

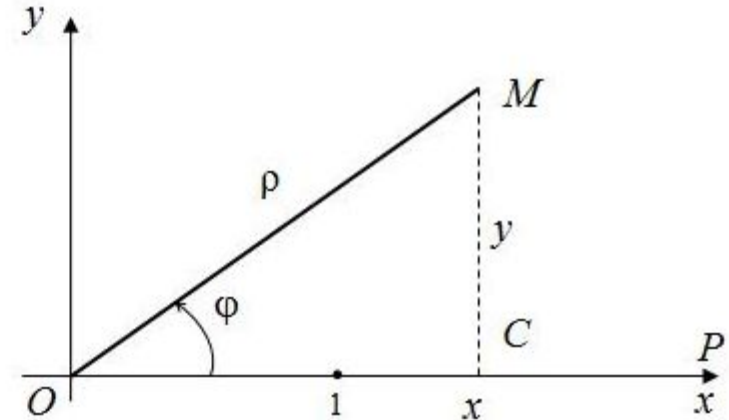
Полярные координаты

Зададим на плоскости точку O , назовем ее *полюсом*. Из этой точки проведем вправо горизонтально луч OP – *полярную ось*. На полярной оси зададим единицу, определим масштаб.

Полярными координатами (ρ, φ) точки M , не совпадающей с полюсом, называются: расстояние ρ от полюса O до точки M – *полярный радиус точки*, и угол φ от полярной оси до луча OM – *полярный угол точки*.

Для полюса O полагается, что $\rho = 0$, а угол φ не определен.

Полярный угол точки M , отличной от O , имеет бесконечно много значений, *главным значением угла φ* называется его значение, удовлетворяющее условию $0 \leq \varphi < 2\pi$.



Совместив начало декартовых координат с полюсом, а ось Ox с полярной осью, из прямоугольного треугольника OCM выразим соотношения между полярными и декартовыми координатами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Определяя ρ , как функцию переменной φ :

$$\rho = \rho(\varphi),$$

где в общем случае $-\infty < \varphi < +\infty$, получим некоторую кривую, заданную в полярных координатах.

Так как ρ – радиус – неотрицательное число, то область определения ρ находим из условия $\rho(\varphi) \geq 0$. Угол φ откладываем от полярной оси в положительном направлении – против часовой стрелки. Откладывая значения φ по часовой стрелке, получим отрицательные значения угла φ .

Спираль Архимеда

Построим кривую $\rho = \varphi$. Область определения определим из неравенства

$$\rho \geq 0 \Rightarrow \varphi \geq 0.$$

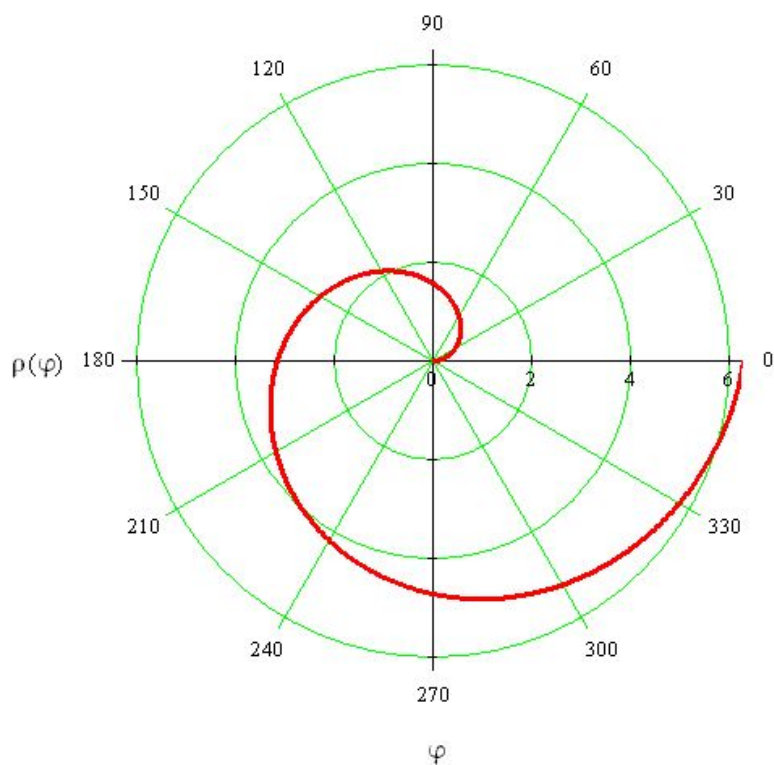
Значения углов φ будем откладывать в положительном направлении, против часовой стрелки.

Значения занесем в таблицу:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	0	0,52	1,05	1,57	2,09	2,62	3,14	3,66	4,19	4,71	5,23	5,76	6,28

Функция $\rho = \varphi$ монотонно возрастает, с ростом угла точка удаляется от полюса.

Откладывая на лучах, выходящих из полюса под углом φ , соответствующие значения ρ , построим кривую.



Полученная кривая называется спиралью Архимеда

Окружность

Построим кривую, определяемую уравнением $\rho = \cos \varphi$.

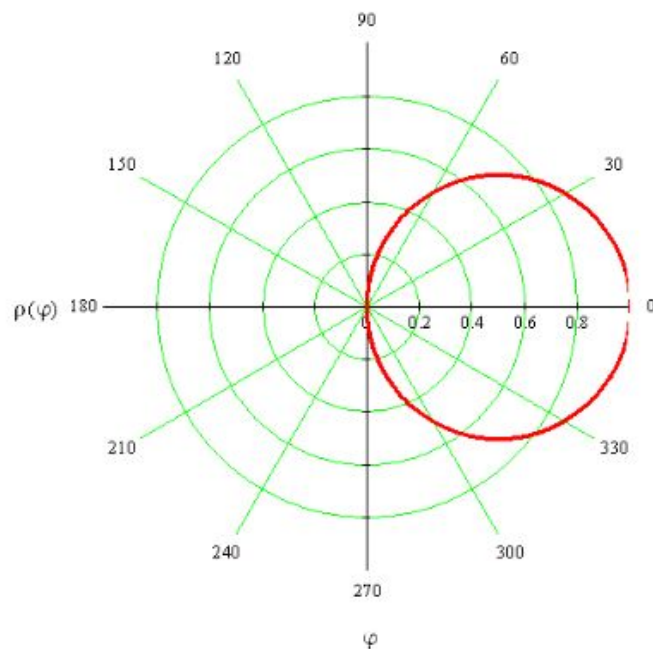
Область определения найдем из неравенства $\rho \geq 0$:

$$\cos \varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

Составим таблицу значений.

φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Построим кривую:



Полученная кривая является окружностью радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $(\frac{1}{2}, 0)$. Действительно, перейдем от полярных координат к декартовым в уравнении $\rho = \cos \varphi$.

Из соотношений $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ выразим $\cos \varphi = \frac{x}{\rho}$, и подставим в уравнение вместе с $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{x^2 + y^2}$ и преобразуем полученное равенство:

$$x^2 + y^2 = x \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2.$$

Последнее уравнение и есть уравнение окружности радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $(\frac{1}{2}, 0)$.

Трехлепестковая роза

Построим кривую, определяемую уравнением $\rho = 2 \cos 3\varphi$.

Область определения найдем из неравенства $\rho \geq 0$:

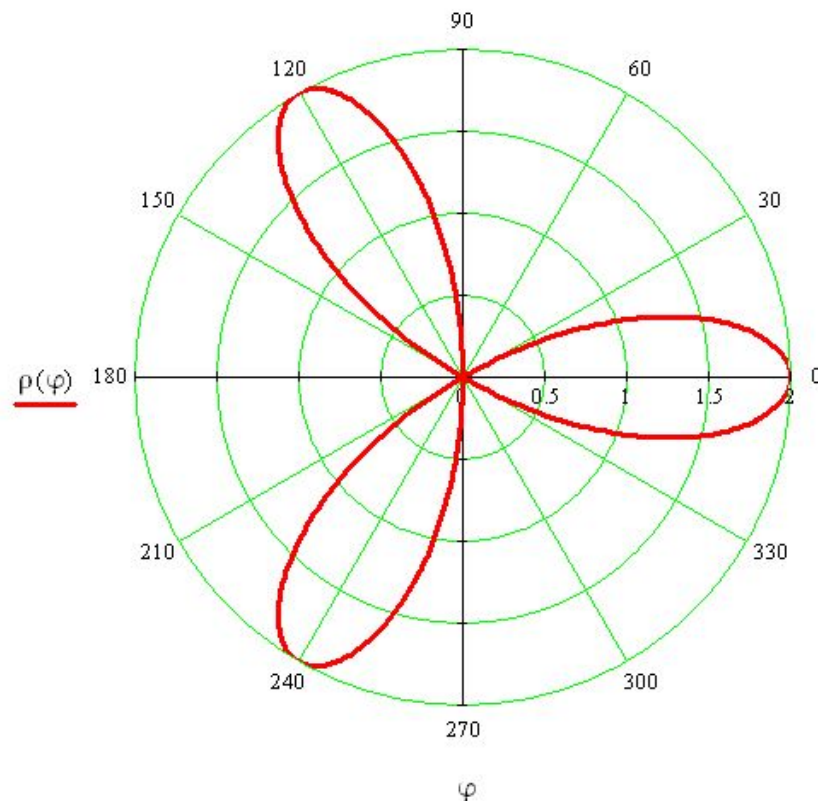
$$\cos 3\varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}.$$

Построим кривую для φ из промежутка $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$. Составим таблицу значений.

φ	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$
ρ	0	2	0

Затем выполним поворот полученной линии на $\frac{2\pi k}{3}$, $k = 1, 2$.

Построим кривую:



Полученная кривая называется трехлепестковой розой.

Кардиоида

Построим кривую, определяемую уравнением $\rho = 1 - \cos \varphi$.

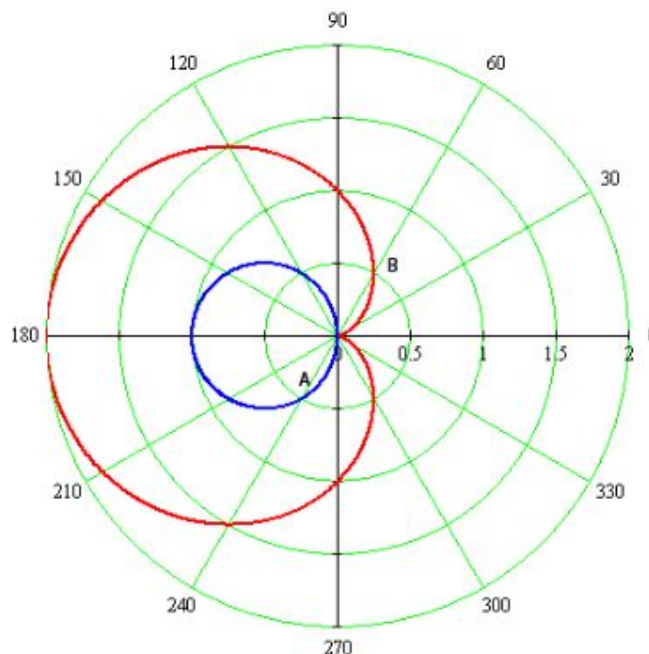
Область определения найдем из неравенства $\rho \geq 0$:

$$1 - \cos \varphi \geq 0 \quad \forall \varphi.$$

Составим таблицу значений.

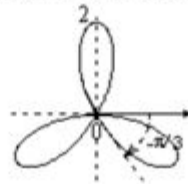
φ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{4\pi}{3}$	2π
ρ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

Построим кривую (красный контур)



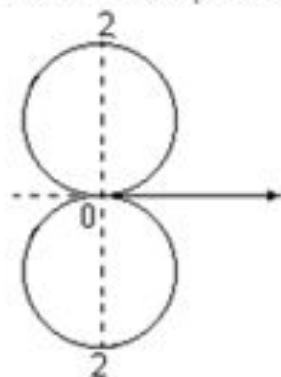
Кардиоида получается из окружности $\rho = -\cos \varphi$ (синий контур), если на каждом луче выходящем из полюса, увеличить радиус на 1 в направлении луча. При этом в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ т.е. в правой полуплоскости, где функция $\rho = -\cos \varphi$ принимает отрицательные значения, увеличивать радиус нужно от точки окружности, лежащей на продолжении луча в противоположном направлении. Так на луче, выходящем под углом 60° строим точку В, добавляя 1 к точке А в направлении луча 60° . Точка А соответствует радиусу $\rho\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, отрицательное значение которого отложили в направлении противоположном лучу 60° .

Укажите уравнение изображенной кривой:



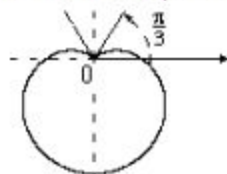
- $\rho = -2 \sin^3 \varphi$
 - $\rho = 2 \cos 3\varphi$
 - $\rho = -2 \sin 3\varphi$
 - $\rho = 2 \sin 3\varphi$
-

Укажите уравнение изображенной кривой:



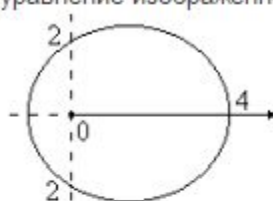
- $\rho = 2|\sin \varphi|$
 - $\rho = 2 \sin 2\varphi$
 - $\rho = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$
 - $\rho = 1 - \cos \varphi$
-

Укажите уравнение изображенной кривой:



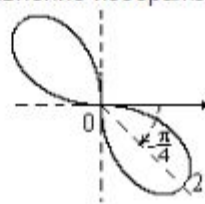
- $\rho = \sqrt{3} + 2 \sin \varphi$
- $\rho = \sqrt{3} - 2 \cos \varphi$
- $\rho = \sqrt{3} - 2 \sin \varphi$
- $\rho = \sqrt{3} + 2 \cos \varphi$

Укажите уравнение изображенной кривой:



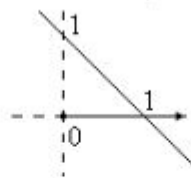
- $\rho = 4 + 2 \sin \varphi$
- $\rho = \frac{4}{2 - \cos \varphi}$
- $\rho = 2 + \cos \varphi$
- $\rho = \frac{2}{1 - \cos \varphi}$

Укажите уравнение изображенной кривой:



- $\rho = 2 \sin 2\varphi$
- $\rho = 2 \cos 2\varphi$
- $\rho = -2 \sin 2\varphi$
- $\rho = -2 \cos 2\varphi$

Укажите уравнение изображенной кривой:



- $\rho = 1 - \varphi$
- $\rho = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}$
- $\rho = \sin \varphi - \cos \varphi$
- $\rho = \sin \varphi + \cos \varphi$

Настоящий ректор НГТУ



Вострецов А.Г.



Батаев А.А.



Расторгуев Г.И.



Пустовой Н.В.