ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

- Многофакторные эксперименты наиболее часто применяют для построения линейных по параметрам полиномиальных моделей. Вид полинома задается заранее, а его параметры определяются по экспериментальным данным.
- Широкое распространение полиномиальных моделей объясняется тем, что исследуемые экспериментальными методами функции многих переменных f $(x_1, x_2, \ldots, x_к)$ в ограниченной области **W** обычно можно разложить в ряд Тейлора:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \langle j}}^{k} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

- где β_0, β_i, β_{ij}, β_{ii} - действительные значения коэффициентов уравнения;
- x_i, x_j - факторы;
- Y - отклик;
- **ε** - слагаемые третьего и более высокого порядка малости.

- Если модель включает в себя переменную (l - 1) степени, то данная переменная в эксперименте должна принимать не менее l значений или уровней.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

$$y = b_0 + \sum_{1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} b_{ij} x_i x_j$$

- В уравнении регрессии коэффициенты $\boldsymbol{b_i}$ являются оценками соответствующих коэффициентов β_i , а y - оценка отклика $\mathbf{Y}$.

Метод наименьших квадратов

$$y = b_0 + b_1 x_1.$$

$$y_i - b_0 - b_1 x_{1i} = 0$$

где i = 1, 2, ..., N – номер опыта.

$$y_i - b_0 - b_1 x_{1i} = \xi_i,$$

где ξ_i – невязка, разность между экспериментальным и вычисленным по уравнению регрессии значениями $\boldsymbol{y}$ в i-й экспериментальной точке.

$$U = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - b_0 - b_1 x_{1i}\right)^2 = \min.$$

Метод наименьших квадратов

- .

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial b_0}=0\\ \frac{\partial U}{\partial b_1}=0\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}-2\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-b_0-b_1x_{1i}\right)=0\\ -2\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-b_0-b_1x_{1i}\right)x_{1i}=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}Nb_0+\sum_{i=1}^{N}x_{1i}b_1=\sum_{i=1}^{N}y_i\\ \sum_{i=1}^{N}x_{1i}b_0+\sum_{i=1}^{N}x^2{}_{1i}b_1=\sum_{i=1}^{N}y_ix_{1i}\end{aligned}\right\}.$$

Метод наименьших квадратов

- .

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x^2{}_{1i} - \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{1i}}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x^2{}_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{N} x_{1i} \right)^2},$$

$$b_1 = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} - \sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_{1i}}{N \cdot \sum_{i=1}^{N} x^2{}_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{N} x_{1i} \right)^2}.$$

Метод наименьших квадратов

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i x_{ji}}{N}.$$

- В этой формуле j = 0,1, 2 ..., k – номер фактора. Ноль записан для вычисления $\boldsymbol{b}_0$.

Полный факторный эксперимент

- Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется **полным факторным экспериментом.**
- Если в k – мерном пространстве фактор x_1 будет принимать l_1 уровень, фактор x_2 – l_2 уровней, а фактор $x_к - l_к$

  уровней, то k – факторов образуют: $N = l_1 \cdot l_2 \cdot \ldots \cdot l_k = \prod_{i=1}^{k} l_i$

  наборов, или точек факторного пространства.
- В теории ТПЭ обычно $l_1 = l_2 = . . . = l_k$ поэтому $N = l^k$. Если число уровней каждого фактора равно двум, то имеем полный факторный эксперимент типа
- $N = 2^k.$

Полный факторный эксперимент

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

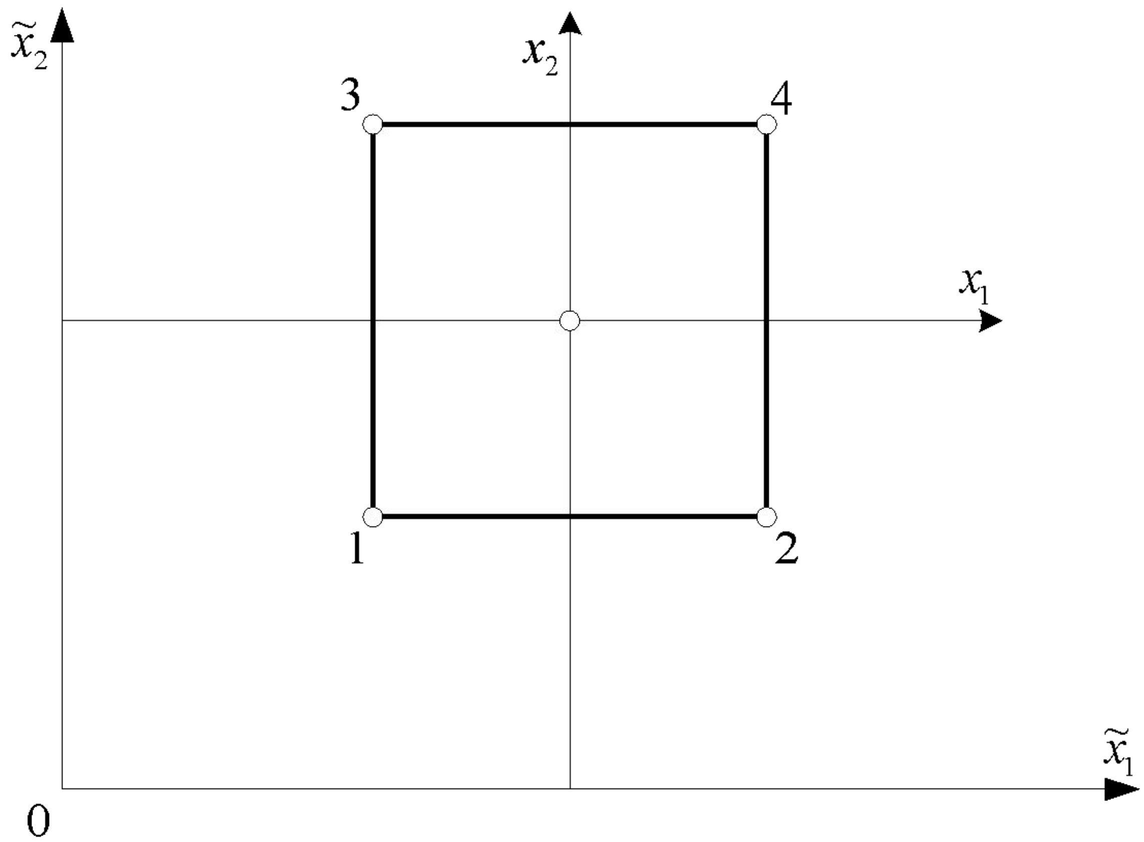
Матрица планирования 2^2

№ опыта	x_1	x_2	Y
1	–1	–1	y_1
2	+1	–1	y_2
3	–1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

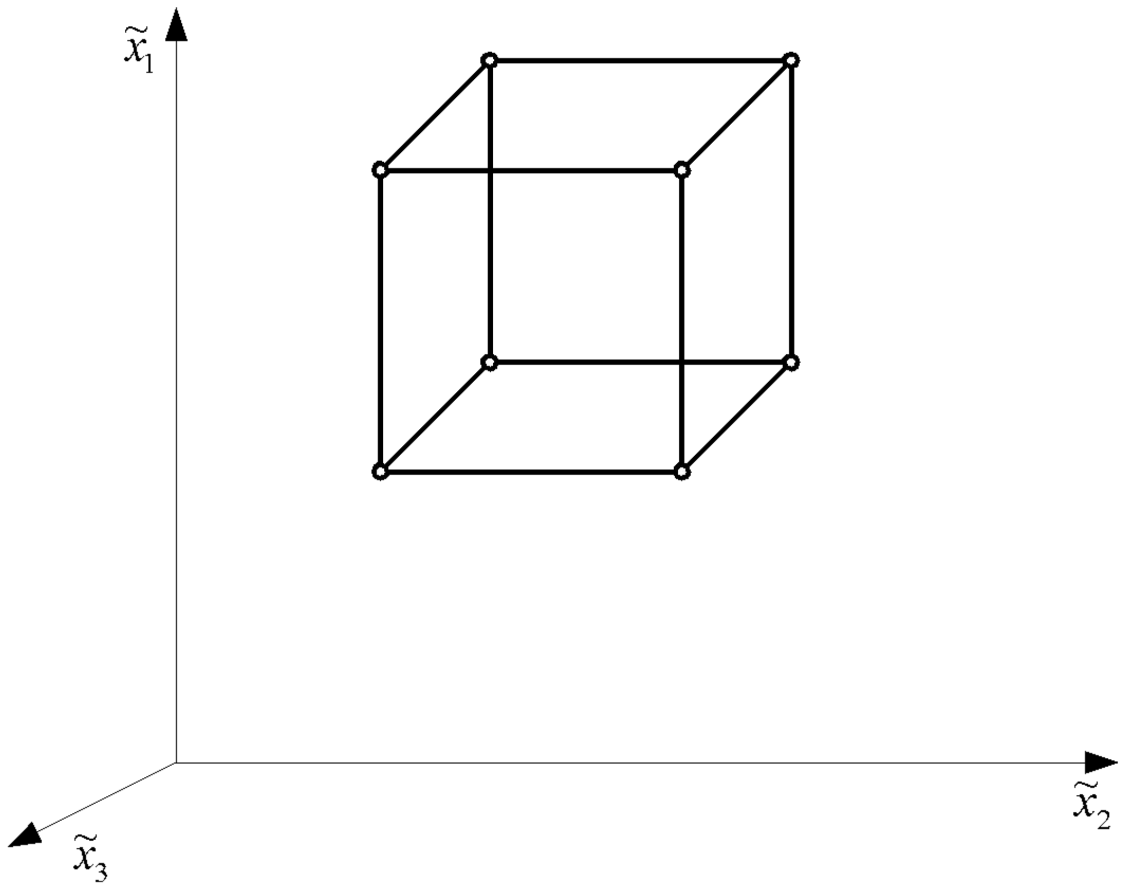
Матрицы планирования 2^3

№ опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	+	+	+	y_1
2	–	+	+	y_2
3	+	–	+	y_3
4	–	–	+	y_4
5	+	+	–	y_5
6	–	+	–	y_6
7	+	–	–	y_7
8	–	–	–	y_8

Геометрическое изображение полного факторного эксперимента 2^2



Геометрическое изображение полного факторного эксперимента 2^3



Свойства матрицы ПФЭ типа 2*k*

- **Симметричность** относительно центра эксперимента,

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0,$$

- где *j* – номер фактора, *N* – число опытов, *j* = 1, 2... *k*.
- **Условие нормировки**

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = N.$$

- **Ортогональность матрицы планирования**

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} x_{ui} = 0,$$

- $j \neq u$, j, $u = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Параллельные опыты. Рандомизация

- Для снижения случайной составляющей погрешности в каждой точке плана производят по несколько параллельных опытов (обычно 3 - 5).
- В практике эксперимента встречаются случаи, когда отклик непроизвольно меняется под влиянием различных неконтролируемых воздействий. Они могут иметь как случайный так и периодический характер, причем период может быть меньше времени проведения эксперимента, так и значительно больше.
- Для уменьшения влияния медленно изменяющихся помех используют метод, или принцип, **рандомизации**.

Параллельные опыты. Рандомизация

- Термин “ **рандомизация** “ происходит от слова random (случай, случайность). Он означает, что опыты производятся не в той последовательности, как они записаны в плане, а в случайной последовательности.
- Кроме уменьшения влияния дрейфа, рандомизация обеспечивает статистическую независимость результатов опытов между собой. Поэтому принцип рандомизации имеет основополагающее значение в теории ПЭ и должен использоваться при проведении экспериментальных исследований.