



Тольяттинский социально-педагогический университет
Преподаватель: Лихачева Е.С.

Учебный модуль 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

МНОЖЕСТВ

Тема 1.2.

Понятие множества. Способы задания множеств.
Операции над множествами



Понятие множества и элементы множества

Множество – определенная совокупность объектов.

Объекты, из которых состоит множество, называются **элементами множества**.

ПРИМЕР: Множество домов на данной улице, множество натуральных чисел, множество студентов группы и т. д.

Множества обычно обозначают заглавными латинскими буквами A, B, C, D, X, Y, \dots , элементы множества строчными латинскими буквами a, b, c, d, x, y, \dots

Для обозначения того, что объект x является элементом множества A , используют символику: $x \in A$ (читается: x принадлежит A), запись $x \notin A$ обозначает, что объект x не является элементом множества A (читается: x не принадлежит A).

Множество не содержащее ни одного элемента называется **пустым** (обозначается: \emptyset).

Множества из элементов которого составляем конкретное множество называется **универсальным** (обозначается: U).

ПРИМЕР: U – множество людей на земле, A – студенты вашей группы.

Множества можно изобразить в виде кругов, которые называются **кругами Эйлера**. Универсальное множество принято обозначать буквой U .

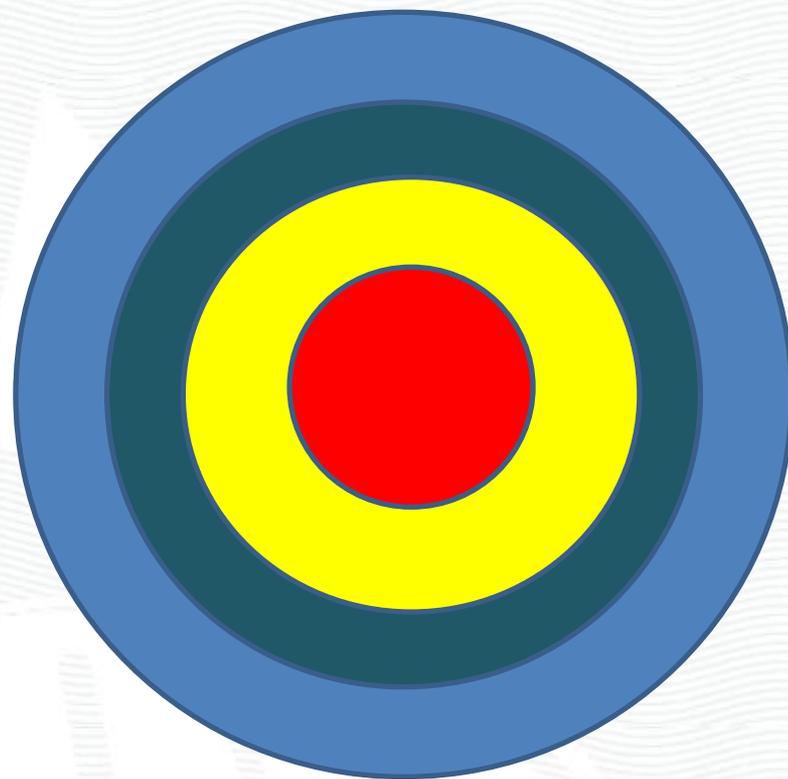


ПРИМЕР

Для перечисленных множеств чисел справедливо следующее высказывание:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Множество натуральных чисел принадлежит множеству целых чисел, которое принадлежит множеству рациональных чисел, которое принадлежит множеству действительных чисел.



-  Натуральные числа
-  Целые числа
-  Рациональные числа
-  Действительные числа



Характеристическое свойство элементов множества

- Если множество состоит из небольшого количества элементов, то его удобно задавать перечислением всех элементов, если же элементов много или множество имеет бесконечное число элементов, то оно задается с помощью характеристического предиката (свойства).



Способы задания множеств

- Если множество состоит из небольшого количества элементов, то его удобно задавать перечислением всех элементов, если же элементов много или множество имеет бесконечное число элементов, то оно задается с помощью характеристического предиката.



Способы задания множеств

- **1) Перечислением всех элементов** множества в фигурных скобках.
- ПРИМЕР: $A = \{\text{Оля, Маша, Саша}\}$
- **2) Характеристическим предикатом**, который описывает свойство всех элементов, входящих в множество. Характеристический предикат записывается после двоеточия или символа « | ».
- ПРИМЕР: $P(x) = x \in \mathbb{N} \wedge x < 8$ - характеристический предикат.
- $M = \{x : P(x)\}$ или $M = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$.
- Множество M можно задать и перечислением его элементов:
- $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- ПРИМЕР
- $B = \{x \mid x - \text{четное натуральное число}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$



Отношения между множествами

Пусть во множестве A задано некоторое отношение " \circ ".

- **Определение** . Отношение " \circ " **рефлексивно**, если для любого элемента a из множества A выполнено $a \circ a$ (т.е. любой элемент связан отношением \circ с самим собой).
Например: отношение равенства на множестве отрезков рефлексивно, так как любой отрезок равен сам себе.
- **Определение** . Отношение \circ **симметрично**, если из $a \circ b$ следует $b \circ a$ для любых элементов a и b множества A . Отношение равенства на множестве отрезков является симметричным, так как если $[AB] = [CD]$, то и $[CD] = [AB]$.
- **Определение** . Отношение \circ называется **транзитивным**, если из того, что $a \circ b$ и $b \circ c$ следует, что $a \circ c$. В частности, отношение равенства отрезков рефлексивно, так как если отрезок AB равен отрезку CD , а отрезок CD равен отрезку MN , то отрезок AB равен отрезку MN .
- **Определение**. Отношение \circ во множестве A называется **отношением эквивалентности**, если оно одновременно





Пересечение множеств

- **Пересечением** множеств A и B называется множество, в которое входят те и только те элементы, которые одновременно принадлежат множествам A и B (общие элементы множеств A и B). Обозначение: $A \cap B$, где символ \cap – знак пересечения двух множеств. Два множества **пересекаются**, если $A \cap B \neq \emptyset$, и **не пересекаются**, если $A \cap B = \emptyset$.
- Например: если две прямые a и b не пересекаются, то можно записать $a \cap b = \emptyset$, если же они пересекаются, то по определению их пересечением является общая точка A ($a \cap b = A$). Пересечением луча a с дополняющим его лучом a' является их общее начало O ($a \cap a' = O$).



Объединение множеств

- **Объединением** двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств. Обозначение: $A \cup B$, где символ \cup – знак объединения множеств.
- Например: объединением луча a с дополняющим его лучом a' является прямая.





Свойства пересечения и объединения множеств

- Пересечение и объединение множеств коммутативно (перестановочно):

$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A.$$

- Пересечение и объединение множеств ассоциативно: для любых множеств A , B и C имеем

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

- Если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.
- Для любых множеств A , B и C справедливы равенства:
 - а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 - б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$





Вычитание множеств

- **Разностью** двух множеств A и B называется такое множество, в которое входят все те элементы, которые принадлежат A и не принадлежат B . Обозначение: $A \setminus B$. Если B – подмножество A , то $A \setminus B$ называют **дополнением** к B и обозначают B' .
- Например: разностью прямой a и ее луча с началом O является множество точек дополняющего луча a' без начальной точки O .



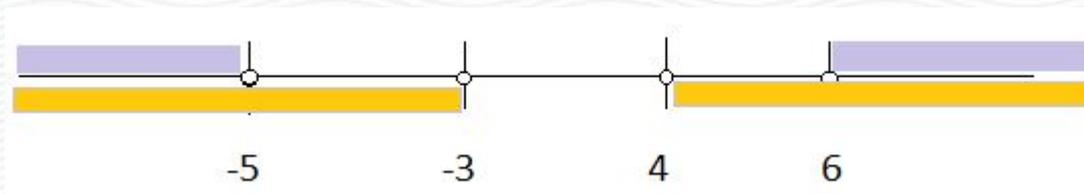


Декартово произведение МНОЖЕСТВ

- **Прямое или декартово произведение двух множеств** — это множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары элементов исходных множеств.
- Пусть даны два множества X и Y . Прямое произведение этих множеств есть такое множество $X \times Y$, элементами которого являются упорядоченные пары (x, y) для всевозможных $x \in X$ и $y \in Y$.
- Отображения произведения множеств в его множители называют *координатными функциями*:

$$\phi: X \times Y \rightarrow X, \phi(x, y) = x \text{ и } \psi: X \times Y \rightarrow Y, \psi(x, y) = y.$$





Пример 1. Найдите объединение и пересечение множеств A и B , если $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 < x < 6\}$ и $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 4\}$.

Решение. Если изобразить данные множества на числовой прямой, то **объединение** $A \cup B$ есть часть прямой, где имеется хотя бы одна штриховка, т. е. отрезки $(-\infty; -3)$ и $(4; +\infty)$.

Пересечением этих множеств будет отрезок с двойной штриховкой $(-\infty; -5)$ и $(6; +\infty)$.



Решение задач

- Пример 2. В гимназии все ученики знают хотя бы один из древних языков – греческий или латынь, некоторые – оба языка. 85% всех ребят знают греческий язык и 75% знают латынь. Какая часть учащихся знает оба языка?

Решение

- $100 - 85 = 15\%$ всех ребят *не знают* греческий язык, то есть знают только латынь. Это значит, что $75 - 15 = 60\%$ говорят на обоих языках.





Решение задач

Пример 3. Баба Яга в своей избушке на курьих ножках завела сказочных животных. Все они, кроме двух, — Говорящие Коты; все, кроме двух, — Мудрые Совы; остальные — Усатые Тараканы. Сколько обитателей в избушке у Бабы Яги?

Подсказка: Подумайте, сколько в избушке Мудрых Сов и Усатых Тараканов вместе? А сколько Говорящих Котов и Усатых Тараканов вместе?





Решение задач

Решение. Из условия задачи следует, что Мудрых Сов и Усатых Тараканов — двое, а Говорящих Котов и Усатых Тараканов — тоже двое. Это выполняется в двух случаях: либо Тараканов — 2, Котов и Сов — 0, либо и Котов, и Сов, и Тараканов — по одному. Первый случай не годится, так как в условии сказано, что и Сова, и Коты *живут* в избушке. Значит, у Бабы Яги поселились Говорящий Кот, Мудрая Сова и Усатый Таракан — всего трое.

Ответ: Трое, не считая Бабы Яги.





Решение задач

Пример 4. В первом пенале лежат лиловая ручка, зелёный карандаш и красный ластик; во втором — синяя ручка, зелёный карандаш и жёлтый ластик; в третьем — лиловая ручка, оранжевый карандаш и жёлтый ластик. Содержимое этих пеналов характеризуется такой закономерностью: в каждых двух из них ровно одна пара предметов совпадает и по цвету, и по назначению. Что должно лежать в четвёртом пенале, чтобы эта закономерность сохранилась?

Подсказка: Подумайте, может ли в четвёртом пенале лежать лиловая ручка.

Решение: В четвёртом пенале должны лежать предметы, которые уже встречаются в первых трех пеналах, но только по одному разу. Это синяя ручка, оранжевый карандаш и красный ластик.

Ответ

Синяя ручка, оранжевый карандаш, красный ластик.





Решение задач

Решение: В четвёртом пенале должны лежать предметы, которые уже встречаются в первых трех пеналах, но только по одному разу. Это синяя ручка, оранжевый карандаш и красный ластик.

Ответ

Синяя ручка, оранжевый карандаш, красный ластик.





Самостоятельная работа:

Написать конспекты по темам:

- Понятие разбиения множества на классы.
- Число элементов в объединении и разности конечных множеств.
- Число элементов в декартовом произведении конечных множеств.
- Составление кроссворда по теме «Множества и операции над ними»

