Понятие двойного интеграла

Понятие двойного интеграла

Двойной интеграл в общем виде записывается следующим образом:

$$\iint\limits_D f(x;\,y)\,dxdy$$

Разбираемся в терминах и обозначениях:

$\iint$ – значок двойного интеграла;

D – область интегрирования (плоская фигура);

$f(x,y)$ – подынтегральная функция двух переменных, часто она довольно простая;

dx, dy – значки дифференциалов.

Что значит вычислить двойной интеграл?

Вычислить двойной интеграл – это значит **найти ЧИСЛО**. Самое обычное число: $\iint\limits_D f(x; y)dxdy = C$, где $C = const$

И крайне желательно найти его правильно =)

Результат (число   ) может быть отрицательным. И ноль тоже запросто может получиться. Специально остановился на данном моменте, поскольку немало студентов испытывают беспокойство, когда ответ получается «шото вроде как странный».

Многие помнят, что «обычный» **определённый интеграл** – тоже число. Здесь всё так же. У двойного интеграла существует и отличный геометрический смысл, но об этом позже, всему своё время.

Как вычислить двойной интеграл?

Для того чтобы вычислить двойной интеграл, его необходимо свести к так называемым *повторным интегралам*. Сделать это можно двумя способами. Наиболее распространён следующий способ:

$$\int_?^? dx \int_{??}^{??} f(x;y)dy = \int_*^* dy \int_{**}^{**} f(x;y)dx = C$$

Вместо знаков вопроса необходимо расставить пределы интегрирования. Причём одиночные знаки вопроса у внешнего интеграла – это числа, а двойные знаки вопроса у внутреннего интеграла – это функции одной переменной , зависящие от «икс».

Откуда взять пределы интегрирования? Они зависят от того, какая в условии задачи дана область . Область представляет собой обычную плоскую фигуру, с которой вы неоднократно сталкивались, например, при вычислении площади плоской фигуры или вычислении объема тела вращения. Очень скоро вы узнаете, как правильно расставлять пределы интегрирования.

После того, как переход к повторным интегралам осуществлён, следуют непосредственно вычисления: сначала берётся внутренний интеграл , а потом – внешний. Друг за другом. Отсюда и название – повторные интегралы.

Грубо говоря, задача сводится к вычислению двух определённых интегралов. Как видите всё не так сложно и страшно, и если вы совладали с «обыкновенным» определённым интегралом, что мешает разобраться с двумя интегралами?!

Второй способ перехода к повторным интегралам встречается несколько реже:

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \int_*^* dy \int_{**}^{**} f(x;y)dx$$

Что поменялось? Поменялся порядок интегрирования: теперь внутренний интеграл берётся по «икс», а внешний – по «игрек». Пределы интегрирования, обозначенные звёздочками –**будут другими!** Одиночные звёздочки внешнего интеграла – это числа, а двойные звёздочки внутреннего интеграла – это обратные функции , зависящие от «игрек». $x = g(y)$

Какой бы мы ни выбрали способ перехода к повторным интегралам, **окончательный ответ обязательно получится один и тот же**:

$$\int_?^? dx \int_{??}^{??} f(x;y)dy = \int_*^* dy \int_{**}^{**} f(x;y)dx = C$$

Алгоритм решения двойного интеграла:

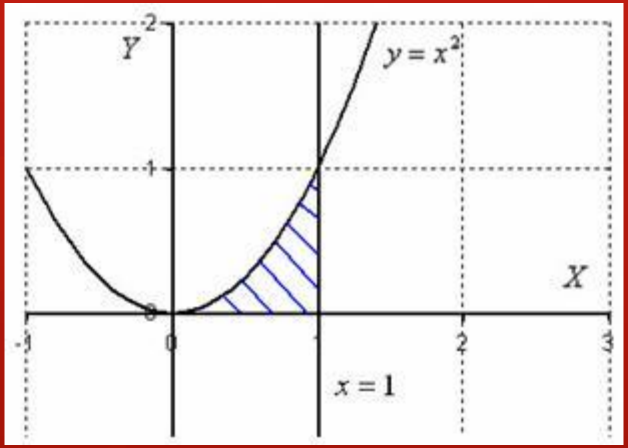
Систематизируем информацию: в каком порядке нужно решать рассматриваемую задачу?
1) Необходимо выполнить чертёж. **Без чертежа задачу не решить**. Точнее, решить можно, но это будет похоже на игру в шахматы вслепую. На чертеже следует изобразить область , которая представляет собой плоскую фигуру. Чаще всего фигура незамысловата и ограничена какими-нибудь прямыми, параболами, гиперболами и т.д. Как быстро и грамотно выполнить чертёж, можно посмотреть в методическом материале Графики и основные свойства элементарных функций. Итак, этап первый – выполнить чертёж.
2) Расставить пределы интегрирования и перейти к повторным интегралам.
3) Взять внутренний интеграл
4) Взять внешний интеграл и получить ответ (число).

Пример

Дан двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$ с областью интегрирования $D: x=1;\ y=x^2;\ y=0$.

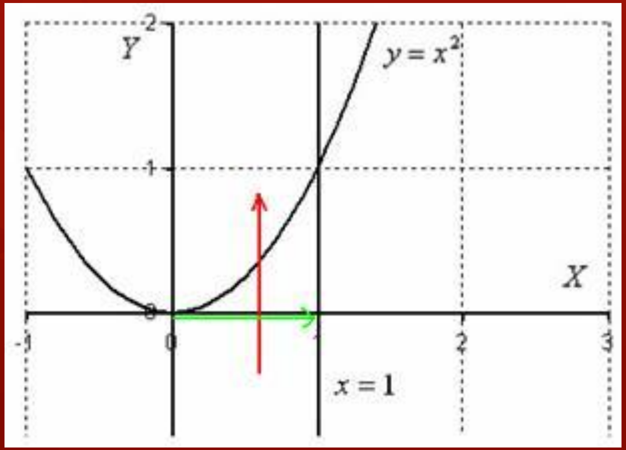
Перейти к повторным интегралам и расставить пределы интегрирования двумя способами.

Решение: Изобразим область интегрирования на чертеже:



Обычная плоская фигура и ничего особенного.

Теперь я выдам каждому из вас орудие труда – палку-копалку лазерную указку. Задача состоит в том, чтобы просканировать лучом лазера каждую точку заштрихованной области:



.

Луч лазера проходит область интегрирования **строго снизу вверх**, то есть указку вы ВСЕГДА держите **ниже** плоской фигуры. Луч входит в область через ось абсцисс, которая задаётся уравнением $y=0$ и выходит из области через параболу $y=x^2$ (красная стрелка). Чтобы просветить всю область, вам нужно **строго слева направо** провести указкой вдоль оси ОХ от 0 до 1 (зелёная стрелка).
Итак, что получилось:
«игрек» изменяется от 0 до x^2;
«икс» изменяется от 0 до 1.
В задачах вышесказанное записывают в виде неравенств: $0 \le y \le x^2$
$0 \le x \le 1$

Данные неравенства называют **порядком обхода области интегрирования** или просто **порядком интегрирования**
После того, как мы разобрались с порядком обхода, можно перейти от двойного интеграла к повторным интегралам:

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x;y)dy$$

Половина задачи решена. Теперь необходимо перейти к повторным интегралам вторым способом. Для этого следует найти обратные функции. Кто ознакомился со вторым параграфом урока [Объем тела вращения](), тому будет легче. Смотрим на функции, которыми задается область $D: x=1;\ y=x^2;\ y=0$. Если совсем просто, то перейти к обратным функциям, это значит – выразить «иксы» через «игреки». Единственной функцией, где есть и «икс» и «игрек», является $y=x^2$.
Если $y=x^2$, то $x=\pm\sqrt{y}$, причём:
обратная функция $x=-\sqrt{y}$ задает правую ветку параболы;
обратная функция $x=\sqrt{y}$ задает левую ветку параболы.
Нередко возникают сомнения, вот, к примеру, функция $x=\sqrt{y}$ определяет левую или правую ветвь параболы? Сомнения развеять очень просто: возьмите какую-нибудь точку параболы, например, (1,1) (с правой ветви) и подставьте её координаты в любое уравнение, например, в то же уравнение: $x=\sqrt{y}$

$1=\sqrt{1}$

$1=1$

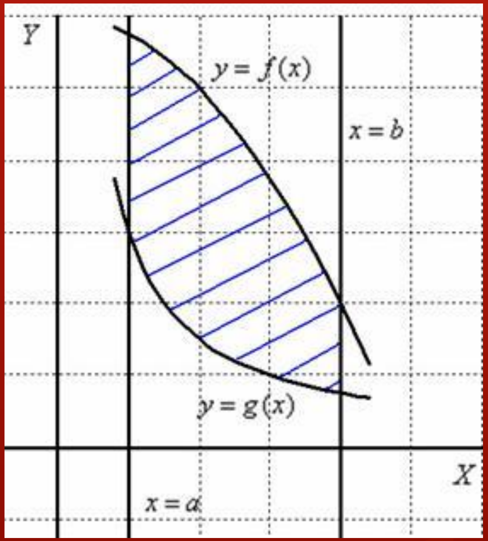
Получено верное равенство, значит, функция $x=\sqrt{y}$ определяет именно правую ветвь параболы, а не левую.

Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью двойного интеграла?

Начинаем рассматривать собственно процесс вычисления двойного интеграла $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ и знакомиться с его геометрическим смыслом.

Двойной интеграл $\iint\limits_D dxdy$ численно равен площади плоской фигуры D (области интегрирования). Это простейший вид двойного интеграла, когда функция двух переменных равна единице: .
Сначала рассмотрим задачу в общем виде. Сейчас вы немало удивитесь, насколько всё действительно просто!
Вычислим площадь плоской фигуры D ,ограниченной линиями . $x=a, x=b, y=f(x), y=g(x)$
Для определённости считаем, что $f(x)>g(x)$ на отрезке . $[a;b]$ Площадь данной фигуры численно равна: $S=\iint\limits_D dxdy$

Изобразим область D на чертеже:



Выберем первый способ обхода области: $g(x) \le y \le f(x)$
$a \le x \le b$

Таким образом: $S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{g(x)}^{f(x)} dy$

И сразу важный технический приём: **повторные интегралы можно считать по отдельности**. Сначала внутренний интеграл, затем – внешний интеграл. Данный способ настоятельно рекомендую начинающим в теме чайникам.

1) Вычислим внутренний интеграл, при этом интегрирование проводится по переменной «игрек»: $\int\limits_{g(x)}^{f(x)} dy = (y)\Big|_{g(x)}^{f(x)} = f(x) - g(x)$

Неопределённый интеграл тут простейший, и далее используется банальная формула Ньютона-Лейбница, с той лишь разницей, что **пределами интегрирования являются не числа, а функции**. Сначала подставили в «игрек» (первообразную функцию) верхний предел, затем – нижний предел

2) Результат, полученный в первом пункте необходимо подставить во внешний интеграл: $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$

Более компактная запись всего решения выглядит так:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{f(x)} dy = \int\limits_a^b (y)\Big|_{g(x)}^{f(x)} \cdot dx = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Полученная формула $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$ – это в точности рабочая формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью «обычного» определённого интеграла!

Используемая литература

http://www.mathprofi.ru