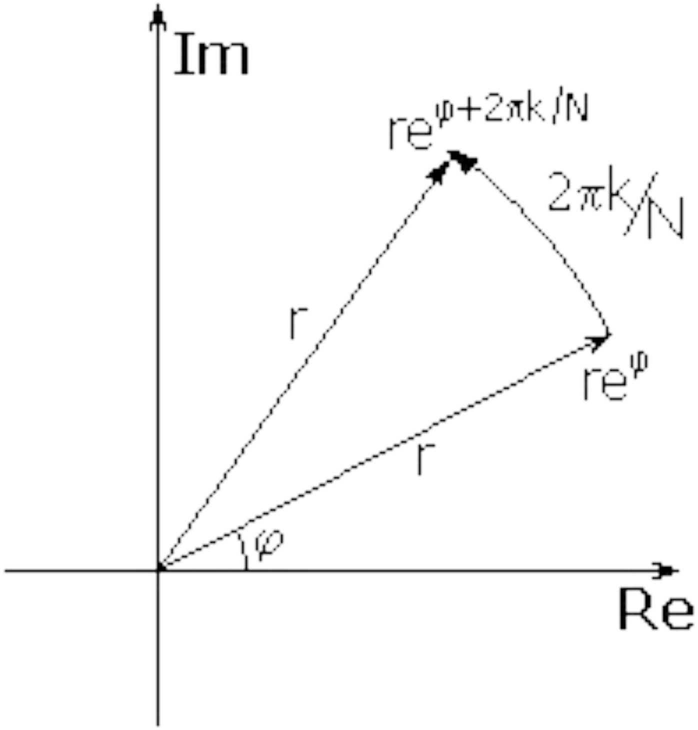
$$W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$$

- ДПФ через поворачивающий множитель

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn}$$

Свойства поворачивающего множителя

- Некоторое комплексное число в показательной форме $re^{i\phi}$
- r – модуль к.ч. (длина вектора)
- ϕ – аргумент (угол поворота)



Свойства поворачивающего множителя

- w^k_N , модуль равен 1, а фаза – 2π/N
- При умножении к.ч. В показательной форме модули перемножаются, а аргументы складываются.
- Тогда, перемножение исходного числа на поворачивающий множитель изменит только угол поворота
- Т.о. геометрический смысл преобразования Фурье состоит в том, чтобы представить N комплексных чисел-векторов из набора {x}, каждое в виде суммы векторов из набора {X}, повернутых на углы, кратные 2π/N

Теорема 0

- **Теорема:**
- Если комплексное число представлено в виде $e^{j2\pi N}$, где N - целое, то это число $e^{j2\pi N} = 1$.
- **Доказательство**:
- По формуле Эйлера, и ввиду периодичности синуса и косинуса: $e^{j2\pi N} = \cos(2\pi N) + j \sin(2\pi N) = \cos 0 + j \sin 0 = 1 + j0 = 1$

Теорема 1

- **Теорема:**
- Величина периодична по k и по n с периодом N. То есть, для любых целых *l* и *m* выполняется равенство:

$$W_N^{(k+lN)(n+mN)} = W_N^{kn}$$

Теорема 1

- **Доказательство:**

$$W_N^{(k+lN)(n+mN)} =$$

$$= e^{\frac{-j2\pi(k+lN)(n+mN)}{N}} =$$

$$= e^{\frac{-j2\pi(nk+nlN+mkN+mlN^2)}{N}} =$$

$$= e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} e^{\frac{-j2\pi(nlN+mkN+mlN^2)}{N}} =$$

$$= e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} e^{-j2\pi(nl+mk+mlN)} =$$

$$= e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} e^{-j2\pi h}$$

- Величина -h = -(nl+mk+mlN) - целая, так как все множители целые, и все слагаемые целые. Значит, мы можем применить Теорему 0

$$W_N^{(k+lN)(n+mN)} = \ldots = e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} e^{-j2\pi h} = e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} = W_N^{kn}$$

Теорема 2

- **Теорема:**
- Для величины справедлива формула:

$$W_N^k = -W_N^{k-N/2}$$

- **Доказательство**:

$$-W_N^{k-N/2} = -e^{\frac{-j2\pi(k-N/2)}{N}} = (-1)\,e^{\frac{-j2\pi k}{N}}\,e^{\frac{-j2\pi(-N/2)}{N}} =$$

$$= (-1)\,e^{\frac{-j2\pi k}{N}}\,e^{j\pi} = (-1)\,e^{\frac{-j2\pi k}{N}}\,(-1) = e^{\frac{-j2\pi k}{N}} = W_N^k$$

Быстрое преобразование Фурье

- **Идея:**

1. Необходимо разделить сумму в формуле ДПФ из N слагаемых на две суммы по N/2 слагаемых, и вычислить их по отдельности. Для вычисления каждой из подсумм, надо их тоже разделить на две и т.д.
2. Необходимо повторно использовать уже вычисленные слагаемые.

Быстрое преобразование Фурье

- Применяют:

1. «Прореживание по времени», когда в первую сумму попадают слагаемые с четными номерами, а во вторую - с нечетными

ИЛИ

2. «Прореживание по частоте», когда в первую сумму попадают первые N/2 слагаемых, а во вторую - остальные.

- В силу специфики алгоритма приходится применять только N, являющиеся степенями 2.

Теорема 3

- Определим еще две последовательности: $\{x_{[even]}\}$ и $\{x_{[odd]}\}$ через последовательность $\{x\}$ следующим образом:
- $x_{[even]n} = x_{2n}$,
  $x_{[odd]n} = x_{2n+1}$, (*)
  $n = 0, 1, \ldots, N/2-1$,
- Пусть к этим последовательностям применены ДПФ и получены результаты в виде двух новых последовательностей $\{X_{[even]}\}$ и $\{X_{[odd]}\}$ по N/2элементов в каждой.
- Утверждается, что элементы последовательности $\{X\}$ можно выразить через элементы последовательностей $\{X_{[even]}\}$ и $\{X_{[odd]}\}$ по формуле:

$$X_k = X_{[even]k} + W_N^k X_{[odd]k}, k = 0, 1, \ldots, N/2 - 1$$

$$X_k = X_{[even]k-N/2} - W_N^{k-N/2} X_{[odd]k-N/2}, k = N/2, \ldots, N - 1 \qquad (**)$$

ДПФ для чётных/нечётных

$$X_{[even]k} = \sum_{n=0}^{N/2 - 1} x_{[even]n} W_{N/2}^{kn}$$

$$X_{[odd]k} = \sum_{n=0}^{N/2 - 1} x_{[odd]n} W_{N/2}^{kn}$$

k =
0…N/2-1

$$X_{[even]k-N/2} = \sum_{n=0}^{N/2 - 1} x_{[even]n} W_{N/2}^{(k-N/2)n}$$

$$X_{[odd]k-N/2} = \sum_{n=0}^{N/2 - 1} x_{[odd]n} W_{N/2}^{(k-N/2)n}$$

k =
N/2…N-1