

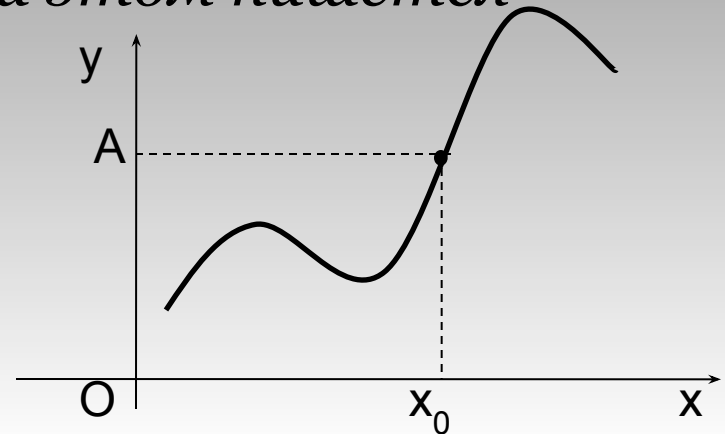
# Понятие предела функции



# Определение

- Пусть функция  $f$ , принимающая действительные значения, определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, быть может, самой точки  $x_0$ .
- Функция  $f$  имеет предел в точке  $x_0$ , если для любой последовательности точек  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x_n \neq x_0$ , стремящейся к точке  $x_0$ , последовательность значений функции  $f(x_n)$  сходится к одному и тому же числу  $A$ , которое и называется пределом функции  $f$  в точке  $x_0$ , (или при  $x \rightarrow x_0$ ) при этом пишется

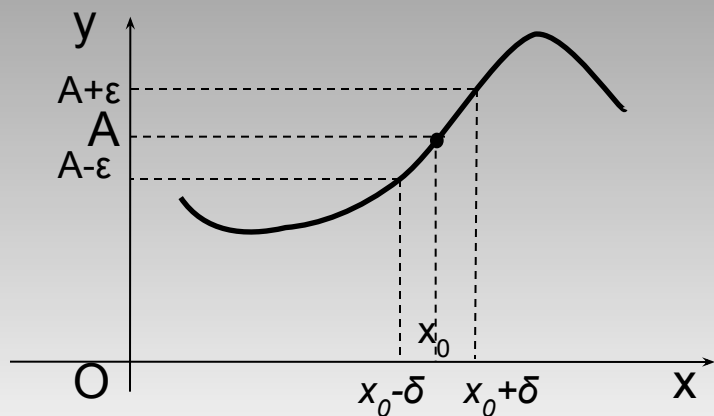
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$



# Определение

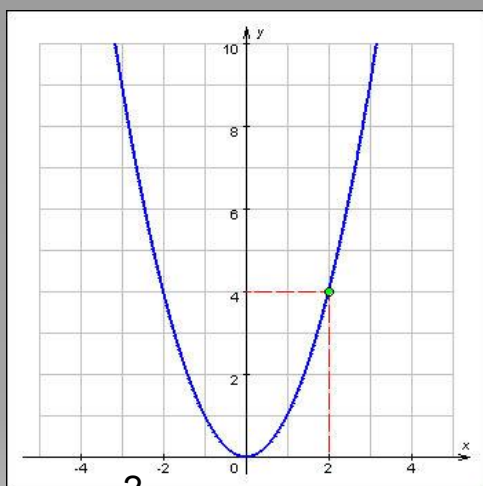
- Число  $A$  называется пределом функции  $f$  в точке  $x_0$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для всех точек  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$



- Все основные элементарные функции: постоянные, степенная функция ( $x^a$ ), показательная функция ( $a^x$ ), тригонометрические функции ( $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$ ) и обратные тригонометрические функции ( $\operatorname{arcsin} x$ ,  $\operatorname{arccos} x$ ,  $\operatorname{arctg} x$  и  $\operatorname{arcctg} x$ ) во всех внутренних точках своих областей определения имеют пределы, совпадающие с их значениями в этих точках.

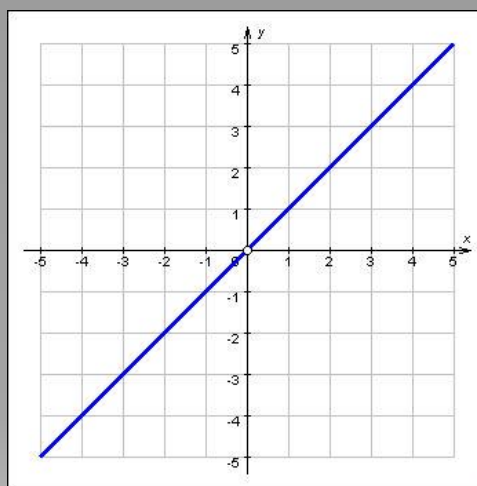
# Примеры функций, имеющих предел в точке



$$y = x^2$$

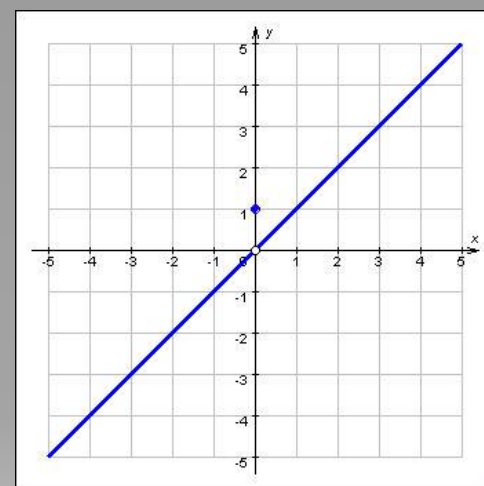
$$\lim_{x \rightarrow 2} y = 4$$

Предел функции  
при  $x \rightarrow 2$  равен 4  
(при  $x \rightarrow 2$  значения  
функции  $\rightarrow 4$ ).



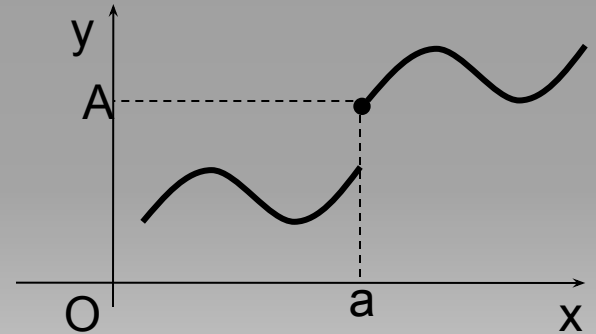
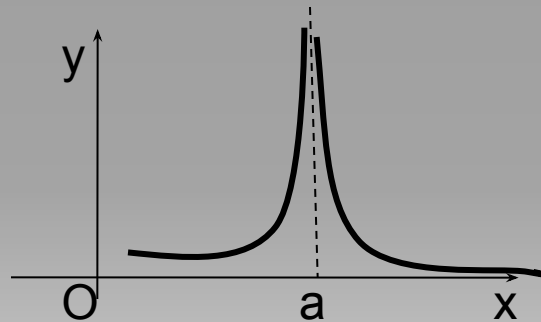
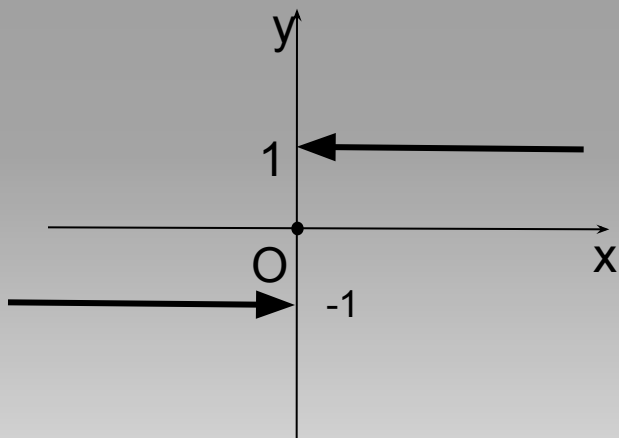
$$y = \frac{x^2}{x}$$

Предел функций при  $x \rightarrow 0$  равен 0.



$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

# Примеры функций, не имеющих предел в точке



# Свойства предела функции в точке

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют конечные пределы в точке  $a$ ,

причем  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ,

То

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B},$$

если  $B \neq 0$  и если  $g(x) \neq 0$  в  $\delta$ -окрестности точки  $a$ .

# Вычисление предела функции в точке

Сначала просто пытаемся подставить число в функцию

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 8) = 9 - 15 + 8 = 2$$

Найдем

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - x + 4}.$$

Предел числителя

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 8) = 9 - 15 + 8 = 2$$

Предел знаменателя

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 4) = 9 - 3 + 4 = 10$$

Используя теорему о пределе частного, получим

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 8)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 4)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$



Найдем

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 3}.$$

Предел числителя

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 8) = 9 - 15 + 8 = 2$$

Предел знаменателя равен нулю, поэтому теорему о пределе частного применять нельзя.

Величина  $1/(x-3)$  является бесконечно большой величиной при  $x \rightarrow 3$ .

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 3} = \infty.$$

# Раскрытие неопределенности

- При нахождении предела иногда сталкиваются с неопределенностями вида  $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty), (1^\infty), (0^\infty), (0^0)(\infty^0)$ .
- Отыскание предела в таких случаях называется раскрытием неопределенности.

Для того, чтобы раскрыть неопределенность  $\infty/\infty$  необходимо разделить числитель и знаменатель на  $x$  в старшей степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = (*) \quad \text{Разделим числитель и знаменатель на } x^2$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{1 + x + 3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4} = \frac{\infty}{\infty} = (*) \quad \text{Разделим числитель и знаменатель на } x^4$$

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{x^4}}{\frac{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7 \rightarrow 0}{x} + \frac{15 \rightarrow 0}{x^2} + \frac{9 \rightarrow 0}{x^3} + \frac{1 \rightarrow 0}{x^4}}{5 + \frac{6 \rightarrow 0}{x^2} - \frac{3 \rightarrow 0}{x^3} - \frac{4 \rightarrow 0}{x^4}} = \\ &= \frac{0 + 0 + 0 + 0}{5 + 0 - 0 - 0} = \frac{0}{5} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = (*) \quad \text{Разделим числитель и знаменатель на } x^2$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3 \rightarrow 0}{x} - \frac{5 \rightarrow 0}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{0} = \infty$$

подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 5}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность 0/0

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0} = (*)$$

**Общее правило:** если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенность вида 0/0, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители.**

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) \cdot (2x - 5)}{x + 1} = (*) \quad \text{Очевидно, что можно сократить на } (x + 1)$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = (*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$= 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7$$

## Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Найти предел 
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$$

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела **это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО предела.**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Получена неопределенность вида  $0/0$ , которую нужно устранять

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.**

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*) \end{aligned}$$

$$(*) = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{-9}{5} \right) = -\frac{3}{10}$$

# Замечательные пределы

- первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

- второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$



# Примеры

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x)}{2x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \\ &= 2 \cdot 1 = 2.\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x} = e^{\frac{4}{3}}$$

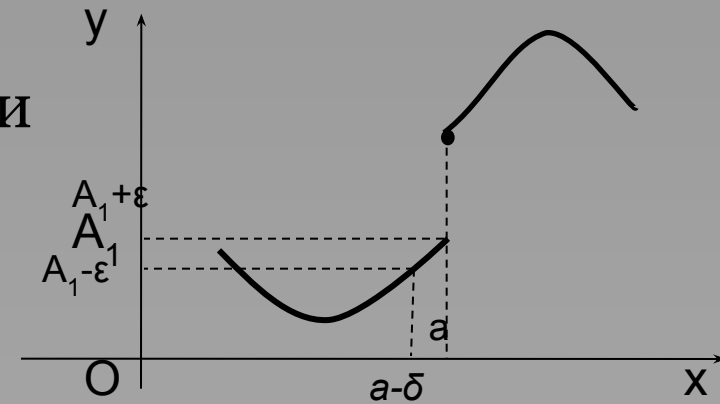
# Односторонние пределы

## Предел функции слева

- Число  $A_1$  называется **пределом функции  $f(x)$  слева** в точке  $a$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in (a-\delta, a)$  выполняется неравенство

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon.$$

- При  $x$  приближающихся к  $a$  слева, значения функции стремятся к  $A_1$



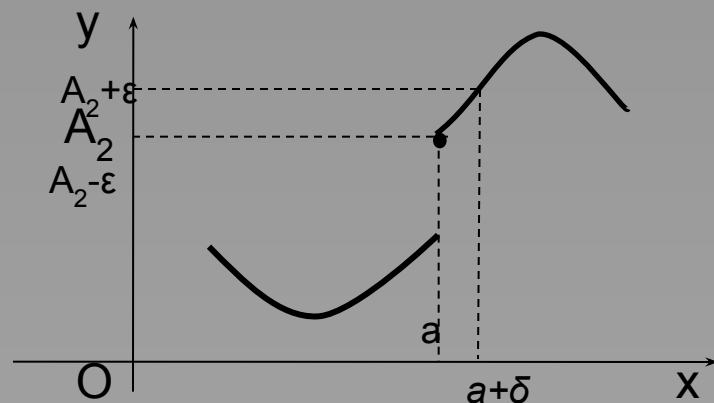
$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$$

## Предел функции справа

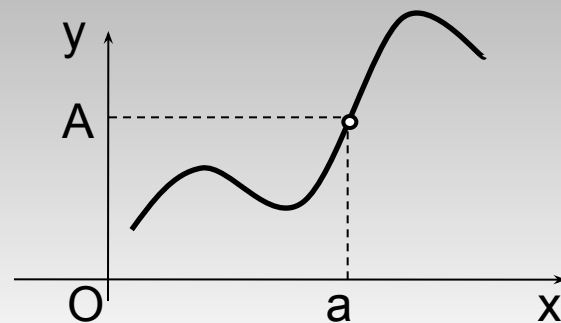
- Число  $A_2$  называется **пределом функции  $f(x)$  справа** в точке  $a$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in (a, a+\delta)$  выполняется

неравенство  $|f(x) - A_2| < \varepsilon$ .

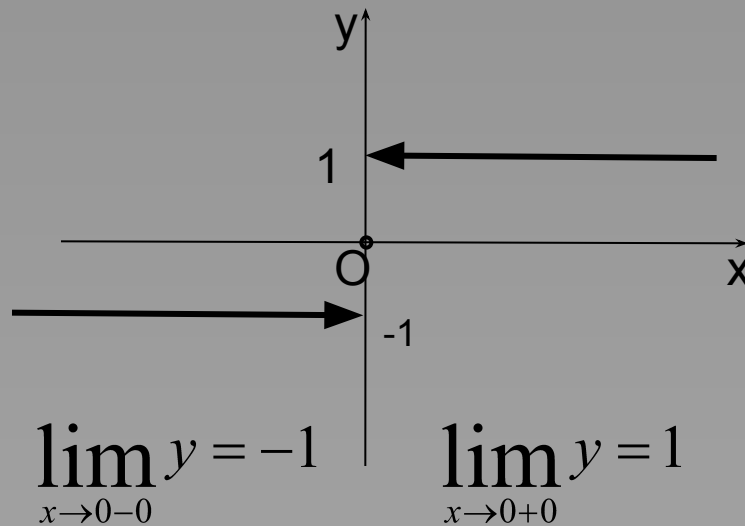
- При  $x$  приближающихся к  $a$  справа, значения функции стремятся к  $A_2$
- Функция, определённая в некоторой окрестности точки, имеет предел в точке, если её предел справа равен пределу слева.



$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$$



$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$



$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = 0$$

