

*Полный дифференциал функции
нескольких переменных*

Лекция 2

Полное приращение функции 2-х переменных

Если обеим переменным дать приращение, то функция получит полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Определение дифференцируемой функции

Функция $z = f(x, y)$ называется **дифференцируемой в точке $M(x, y)$** , если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

где Δx и Δy - произвольные приращения аргументов x и y в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, A и B – постоянные, независимые от Δx и Δy , $o(\rho)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \text{ - расстояние между } M(x, y) \text{ и } M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

Определение дифференциала

Главная линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения функции $z = f(x, y)$ называется **полным дифференциалом** этой функции и обозначается dz или $df(x, y)$.
Таким образом, $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Формула для вычисления дифференциала

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, причем $f'_x(x, y) = A$, а $f'_y(x, y) = B$.
Так что, $\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + o(\rho)$

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y .$$

Если положить $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

При малых ρ $\Delta z \approx dz$, то есть

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \quad ,$$

или

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \quad .$$

Пример. Вычислить приближенно

$$\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right) \quad .$$

Дифференциалы высшего порядка

Дифференциалом второго порядка функции $z=f(x,y)$ называется

$$d^2 z = d(dz)$$

Вообще: $d^n z = d(d^{n-1} z)$

Если x и y независимые переменные, то

$$\cdot \quad d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2$$

Экстремумы функции двух переменных

Определение. Говорят, что в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция $f(x, y)$ имеет максимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x, y)$ этой окрестности, отличных от $P_0(x_0, y_0)$, выполнено неравенство

$$f(P_0) > f(P).$$

Аналогично определяется минимум функции. Минимум и максимум функции называются ее экстремумами.

Экстремумы функции двух переменных

Теорема (необходимое условие экстремума). В точке экстремума функции нескольких переменных каждая ее частная производная либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых выполнены эти условия, называются **критическими**.

Достаточные условия экстремума функции двух переменных

Теорема. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ в которой $z'_x = z'_y = 0$. Если при этом в этой точке выполнено условие $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$, то точка M_0 является точкой экстремума функции, причем точкой максимума, если $z''_{xx} < 0$, и точкой минимума, если $z''_{xx} > 0$.

Если же в этой точке $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 < 0$, то экстремума в точке M_0 нет.

В том случае, если $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$ в точке M_0 теорема ответа не дает.

Пример

Исследовать на экстремум функцию

$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \text{ где } x > 0 \text{ и } y > 0.$$

Наибольшее и наименьшее значения функции

Определение. Наименьшее или наибольшее значение функции в данной области называется абсолютным экстремумом функции (абсолютным минимумом или абсолютным максимумом соответственно) в этой области.

Известно, что непрерывная в замкнутой ограниченной области функция достигает в ней своих наибольшего и наименьшего значений.

Абсолютный экстремум достигается функцией либо в критических точках, либо на границе области.

Пусть функция непрерывна в замкнутой ограниченной области G , дифференцируема внутри этой области. *Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, нужно:*

- 1) найти критические точки, принадлежащие этой области, и вычислить в них значения функции;
- 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области;
- 3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + 3y^2 + x - y$$

в треугольнике, ограниченном прямыми

$$x = 0, y = 0, x + y = 1.$$

Скалярное поле

Лекция 3

Основные определения

Пусть в области D пространства $Oxyz$ задана функция $u=u(x,y,z)$. В этом случае говорят, что в области D задано **скалярное поле**, а саму функцию $u=u(x,y,z)$ называют функцией поля. Например, поле давлений, температур и т.д.

Основные определения

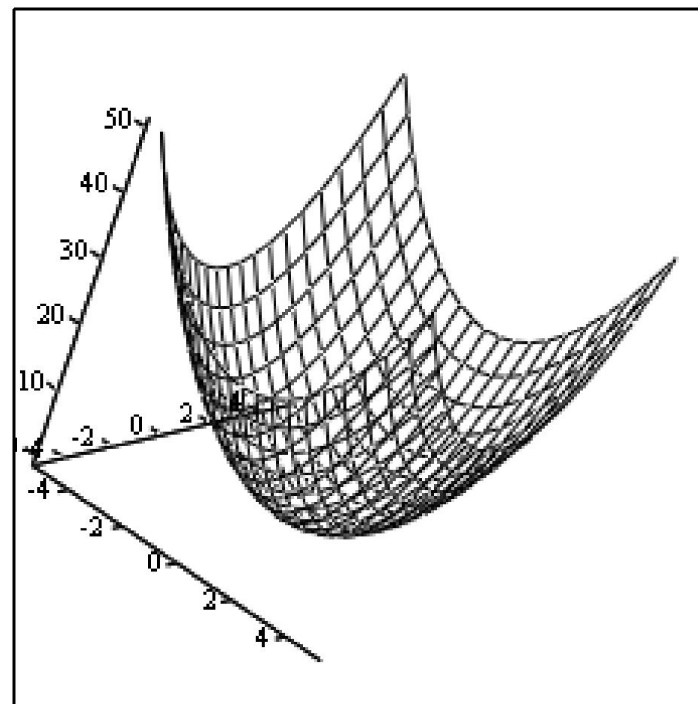
Множество точек M области D , для которых скалярное поле сохраняет постоянное значение, т. е. $u(M)=C$, называется *поверхностью уровня* (или изоповерхностью) скалярного поля.

Если область D расположена на плоскости Oxy , то поле $u=u(x,y)$ является плоским.

Поверхности уровня называют в этом случае *линиями уровня*.

Пусть

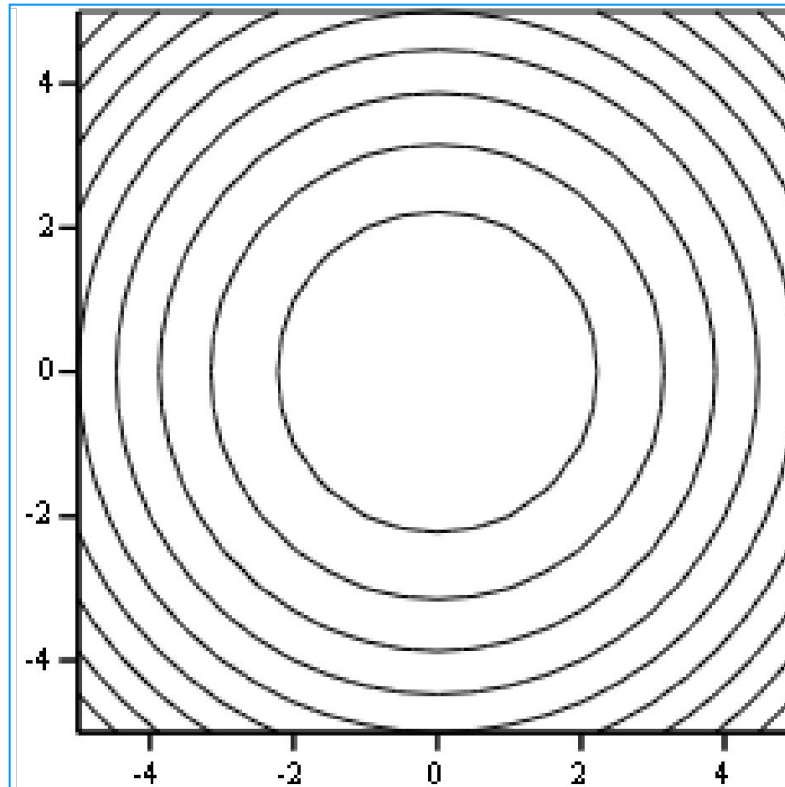
$$f(x, y) := x^2 + y^2$$



f

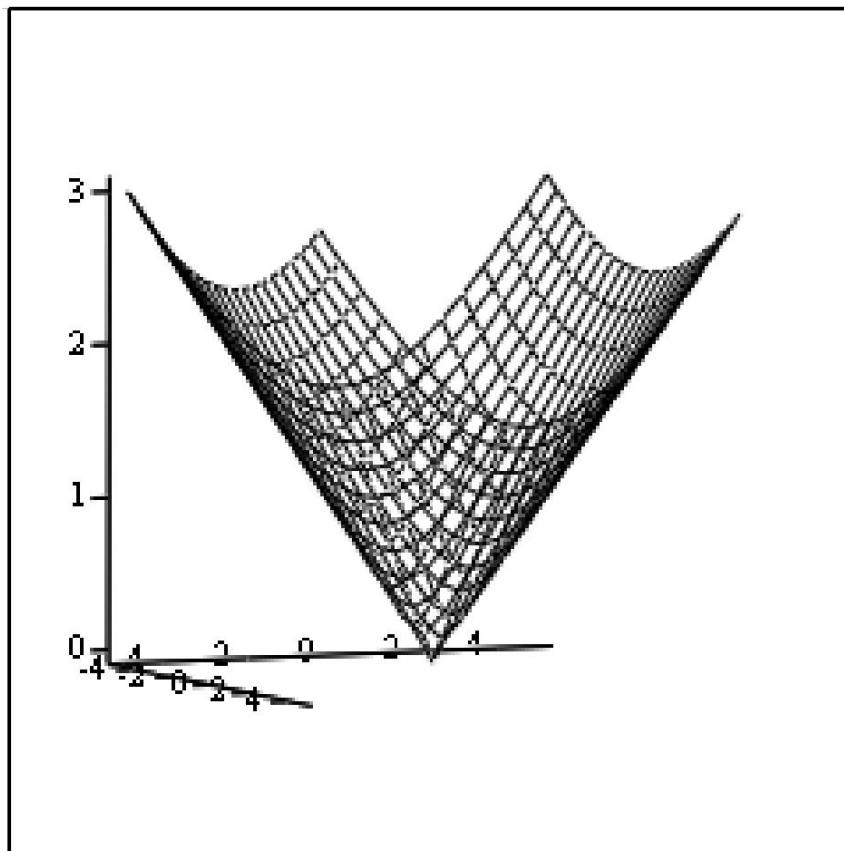
Линии уровня

Пусть $z = x^2 + y^2$. Линии уровня этой поверхности имеют вид



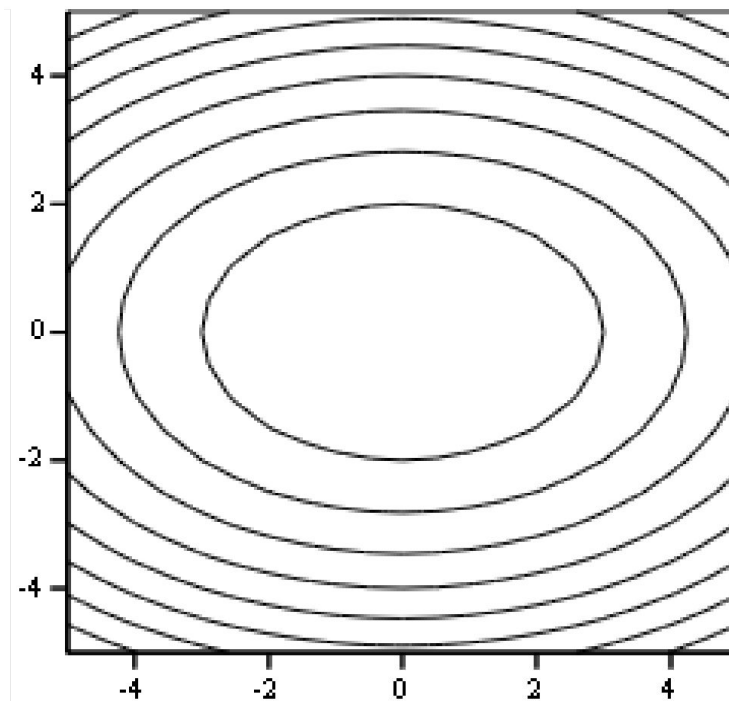
Пусть дан конус

$$f(x, y) := \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$$



f

Линии уровня конуса



f

Пусть задана дифференцируемая функция $u = u(x, y, z)$ скалярного поля.

Рассмотрим точку $P(x, y, z)$ этого поля и луч $\bar{\rho}$, выходящий из точки P в направлении единичного вектора

$$\bar{\rho}^0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma),$$

где α, β, γ — углы, образованные вектором $\bar{\rho}^0$ с осями координат.

Определение

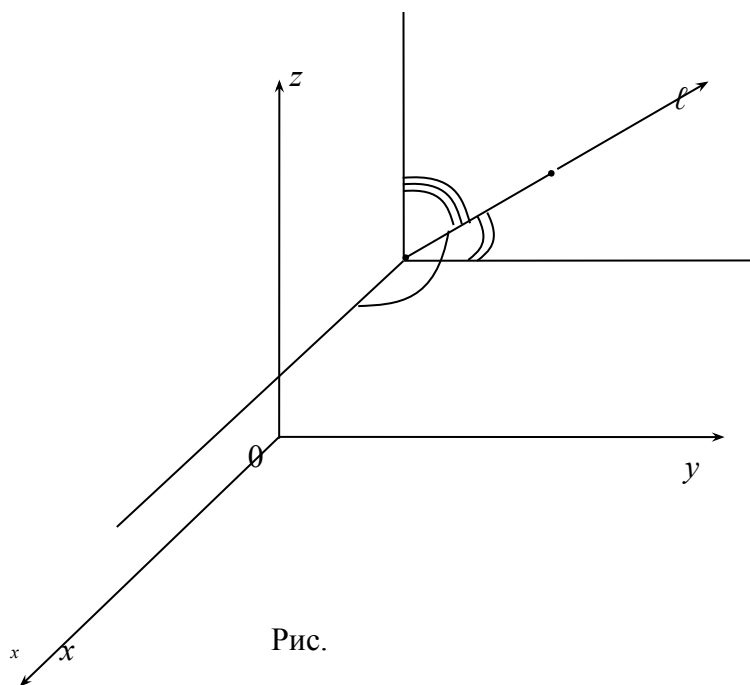


Рис.

Пусть $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$
– какая-нибудь другая
точка этого луча.

Обозначим

$$\Delta \square = PP_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

– расстояние между
точками P и P_1 ; $\Delta \square$
называют *величиной*
перемещения.

Приращением функции
в направлении \square
назовем разность
$$\Delta \square u = u(P_1) - u(P)$$

Производной функции $u = u(x, y, z)$
в точке P по направлению \square
называется предел отношения
приращения функции в направлении \square
к величине перемещения $\Delta\square$
при $\Delta\square \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial \square} = \lim_{\Delta\square \rightarrow 0} \frac{\Delta\square u}{\Delta\square}$$

Вычисление производной по направлению

Формула вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad \text{где}$$

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{|l|}, \quad \cos \beta = \frac{l_y}{|l|}, \quad \cos \gamma = \frac{l_z}{|l|},$$

$$|l| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}.$$

Градиент скалярного поля

Градиентом скалярного поля $u=u(x,y,z)$, где $u=u(x,y,z)$ - дифференцируемая функция, называется вектор с координатами

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} .$$

Таким образом, $grad u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$

$$\text{или } grad u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} .$$

Пример

Найти градиент функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(6, 2, 3)$.

Решение. Вычислим градиент функции.

$$u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$u'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{Тогда } \text{grad } u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{k}$$

$$\text{А в точке } M \quad \text{gradu} = \frac{6}{7} \bar{i} + \frac{2}{7} \bar{j} + \frac{3}{7} \bar{k}.$$

Направление градиента

Теорема. Производная u'_l функции по направлению равна проекции градиента этой функции на данное направление (в соответствующей точке).

Направление градиента

Так как производная по направлению представляет собой скорость изменения функции в данном направлении, а проекция вектора на другой вектор имеет максимальное значение, если оба вектора совпадают по направлению, то градиент функции в данной точке указывает направление наиболее быстрого возрастания функции.

Величина градиента плоского скалярного поля

Величина градиента плоского скалярного поля, т.е.

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

обозначается $\text{tg}\phi$ и определяет крутизну наибольшего ската или подъема поверхности $u = f(x, y)$.

Градиент скалярного поля в данной точке по величине и направлению равен максимальной скорости изменения поля в этой точке, т. е.

$$\max_l \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l^*} = |\operatorname{grad} u|$$

где $\overline{l^*} \uparrow \operatorname{grad} u$.

Направление градиента

Точка P , в которой $\text{gradu}(P)=0$, называется *особой* точкой скалярного поля. В противном случае эту точку называют *неособой* или *обыкновенной* точкой поля.

Теорема. Во всякой неособой точке плоского скалярного поля градиент поля направлен по нормали к линии уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания поля.