

# Лекция 14 Понятие о комплексных числах. Рациональные функции одной переменной

## Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев.  
Курс математики для технических высших учебных заведений  
Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А.  
Пушкаря. 2012г. Лекции 33, 34.

Понятие о комплексных числах. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Сложение, умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел, извлечение корня из комплексного числа.

Некоторые сведения о многочленах. Разложение многочлена на множители. Разложение рациональных дробей на простейшие.

### 33.1. Понятие о комплексных числах.

#### Алгебраическая форма комплексного числа

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.1.** *Комплексным числом  $z$  называется упорядоченная пара действительных чисел  $(x; y)$ ,  $x$  называется действительной частью комплексного числа  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y$  – мнимой частью,  $y = \operatorname{Im} z$ :*

$$z = (x; y) \quad (33.1)$$

Действительная единица  $1 = (1; 0)$ , мнимая обозначается  $i = (0; 1)$ . Таким образом, множество действительных чисел  $x = (x; 0)$  и множество чисто мнимых чисел  $iy = (0; y)$  являются подмножествами комплексных чисел. Для мнимой единицы  $i$  справедливо равенство:

$$i^2 = -1. \quad (33.2)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.2.** *Выражение  $z = x + iy$  называется алгебраической формой комплексного числа.*

$$z = x + iy. \quad (33.3)$$

Рассмотрим свойства комплексных чисел и алгебраические действия с комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Для двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  справедливо:

- *Комплексные числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  равны, если равны их действительные и мнимые части.*

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2. \quad (33.4)$$

- При сложении (вычитании) комплексных чисел отдельно складываются (вычитаются) действительные и мнимые части.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \quad (33.5)$$

- Умножение комплексных чисел проводится как умножение многочленов с учётом (33.2)

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (33.6)$$

- Комплексное число  $\bar{z} = x - iy$  называется сопряженным комплексному числу  $z = x + iy$  и их произведение согласно (33.6), равно

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \quad (33.7)$$

Таким образом, сумма квадратов двух действительных чисел раскладывается на произведение сопряженных комплексных чисел.

- Частное от деления комплексных чисел  $z = \frac{z_1}{z_2}$  ищется по следующей схеме: числитель и знаменатель дроби  $\frac{z_1}{z_2}$  умножается на число  $\bar{z}_2$ , сопряжённое знаменателю, а затем выделяются действительная и мнимая части

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (33.8)$$

**ПРИМЕР 33.1.** Сложить, вычесть, умножить и поделить два комплексных числа  $z_1 = 2 + 3i$  и  $z_2 = 3 - 2i$ .

**Решение:** По формуле (33.5):

$$z_1 + z_2 = 5 + i, \quad z_1 - z_2 = -1 + 5i,$$

по формуле (33.6):  $z_1 z_2 = 6 + 6 + i(9 - 4) = 12 + 5i,$

по формуле (33.8):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{3 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{6 - 6 + i(9 + 4)}{9 + 4} = i.$$

Как известно, квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$  при дискриминанте

$D = \frac{p^2}{4} - q < 0$  не имеет действительных корней. Уравнение

$$z^2 + pz + q = 0 \quad (33.9)$$

имеет при  $\frac{p^2}{4} - q < 0$  два комплексных сопряженных корня

$$z_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \quad (33.10)$$

где  $\alpha = -\frac{p}{2}$ ,  $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ .

Таким образом, в комплексной области квадратный трёхчлен  $z^2 + pz + q$  раскладывается на множители при отрицательном дискриминанте

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2) = ((z - \alpha) - \beta i)((z - \alpha) + \beta i). \quad (33.11)$$

**ПРИМЕР 33.2.** *Найти корни уравнения  $z^2 + 8z + 25 = 0$  и разложить квадратный трёхчлен на множители.*

**Решение:** По формуле (33.10) находим:

$$z_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 25} = -4 \pm 3i \text{ и } z^2 + 8z + 25 = ((z + 4) - 3i)((z + 4) + 3i).$$

### 33.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Будем откладывать действительную часть  $Re z = x$  комплексного числа  $z$  на оси  $Ox$ , а мнимую  $Im z = y$  на оси  $Oy$  декартовой системы координат  $Oxy$  (рис. 169).

Тогда каждому комплексному числу  $z = x + iy$  будет соответствовать одна точка плоскости  $Oxy$  и наоборот каждой точке плоскости  $Oxy$  – одно комплексное число  $z$ . Поэтому вместо комплексного числа  $z$  можно говорить о точке  $z$  комплексной плоскости. Назовем эту плоскость комплексной плоскостью и будем обозначать её символом  $\boxed{z}$ .

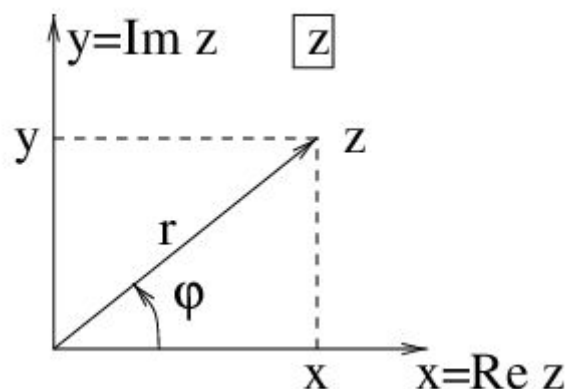


Рис. 169.

*Комплексная плоскость*

**ЗАМЕЧАНИЕ 33.1.** Отметим, что бесконечность считается одной точкой и обозначается  $z = \infty$ . При изображении комплексных чисел на комплексной плоскости  $\boxed{z}$  это тяжело себе представить. Однако, если воспользоваться сферой для изображения комплексных чисел (рис. 170), расположив её так, чтобы она касалась плоскости  $\boxed{z}$  в начале декартовой системы координат  $O$  и каждой точке  $z$  (комплексному числу  $z$ ) поставит в соответствие точку  $z$  на сфере, являющуюся точкой пересечения прямой соединяющей точку  $z$  на плоскости  $\boxed{z}$  и точку  $N$  диаметрально противоположную  $O$ , то бесконечности на плоскости  $\boxed{z}$  будет соответствовать одна точка  $N$  на этой сфере.

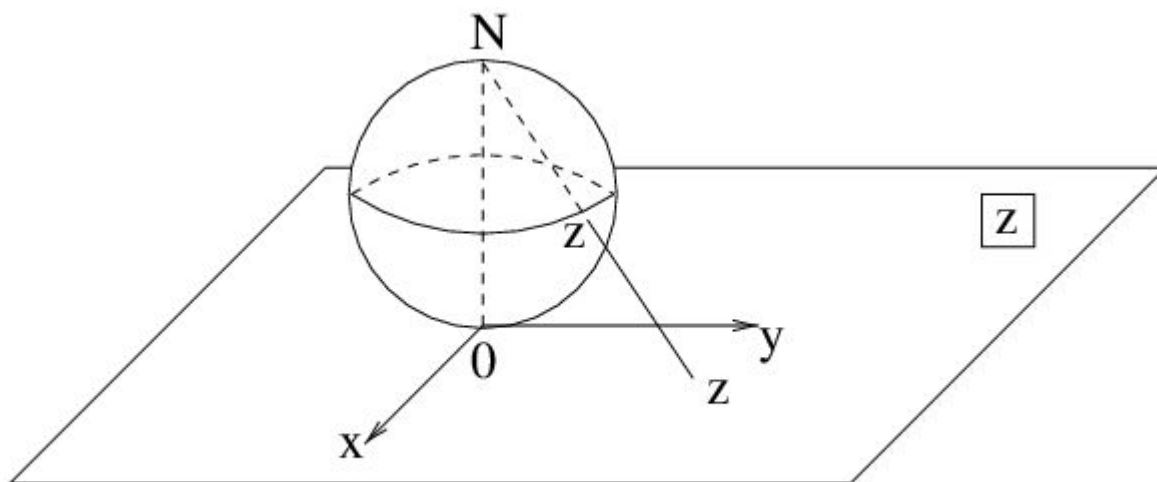


Рис. 170. Сфера комплексных чисел

### 33.3. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.3. Модулем комплексного числа  $|z|$  называется квадратный корень из суммы квадратов его действительной и мнимой частей:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (33.12)$$

Геометрически модуль комплексного числа равен длине радиуса-вектора  $\vec{r}$  точки  $z$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.4. Аргументом комплексного числа  $z$  называется угол между радиус-вектором  $\vec{r}$  точки  $z$  и осью  $Ox$  (рис. 169)

$$\varphi^o = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{при } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{при } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } y > 0, x = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } y < 0, x = 0. \end{cases} \quad (33.13)$$



**ПРИМЕР 33.3.** Определить модуль и аргумент комплексных чисел  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$  и  $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$  и изобразить их на комплексной плоскости.

**Решение:**

Для  $z_1$  и  $z_3$  отношение  $\frac{y}{x}$  одинаково, однако точка  $z_1$  расположена в I-ом квадранте и  $\varphi_1^o = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$ , точка  $z_3$  расположена в III-ем квадранте и

$\varphi_3^o = \pi + \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \frac{4}{3}\pi$ . для чисел  $z_2$  и  $z_4$  расположены соответственно во II-ом

и IV-ом квадрантах и аргументы  $\varphi_2^o = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\varphi_4^o = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$ .

Модуль всех четырёх комплексных чисел

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Следовательно, все эти числа расположены на окружности радиуса  $r = 2$  с найденными значениями аргументов (рис. 171).

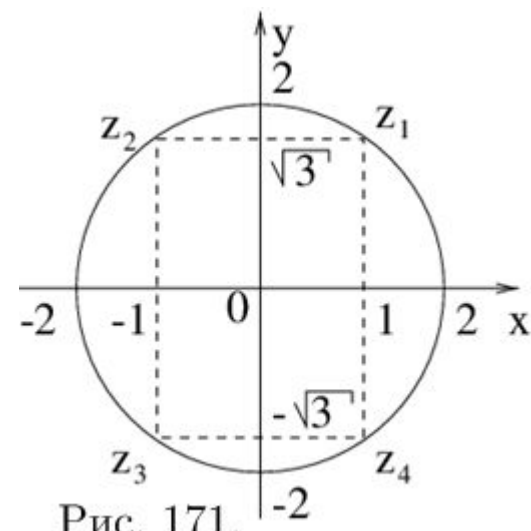


Рис. 171.

Все точки комплексной плоскости  $z$  с модулем, равным  $R$ , удовлетворяют уравнению

$$|z| = R, \tag{33.14}$$

которое таким образом является уравнением окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат.

Множество комплексных точек, расположенных внутри этой окружности определяется неравенством

$$|z| < R, \tag{33.15}$$

вне её  $|z| > R.$   $\tag{33.16}$

Очевидно, что если центр этой окружности сместить в точку  $z_0$  (рис. 172), её уравнение будет

$$|z - z_0| = R \tag{33.17}$$

Множество всех точек, лежащих внутри этой окружности удовлетворяет неравенству

$$|z - z_0| < R, \tag{33.18}$$

вне её  $|z - z_0| > R.$   $\tag{33.19}$

Области, определяемые неравенствами (33.15) и (33.18), заштрихованы на рис. 172.

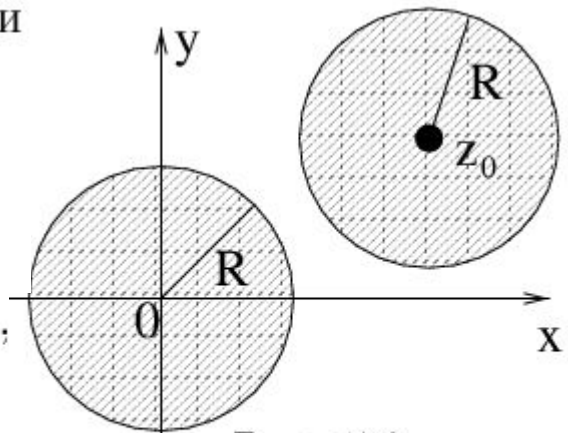


Рис. 172.  
Множество точек  $|z| < R$   
и  $|z - z_0| < R.$

Значения аргумента  $z$ , определяемое формулой (33.13) принято называть главным, что мы отмечаем верхним индексом «о» и прописной буквой а. Очевидно, что комплексное число  $z$  не изменится, если его аргумент изменить на  $2\pi k$ ,  $k \in Z$ . Таким образом более общее значение аргумента  $\varphi = \text{Arg } z$  определяется формулой

$$\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k = \varphi^o + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad (33.20)$$

которая при  $k = 0$  определяет главное значение аргумента (33.13).

Из рис. 169 видно, что

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (33.21)$$

и, следовательно, комплексное число может быть определено через  $r$  и  $\varphi$  по формуле

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (33.22)$$

следующей из (33.3) с учётом (33.21).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.5.** *Выражение (33.22) называется тригонометрической формой комплексного числа.*

Можно показать, что между показательной и тригонометрической функциями имеется связь, устанавливаемая формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (33.23)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.6. *Выражение*

$$z = r e^{i\varphi}, \quad (33.24)$$

*следующее из (33.22) с учётом (33.23) называется показательной формой комплексного числа.*

Формулы (33.1), (33.3), (33.22) и (33.24) являются различной записью комплексного числа  $z$ , и переход от одной из них к другой не представляет сложности.

следующие комплексные числа  $z$ , заданные в алгебраической форме: 1)  $z_1 = 3$ ; 2)  $z_2 = -3$ ; 3)  $z_3 = 3i$ ; 4)  $z_4 = -3i$  и 5)  $z_5 = 3 - i\sqrt{3}$ .

Решение: 1) Главное значение аргумента для любого положительного действительного числа  $\varphi^o = 0$  и, следовательно, по формулам (33.22), (33.24) с учётом (33.12) и (33.20)  $z_1 = 3 = 3(\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) = 3e^{i2\pi k}$ .

2) Для любого отрицательного действительного числа  $\varphi^o = \pi$  и, следовательно,

$$z_2 = -3 = 3(\cos(2k + 1)\pi + i \sin(2k + 1)\pi) = 3e^{i(2k+1)\pi}.$$

3) Для любого чисто мнимого числа  $x = 0$  и при  $y > 0 \rightarrow \varphi^o = \frac{\pi}{2}$  и, следовательно,

$$z_3 = 3i = 3\left(\cos\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi + i \sin\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 3e^{i(2k+1/2)\pi}.$$

4) При  $y < 0 \rightarrow \varphi^o = -\frac{\pi}{2}$

и

$$z_4 = -3i = 3\left(\cos\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi + i \sin\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 3e^{i(2k-1/2)\pi}.$$

5) Для  $z_5 = 3 - i\sqrt{3}$  главное значение аргумента  $\varphi^o = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$

и, следовательно,

$$z_5 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi + i \sin\left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi\right) = 2\sqrt{3}e^{i(2k-1/6)\pi}.$$

Наиболее удобно использование показательной и тригонометрической форм комплексных чисел при умножении, делении, возведении в степень и извлечении корней.

Пусть  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  и  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ , тогда

$$z = r e^{i\varphi} = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad (33.25)$$

$$z = r e^{i\varphi} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (33.26)$$

и, следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются  $r = r_1 r_2$ , а аргументы складываются  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , при делении – модули делятся  $r = \frac{r_1}{r_2}$ , а аргументы вычитаются  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Очевидно, при возведении в степень комплексного числа  $z = r e^{i\varphi}$  имеем

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \quad (33.27)$$

В тригонометрической форме формула (33.27) носит название *формулы Муавра*

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (33.28)$$

Поскольку  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ , а следовательно, согласно (33.24) и  $e^{i\varphi}$  являются периодическими функциями с периодом  $2\pi$ , в формулах (33.21)–(33.26), а при целом  $n$  и в формулах (33.27), (33.28)  $\varphi$  следует брать равным своему главному значению  $\varphi^0 = \arg z$ .

Формулы (33.27) и (33.28) справедливы и при дробном  $n$ , но при этом в этих формулах необходимо учитывать многозначность аргумента комплексного числа и в соответствии с формулой (33.20) положить  $\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$ . В частности, при извлечении корня  $n$ -ой степени и комплексного числа  $z = r e^{i\varphi}$  получаем

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n} e^{i \frac{\varphi^o + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi^o + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi^o + 2\pi k}{n} \right). \quad (33.29)$$

Придавая  $k$  последовательно значения  $0, 1, 2, \dots, n-1$ , получим  $n$  различных значений  $\sqrt[n]{z}$  с одинаковым модулем, но различными аргументами. На комплексной плоскости  $\boxed{z}$  все эти значения расположены на окружности радиуса  $\sqrt[n]{r}$  в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в эту окружность. Если  $k$  принимает значения больше  $n-1$ , то эти точки повторяются.

Из сказанного очевидно, что уравнение  $n$ -ой степени

$$z^n - a = 0, \quad (33.30)$$

где  $a = r e^{i\varphi}$  – комплексное число, имеет  $n$  корней  $z = \sqrt[n]{a}$ , определяемых по формуле (33.29).

ПРИМЕР 33.5. Возвести в 6-ую степень и извлечь корень 6-ой степени из 16 комплексного числа  $z = 3 - i\sqrt{3}$ .

Решение: Модуль и главное значение аргумента числа  $z = 3 - i\sqrt{3}$  мы нашли в примере 33.4. Они равны соответственно  $2\sqrt{3}$  и  $-\frac{\pi}{6}$ .

Следовательно, по формуле (33.27)

$$\begin{aligned}(3 - i\sqrt{3})^6 &= (2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}})^6 = \\ &= 2^6 3^3 e^{i11\pi} = 1728(\cos \pi - i \sin \pi) = 1728(-1 - i0) = -1728,\end{aligned}$$

а по формуле (33.29)

$$\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}} = \left(2\sqrt{3}e^{-i(\frac{\pi}{6} + 2\pi k)}\right)^{1/6} = \sqrt[6]{2} \sqrt[12]{3} e^{i\frac{(-1+12k)\pi}{36}}.$$

Придавая  $k$  значения  $0, 1, \dots, 5$  получим 6 разных значений  $\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}}$ :

$$\begin{aligned}z_1 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_1 = \sqrt[12]{12}e^{-i\frac{\pi}{36}}, & z_2 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_2 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{11}{36}\pi}, \\ z_3 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_3 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{23}{36}\pi}, & z_4 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_4 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{35}{36}\pi}, \\ z_5 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_5 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{47}{36}\pi}, & z_6 &= (\sqrt[6]{3 - i\sqrt{3}})_6 = \sqrt[12]{12}e^{i\frac{59}{36}\pi}.\end{aligned}$$



Все эти значения на комплексной плоскости  $\boxed{z}$  расположены в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt[12]{12}$  (рис. 173).

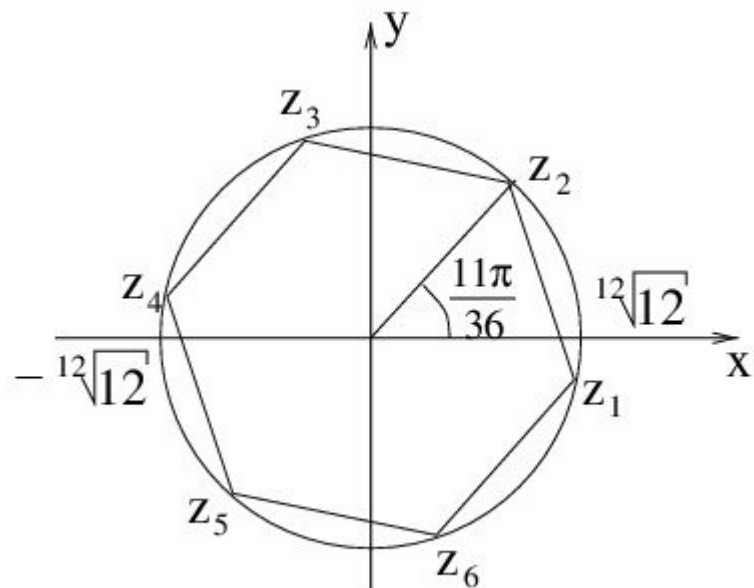


Рис. 173. К примеру 33.5

ПРИМЕР 33.6. Найти все корни уравнения  $z^4 + 1 = 0$ .

Решение:  $z^4 + 1 = 0 \rightarrow z^4 = -1 \rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$ .

Поскольку для любого отрицательного действительного числа

$$\arg z = \pi, \quad -1 = 1e^{i(\pi+2\pi k)}$$

и, следовательно, 
$$z = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}.$$

Находим четыре корня, положив  $k$  равным 0,1,2,3:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i),$$

$$z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i),$$

$$z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

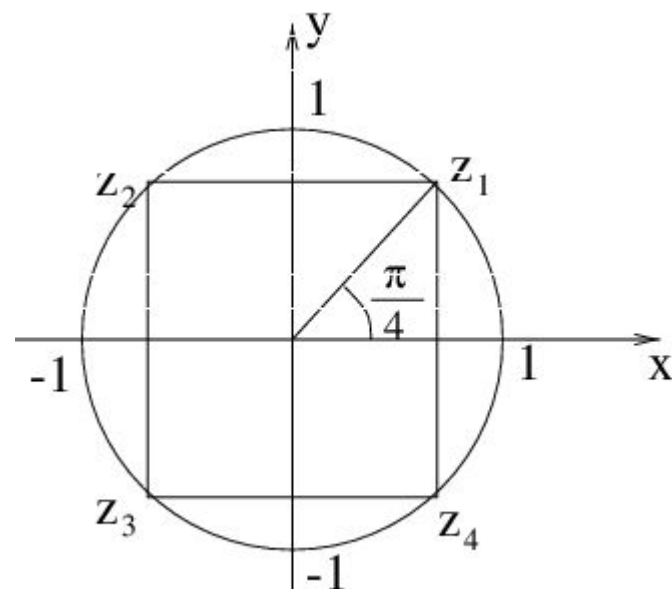


Рис. 174. К примеру 33.6

На плоскости  $\boxed{z}$  эти корни расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность единичного радиуса (рис. 174).

ПРИМЕР 33.7. Определить расположение всех корней уравнения  $z^5 - 32 = 0$  на плоскости  $[z]$ .

Решение:

Поскольку  $z^5 = 32 = 2^5$ , один из корней легко находится, и он равен  $z_1 = 2$ . Остальные четыре корня расположены в вершинах правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса 2 (рис. 175).

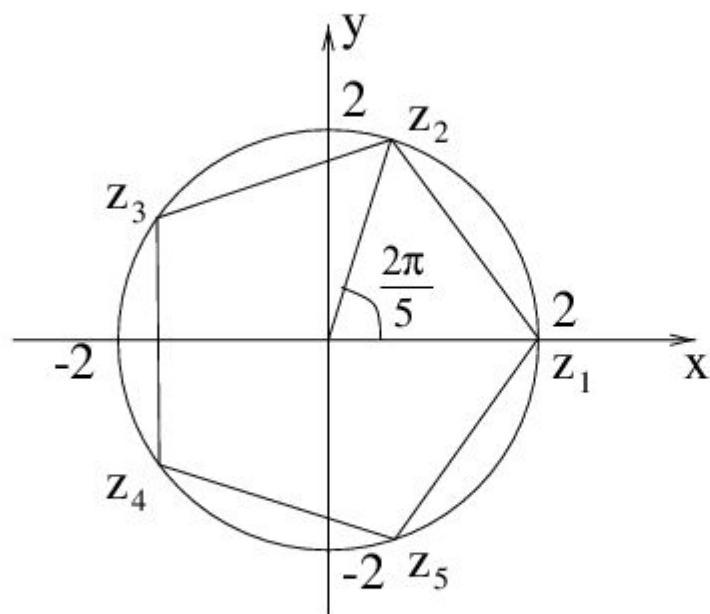


Рис. 175. К примеру 33.7

Интересно отметить, что из формулы Муавра (33.28) можно получить тригонометрические формулы, выражающие  $\sin nx$  и  $\cos nx$  через  $\sin x$  и  $\cos x$ .

Рациональной функцией или рациональной дробью, называется функция, равная частному от деления двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \quad (34.1)$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad (34.2)$$

где

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0 = \sum_{k=0}^m b_k x^k. \quad (34.3)$$

*Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя и неправильной – в противном случае.*

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

**ПРИМЕР 34.1.** Представить в виде суммы многочлена и правильной дроби следующую неправильную дробь:

$$R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1}.$$

**Решение:** Разделив числитель на знаменатель, получим в частном  $x + 3$  и в остатке  $-6x^2 - 5x + 8$ , т.е.

$$R(x) = x + 3 + \frac{-6x^2 - 5x + 8}{x^3 + 2x^2 - 1}.$$

Остаток от деления многочлена  $P_n(x)$  на разность  $x - a$  можно найти, не выполняя самого процесса деления на основании следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 34.1.** (Теорема Безу). Остаток от деления многочлена  $P_n(x)$  на разность  $x - a$  равен значению многочлена  $P_n(x)$  при  $x = a$ .

**ПРИМЕР 34.2.** Найти остаток от деления многочлена  $P(x) = 3x^9 - 2x^5 + 3x^2 + 4x - 8$  на двучлен  $x + 1$ .

**Решение:**

Здесь  $a = -1$ . Поэтому искомый остаток равен:

$$\begin{aligned} P(-1) &= 3(-1)^9 - 2(-1)^5 + 3(-1)^2 + 4(-1) - 8 = \\ &= -3 + 2 + 3 - 4 - 8 = -10. \end{aligned}$$

Рассмотрим кратко некоторые сведения о многочленах, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1. Корнем многочлена (34.2)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

называется всякое число  $\gamma$  (действительное или комплексное), которое обращает многочлен в нуль, т.е. такое, что  $P_n(\gamma) = 0$ .

**ПРИМЕР 34.3.** Проверить, что  $\gamma = 1$  является корнем многочлена  $x^3 + 5x^2 - 2x - 4$ .

**Решение:** Действительно:  $1^3 + 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$ .

2. Имеет место следующая теорема, принимаемая без доказательства:

**ТЕОРЕМА 34.2.** *Всякий многочлен степени  $n$  может быть представлен в виде произведения  $n$  множителей вида  $x - \gamma$  и множителя при старшей степени  $x$ , т.е.*

$$P_n(x) = a_n(x - \gamma_1)(x - \gamma_2)\dots(x - \gamma_n). \quad (34.4)$$

Числа  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  очевидно являются корнями многочлена.

Если в разложении 34.4 раскрыть скобки, то свободный член многочлена будет равен произведению корней многочлена  $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_n$ .

Отсюда вытекает следующее правило: *Если многочлен  $P_n(x)$  имеет целые корни, то эти корни являются делителями свободного члена.*

Так как любое число имеет конечное множество целых делителей, то это правило позволяет решать алгебраические уравнения степени выше двух при условии, что хотя бы один корень – целое число.

ПРИМЕР 34.4. Решить уравнение

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Решение:

Если у него есть целые корни, то только  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ ,  $\pm 6$ . Подставив в уравнение, например,  $x = 1$ , получим тождество. Следовательно, на основании теоремы Безу многочлен  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$  делится на разность  $x - 1$  без остатка.

Выполнив это деление, получим:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - 5x - 6).$$

Решив квадратное уравнение

$$x^2 - 5x - 6 = 0,$$

найдем корни:  $-3$  и  $2$ . Следовательно, корни данного уравнения:

$$x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = 2.$$

ПРИМЕР 34.5. Легко проверить, что  $5x^4 - 4x^3 + 115x^2 - 140x + 60 = 5(x - 1)(x - 2)(x - 2)(x - 3)$ .

ПРИМЕР 34.6. Многочлен  $x^3 + x = x(x - i)(x + i)$ .



3. Среди линейных множителей в (34.4) могут быть одинаковые. Объединяя их, можем записать разложение многочлена на множители в виде:

$$P_n(x) = a_n(x - a)^{k_1}(x - b)^{k_2} \dots (x - p)^{k_s}, \quad (34.5)$$

где все корни  $a, b \dots p$  различны, и сумма показателей степени равна  $n$ .

Корни  $a, b \dots p$  называются кратными корнями многочлена, а именно  $a$  – корень кратности  $k_1$ ,  $b$  – корень кратности  $k_2$ ,  $p$  – корень кратности  $k_s$ .

4. Среди корней в разложении (34.4) могут быть комплексные  $\alpha \pm \beta i$ . В алгебре доказывается: если  $\alpha + \beta i$  является корнем многочлена кратности  $k$ , то и сопряжённое число  $\alpha - \beta i$  также является корнем этого же многочлена той же кратности.

5. Поэтому, если в разложении (34.5) есть множитель  $(x - (\alpha + \beta i))^k$ , то в этом разложении присутствует множитель  $(x - (\alpha - \beta i))^k$ .

Перемножив два множителя, соответствующие комплексным сопряженным корням, получим (см. 33.7):

$$\begin{aligned} (x - (\alpha + \beta i))^k (x - (\alpha - \beta i))^k &= ((x - \alpha) - \beta i)^k ((x - \alpha) + \beta i)^k = \\ &= ((x - \alpha)^2 + \beta^2)^k = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^k = (x^2 + px + q)^k, \end{aligned}$$

где  $p = -2\alpha, q = \alpha^2 + \beta^2$ .

Обратите внимание, что трёхчлен  $x^2 + px + q$ , равный сумме двух квадратов, имеет отрицательный дискриминант.

6. Все вышесказанное позволяет сформулировать утверждение: всякий многочлен с действительными коэффициентами можно представить в следующем виде:

$$P_n(x) = a_n(x - a)^{k_1}(x - b)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \dots \quad (34.6)$$

В формуле (34.6)  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_m)$ .

В нём линейные множители соответствуют действительным корням, а квадратные трёхчлены, имеющие по два корня – комплексным корням многочлена.

### 34.3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34.1. *Дроби*

$$I. \frac{A}{x - a},$$

$$II. \frac{A}{(x - a)^n} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

$$III. \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \quad (D = p^2 - 4q < 0),$$

$$IV. \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} \quad (D = p^2 - 4q < 0, n = 2, 3, \dots)$$

*называются простейшими дробями первого, второго, третьего и четвёртого типов.*

В высшей алгебре доказывается следующая теорема:

**ТЕОРЕМА 34.3.** *Правильную рациональную дробь  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ , где*

$P_n(x) = (x - a)^k \cdots (x^2 + px + q)^l \cdots$ , *можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:*

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - a)^k} + \cdots \quad (34.7)$$

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{M_lx + N_l}{(x^2 + px + q)^l}, \cdots,$$

где  $A_i, B_i, M_i, N_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) – действительные числа.

В формуле (34.7) первое слагаемое в разложении многочлена  $P_n(x)$  на множители соответствует другим, кроме  $a$ , действительным корням, а второе – комплексным.

Из формулы (34.7) следует, что линейным множителям в разложении знаменателя соответствуют дроби I и II типов, а квадратичным множителям соответствуют простейшие дроби III и IV типов.

При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю, равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби на множители.

Правило разложения правильной рациональной дроби остается справедливым при любом числе линейных и квадратичных множителей в разложении знаменателя  $P_n(x)$ .

### 34.3.1. Метод неопределённых коэффициентов.

Этот метод основан на следующем утверждении, принимаемом без доказательства: если два многочлена тождественно равны, то равны и коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной в обеих частях тождества.

Поэтому приводя в правой части разложения (34.7) к общему знаменателю, получаем тождественное равенство двух рациональных дробей с равными знаменателями.

Следовательно, числители тождественно равны. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A, B, \dots$

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 34.7. Разложить на простейшие дроби:  $\frac{x^2 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 6x}$ .

Решение:

$$\frac{x^2 + 2x - 6}{x(x + 3)(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 2}. \quad (34.8)$$

Приводим правую часть этого тождества к общему знаменателю:

$$\frac{x^2 + 2x - 6}{x(x + 3)(x - 2)} = \frac{A(x + 3)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 3)}{x(x + 3)(x - 2)}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ :

$$\begin{cases} x^2 : A + B + C = 1, \\ x : A - 2B + 3C = 2, \\ \text{свободные члены: } -6A = -6. \end{cases}$$

Можно показать, что эта система всегда имеет единственное решение. Это решение следующее:

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad C = \frac{1}{5}.$$

Подставив найденные коэффициенты в разложение (34.8), окончательно получим:

$$\frac{x^2 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{5(x + 3)} + \frac{1}{5(x - 2)}. \quad (34.9)$$

ПРИМЕР 34.8. Разложить на простейшие дроби:  $\frac{3x^2 + 5}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)}$ .

Решение:

$$\frac{3x^2 + 5}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 5}. \quad (34.10)$$

Приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 5}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)} &= \\ &= \frac{A(x - 1)(x^2 + 2x + 5) + Bx(x^2 + 2x + 5) + (Mx + N)(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)}. \end{aligned}$$

Приравнявая числители, получаем:

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= A(x^3 + x^2 + 3x - 5) + B(x^2 + 2x + 5) + \\ &+ M(x^3 - 2x^2 + x) + N(x^2 - 2x + 1) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= (A + M)x^3 + (A + B - 2M + N)x^2 + \\ &+ (3A + 2B + M - 2N)x + (-5A + 5B + N). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  получаем систему:

$$\begin{cases} x^3 : A + M = 0, \\ x^2 : A + B - 2M + N = 3, \\ x : 3A + 2B + M - 2N = 0, \\ \text{свободные члены: } -5A + 5B + N = 5. \end{cases}$$

Её решение:  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = 1$ ,  $M = -\frac{1}{4}$ ,  $N = \frac{5}{4}$ .

Следовательно, подставив найденные коэффициенты в (34.10), получим:

$$\frac{3x^2 + 5}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}{x^2 + 2x + 5}.$$



Этот метод основан на очевидном утверждении: если два многочлена тождественно равны:  $P(x) \equiv Q(x)$ , то они равны при любом значении независимой переменной  $x = a$ :  $P(a) = Q(a)$ , где  $a$  - произвольное число.

Поэтому вместо приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях неизвестной в разложении (34.7) можно подставлять туда вместо  $x$  несколько произвольных чисел.

Этот метод особенно эффективен, когда многочлен  $P_n(x)$ , стоящий в знаменателе имеет, различные действительные корни и в качестве произвольных значений берутся числа, равные действительным корням знаменателя.

ПРИМЕР 34.9. Разложить на простейшие дроби функцию из примера 34.7. 34

Решение: Ранее, при использовании метода неопределённых коэффициентов, было получено:

$$x^2 + 2x - 6 = A(x + 3)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 3).$$

Подставим в это тождество последовательно три значения  $x$ :

$$x = 0 : -6 = -6A \implies A = 1,$$

$$x = 2 : 2 = 10C \implies C = \frac{1}{5},$$

$$x = -3 : -3 = 15B \implies B = -\frac{1}{5}.$$

Опять получаем соотношение (34.10).

Рассмотрим теперь пример, в котором для разложения знаменателя на множители можно использовать операцию извлечения корня из комплексного числа.

ПРИМЕР 34.10. Разложить на простейшие дроби  $\frac{1}{x^4 + 1}$ .

Решение:

Многочлен  $x^4 + 1$ , стоящий в знаменателе имеет лишь комплексные корни, которые мы нашли ранее:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \quad x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

Таким образом,

$$x^4 + 1 = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Объединив первую скобку с последней, вторую с третьей, получим:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad \cdot \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{i^2}{2}\right) \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{i^2}{2}\right) = \left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (34.7) и методом неопределённых коэффициентов, находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 + 1} &= \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = & (34.11) \\ &= \frac{(Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{x^4 + 1} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} Ax^3 + A\sqrt{2}x^2 + Ax + Bx^2 + B\sqrt{2}x + B + Cx^3 - \\ - C\sqrt{2}x^2 + Cx + Dx^2 - D\sqrt{2}x + D = 1. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений для определения неизвестных  $A, B, C, D$ :

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D = 0, \\ A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2} = 0, \\ B + D = 1. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения  $C$  через  $A$ , а из последнего  $D$  через  $B$  и подставив  $C = -A$  и  $D = 1 - B$  во второе и третье уравнения системы, получим:

$$A\sqrt{2} + B + A\sqrt{2} + 1 - B = 0 \Rightarrow 2A\sqrt{2} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow C = -A = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$A + B\sqrt{2} - A - \sqrt{2} + B\sqrt{2} = 0 \Rightarrow$$

$$2B\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \Rightarrow D = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  в (34.11), найдем разложение дроби  $\frac{1}{x^4 + 1}$  на простейшие:

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}. \quad (34.12)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 34.1.** Разложение (34.12) многочлена  $P_4(x) = x^4 + 1$  на множители можно было бы получить и методом неопределённых коэффициентов. Учитывая, что комплексные корни входят в разложение многочлена на множители как корни квадратных трёхчленов вида  $x^2 + px + q$  при  $D < 0$ , запишем:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2) = \\ &= x^4 + p_1x^3 + q_1x^2 + p_2x^3 + p_1p_2x^2 + p_2q_1x + q_2x^2 + p_1q_2x + q_1q_2. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  слева и справа в полученном тождестве, получим уравнения для определения  $p_1, p_2, q_1, q_2$  и найдем их так:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = -p_1 \Rightarrow p_2 = -\sqrt{2}, \\ q_1 + p_1 p_2 + q_2 = 0 \Rightarrow p_1 p_2 = -q_1 - q_2 = -2 \Rightarrow \\ \Rightarrow p_1^2 = 2 \Rightarrow p_1 = \sqrt{2}, \\ p_2 q_1 + p_1 q_2 = 0 \Rightarrow -p_1 q_1 + p_1 q_2 = p_1(q_2 - q_1) = 0 \Rightarrow q_1 = q_2, \\ \text{т.к. } p_1 \neq 0, \\ q_1 q_2 = 1 \Rightarrow q_1^2 = q_2^2 = 1 \Rightarrow q_1 = q_2 = 1. \end{cases}$$

Отметим, что  $q_1 = q_2 \neq -1$ , так как в этом случае из второго уравнения следовало бы, что  $p^2 = -2$ , что невозможно. Таким образом, мы получили опять разложение (34.12).

**ЗАМЕЧАНИЕ 34.2.** Разложить  $x^4 + 1$  на множители можно ещё и так. Прибавим и вычтем  $2x^2$  и воспользуемся формулой сокращённого умножения:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \\ &= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x). \end{aligned}$$

Этот пример показывает, что нестандартные приемы решения часто очень эффективны!

Спасибо за внимание