

$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

Понятие обратной функции.

Определение логарифмической функции.

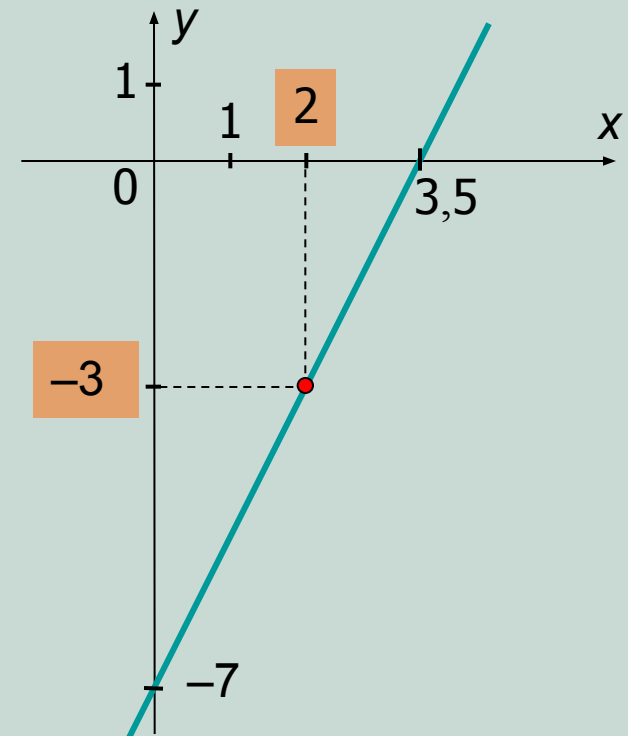
Алгебра и начала анализа, 11 класс

Рассмотрим пример какой-либо функции, заданной в явном виде формулой $y=f(x)$. Пусть, для определенности, это будет линейная функция $y=2x-7$. Вспомним, как выполняется такая задача: *найти значение функции по заданному значению аргумента*. Вспомнили?..

...Правильно: для этого надо данное значение аргумента подставить в формулу и произвести вычисления. Например, при $x=2$, значение функции равно $y=2 \cdot 2 - 7 = -3$.

Эту же задачу можно выполнить графическим способом. Для этого нужно:

- 1) построить график данной функции;
- 2) отметить на оси абсцисс значение 2;
- 3) получить на графике точку с отмеченной абсциссой 2;
- 4) найти ординату полученной в п.3 точки.



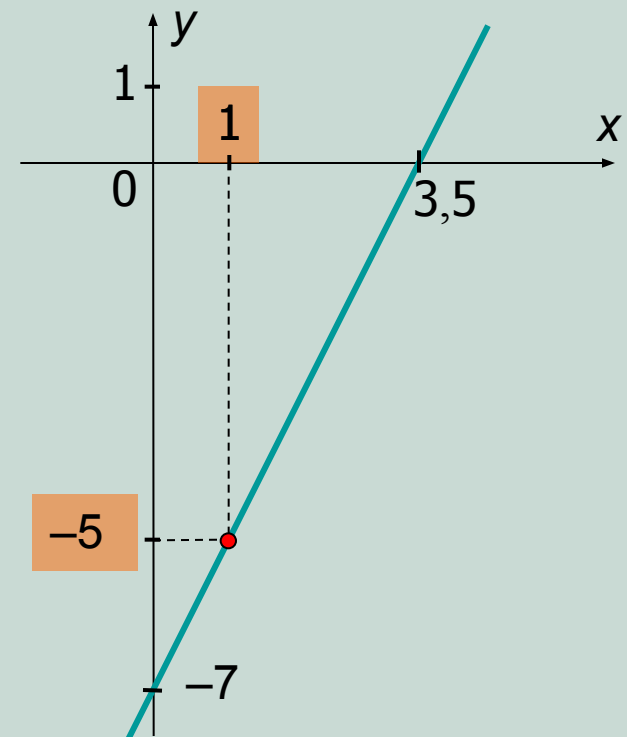
Для любой другой функции задача нахождения значения функции по заданному значению аргумента решается аналогично.

А теперь вспомним, как решается обратная задача по нахождению значения аргумента при заданном значении функции. В нашем примере с линейной функцией $y=2x-7$ это происходит по следующему алгоритму: в формулу, задающую данную функцию подставляют заданное значение функции и решают полученное уравнение с переменной x . Например, при $y=-5 \Rightarrow 2x-7=-5 \Rightarrow x=1$.

Эту же задачу можно выполнить графическим способом. Для этого нужно:

- 1) построить график данной функции;
- 2) отметить на оси ординат значение -5 ;
- 3) получить на графике точку с отмеченной ординатой -5 ;
- 4) найти абсциссу полученной в п.3 точки.

Для любой другой функции задача нахождения значения аргумента по заданному значению функции решается аналогично.



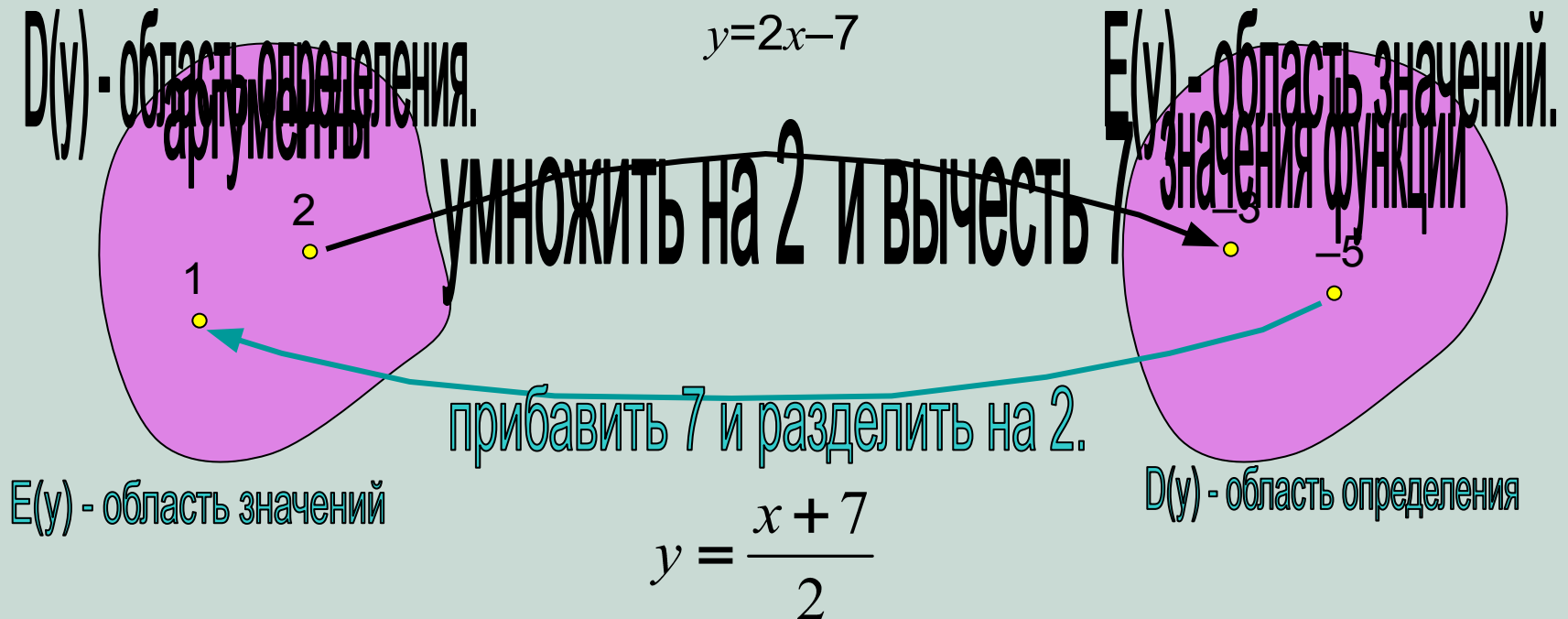
Однако, при решении **обратной** задачи можно поступить по-другому. Для этого составляют **обратную зависимость**, считая заданное значение данной функции аргументом этой зависимости. Сделать это можно двумя способами:

1) Выразить из формулы данной функции x через y . В нашем случае:

$y=2x-7 \Rightarrow 2x=y+7 \Rightarrow x=0,5y+3,5$. А теперь записать эту зависимость, как новую функцию, в привычном для нас виде: $y=0,5x+3,5$. **Или**

2) Поменять в формуле данной функции x и y . В нашем случае:

$y=2x-7 \Rightarrow x=2y-7$. А теперь записать эту зависимость, как новую функцию, в привычном для нас виде, выразив y через x : $2y=x+7 \Rightarrow y=0,5x+3,5$.



Таким образом, мы получили обратную для функции $y=2x-7$ зависимость, которая является в свою очередь также функцией $y=0,5x+3,5$. С помощью обратной функции мы можем решать обратную задачу по нахождению значения аргумента при заданном значении данной функции. Только для обратной функции это заданное значение функции является аргументом! Значит, для

$$y=x=-5 \Rightarrow y=0,5 \cdot (-5)+3,5=1.$$

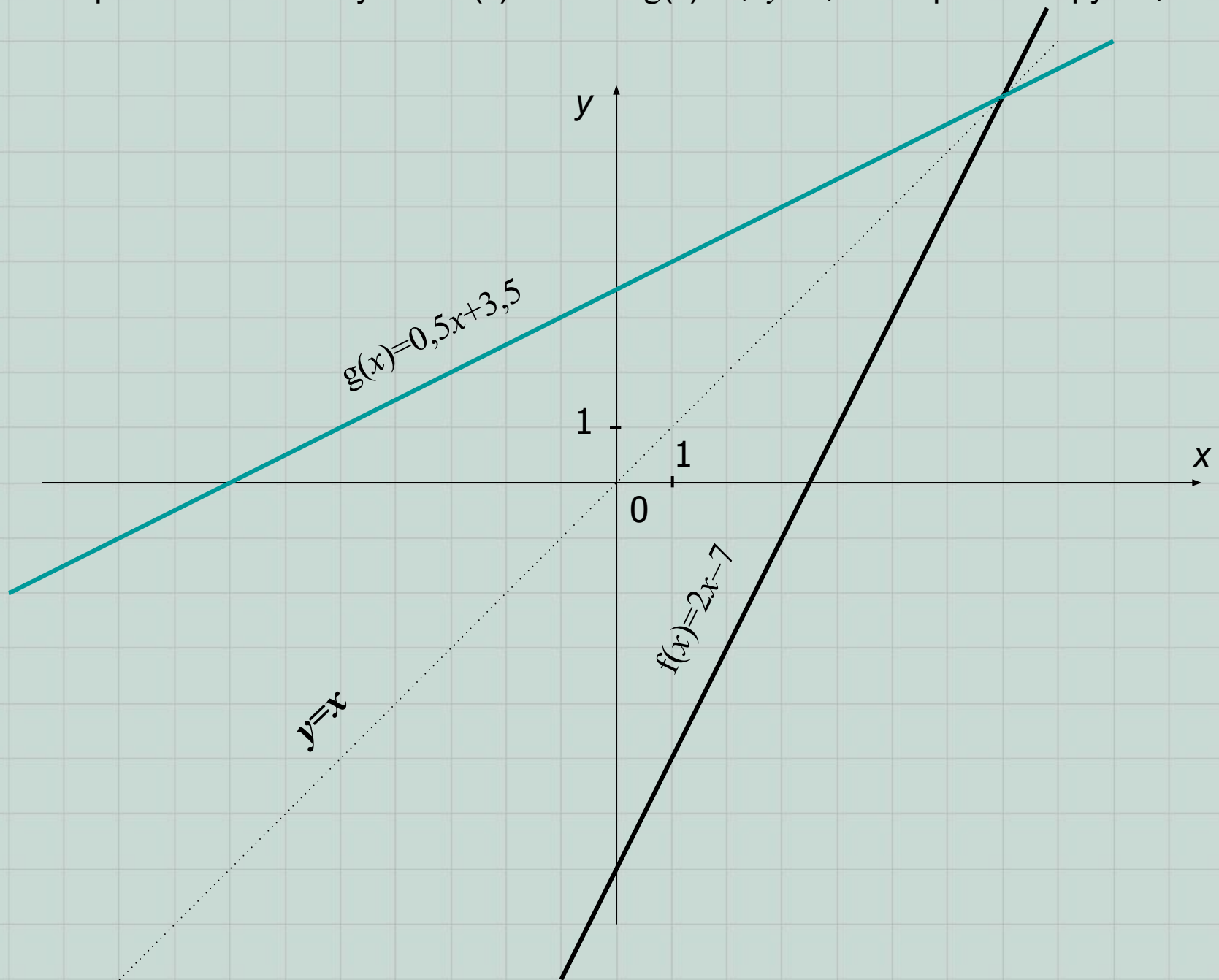
Примечание 1. Если для данной функции можно составить обратную зависимость, являющуюся также функцией, то говорят, что данная функция **обратима** и обратная зависимость является **обратной функцией**.

Примечание 2. Если функция $y=f(x)$ является обратимой и $y=g(x)$ – обратная для неё функция, то:

$$1) D(f)=E(g) \text{ и } E(f)=D(g); \quad 2) f(g(x))=g(f(x))=x.$$

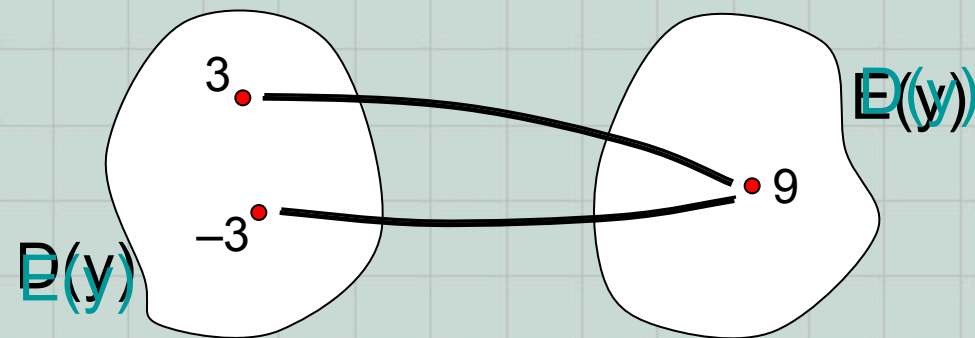
Примечание 3. Графики данной и обратной для неё функций симметричны относительно прямой $y=x$.

В рассмотренном нами случае: $f(x)=2x-7$ и $g(x)=0,5y+3,5$ – обратные функции.



Чтобы обратная для данной функции зависимость была также функцией **необходимо и достаточно**, чтобы каждое свое значение функция принимала только при одном значении аргумента. Значит, чтобы функция была обратимой, данная функция должна быть **монотонно возрастающей** или **монотонно убывающей** на всей своей области определения.

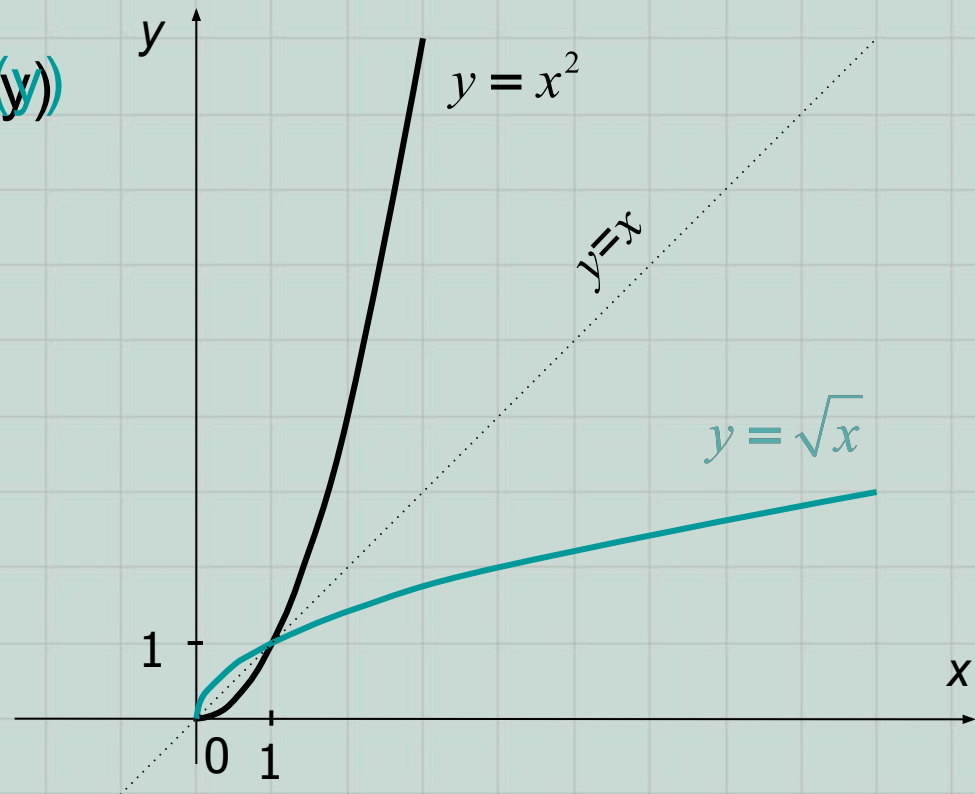
Пример 1. Функция $y=x^2$ не является обратимой на $D(y)=\square$, т.к. при $x=3$ или -3 функция принимает одно и то же значение 9, а значит, обратная зависимость функцией не является. Однако, на области $x \in [0; +\square)$ данная функция обратима и обратной для неё является знакомая Вам функция $y = \sqrt{x}$.



$$D(x^2) = E(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$$

$$E(x^2) = D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$$

$$(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} = x$$

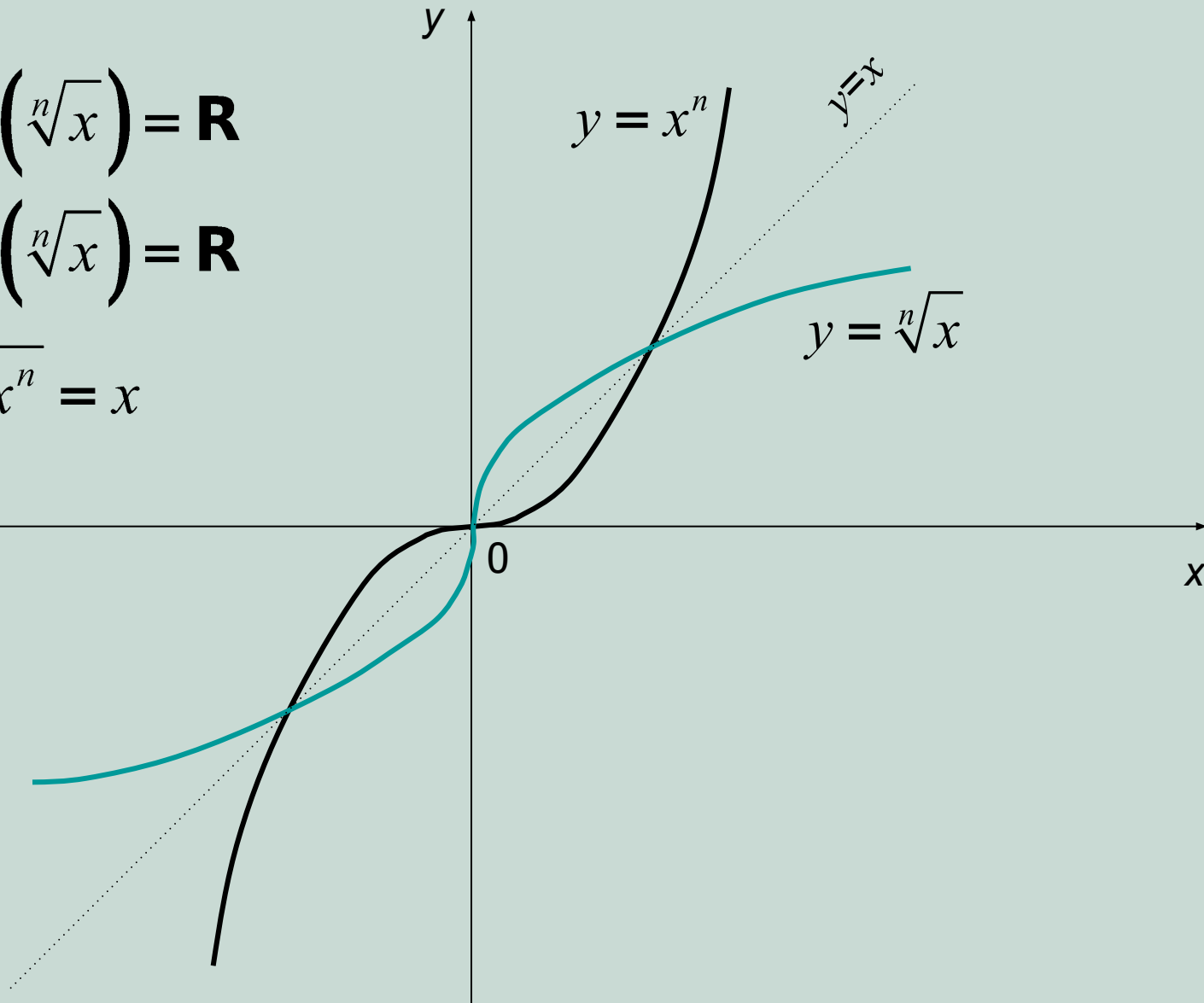


Пример 2. Любая степенная функция $y = x^n$ с нечетным натуральным показателем является обратимой (проверьте самостоятельно).

$$D(x^n) = E(\sqrt[n]{x}) = \mathbf{R}$$

$$E(x^n) = D(\sqrt[n]{x}) = \mathbf{R}$$

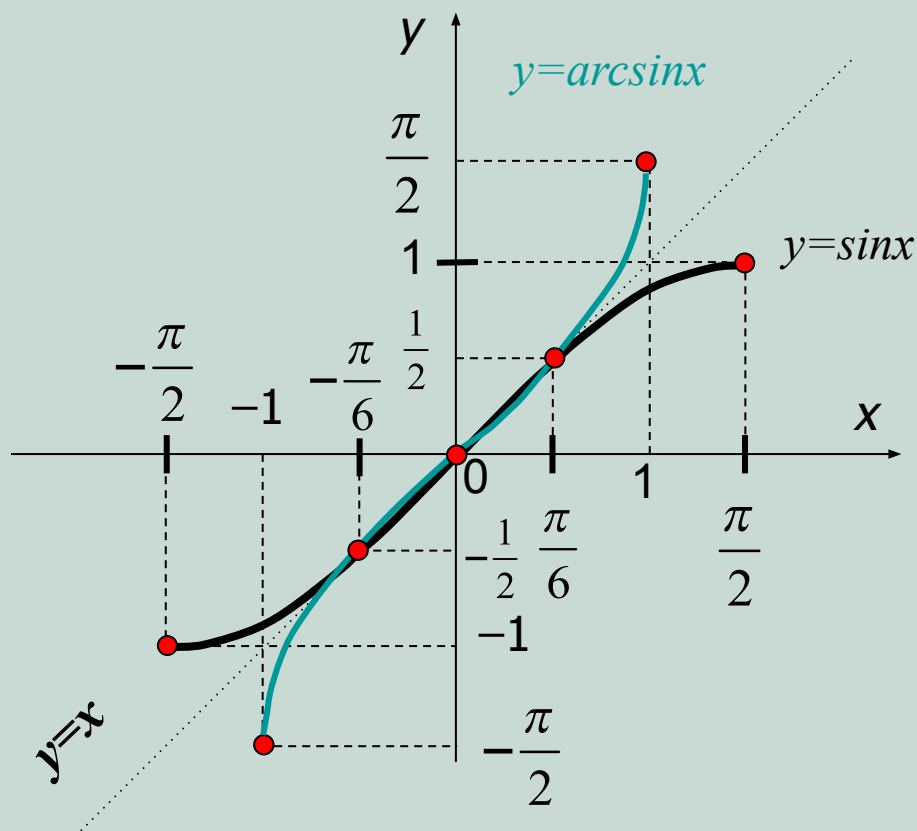
$$(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$



Пример 3. Рассмотрим тригонометрическую функцию $y = \sin x$.

Постарайтесь самостоятельно ответить на вопросы: 1) является ли данная функция обратимой на своей области определения? 2) на какой области данная функция обратима? 3) назовите обратную на этой области функцию; 4) постройте графики обеих функций.

Ответ: 1) нет; 2) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $y = \arcsin x$; 4) см.рис..



Рассмотрим теперь показательную функцию $y = a^x$, которую Вы изучили. Так как эта функция является монотонной, в зависимости от основания степени a – монотонно возрастающей или монотонно убывающей (вспомните соответствующие условия этого), то она обратима на всей своей области определения. Составим обратную функцию описанным выше методом:

$$y = a^x \Rightarrow x = a^y.$$

Теперь перед нами встает проблема выражения из последнего равенства переменной y (показателя степени, в который возводится положительное число a) через x , чтобы получить привычную формулу зависимости. Это делается с помощью нового понятия – **логарифма числа по основанию a** :

$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x. \quad \text{Читают так: «логарифм x по основанию a »}.$$

Определение. Логарифмом числа x по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число x .

Число a называется *основанием логарифма*, число x называют *подлогарифмическим выражением*.

Пример. $\log_3 9 = 2$, т.к. $3^2 = 9$; $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log_8 \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

А теперь постарайтесь ответить на вопрос: в какую степень нужно возвести число 3, чтобы результатом этой степени получилось число 10?

$$3^{\log_3 10} = 10$$

Примечание 1. Если основанием логарифма является число **10**, то такой логарифм называется **десятичным** и обозначается lg .

Пример: $lg 0,0001 = -4$

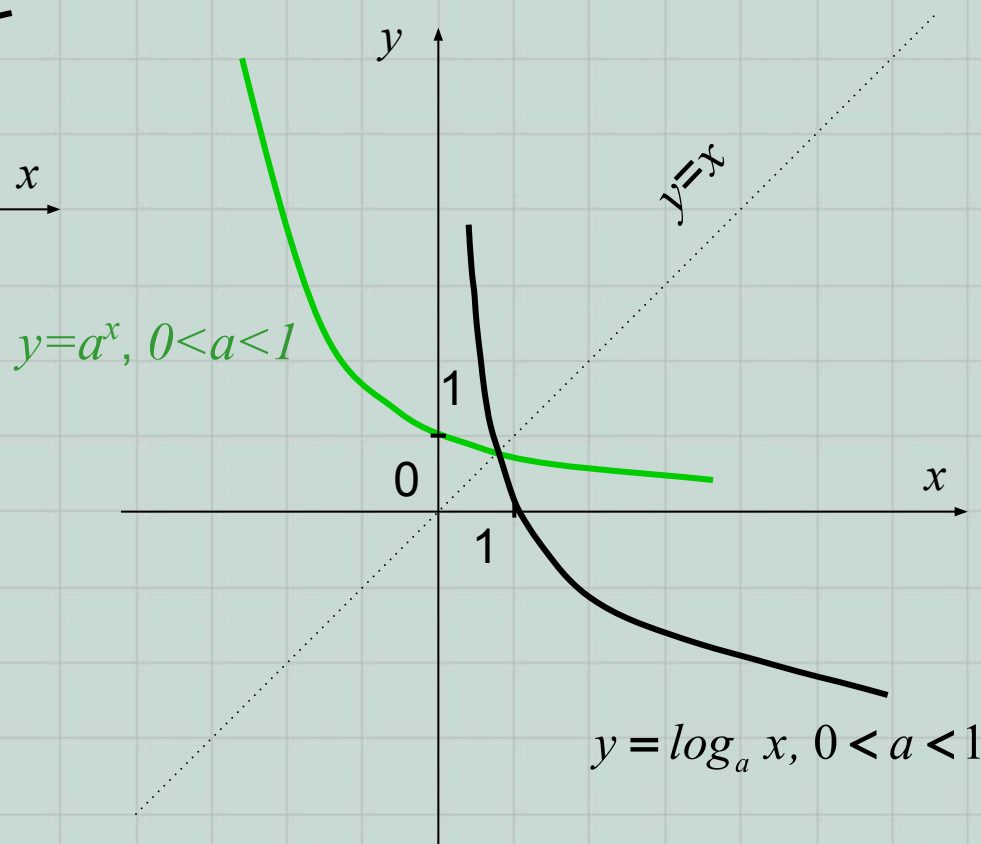
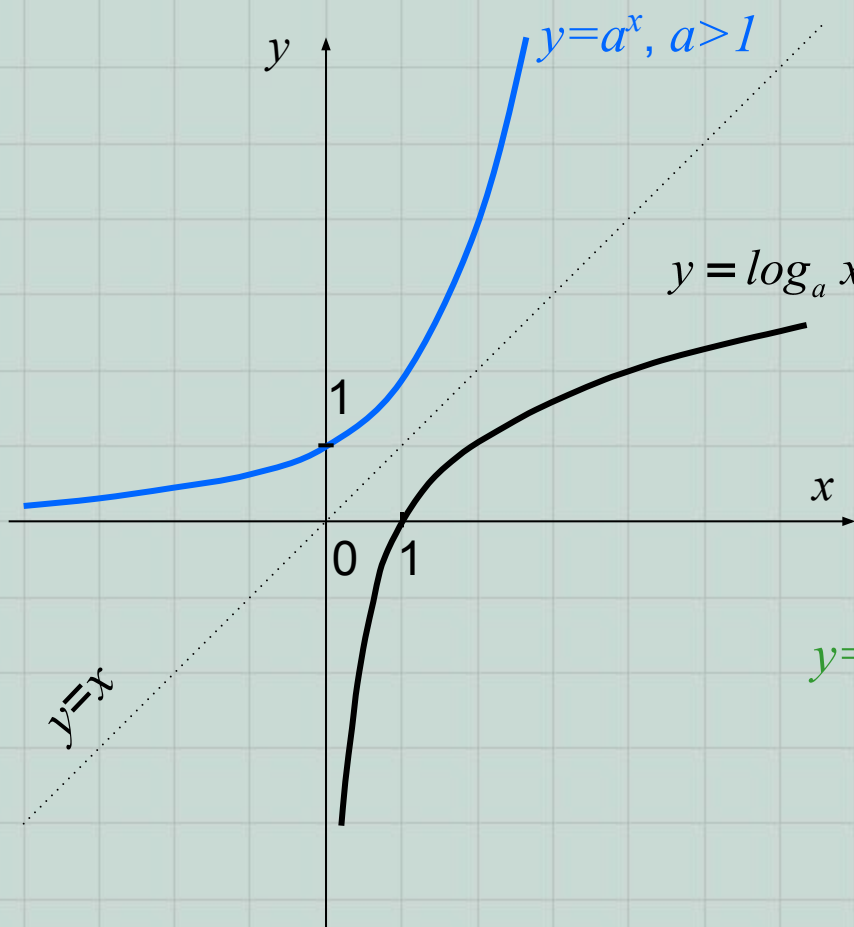
Примечание 2. Если основанием логарифма является число **e**, то такой логарифм называется **натуральным** и обозначается ln .

Пример: $ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$

Примечание 3. Т.к. основание показательной функции $y = a^x$ число $a > 0$, $a \neq 1$, то основание логарифма обладает такими же свойствами.

Примечание 4. Функция, заданная формулой $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ называется **логарифмической** функцией.

Взаимное расположение графиков показательной и логарифмической функций:



Используя данные рисунки сформулируйте и запишите свойства логарифмической функции.

Некоторые полезные свойства логарифмов:

$$a^{\log_a b} = b \quad \text{- основное логарифмическое тождество}$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$$

$$\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a |x|$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{- формула перехода к новому основанию}$$