

Работа

Сизовой Натальи Владимировны

МОУ «Лицей №3» г. Сарова

Персональный идентификатор:

233-169-667

Производная

Историческая справка

Тайны планетных орбит.

Древнегреческие учёные умели решать немногие задачи кинематики – рассчитать либо равномерное прямолинейное движение, либо равномерное вращение вокруг оси.

А планеты на небосводе двигались по самым замысловатым кривым . Свести эти движения планет к простым древним учёным не удавалось.

Лишь в 17 веке немецкому учёному Иоганну Кеплеру удалось сформулировать законы движения планет. Оказалось, что планеты движутся по эллипсам, и притом неравномерно. Объяснить, почему это так, Кеплер не смог.

В конце 17 века Исаак Ньютон открыл законы динамики, сформулировал закон всемирного тяготения и развил математические методы, позволявшие сводить неравномерное к равномерному, неоднородное к однородному, криволинейное к прямолинейному.

В основе лежала простая идея – движение любого тела за малый промежуток времени можно приближённо рассматривать как прямолинейное и равномерное.

Одновременно с Ньютоном немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц изучал, как проводить касательные к произвольным кривым.

Он также развил новое исчисление, которое оказалось по сути дела тождественным построенному Ньютоном. Обозначения, введённые Лейбницем, оказались настолько удачными, что сохранились и по сей день.

Новая математика Ньютона и Лейбница состояла из двух больших частей – **дифференциального** и **интегрального** исчислений.

В **первом** из них говорилось, как, изучая малую часть явления, сводить неравномерное к равномерному.

Во **второй** – как из малых равномерных частей конструировать сложное неравномерное явление.

Повторение

Определение 1

Окрестностью точки x_0 называется интервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, где δ – радиус окрестности.

Определение 2

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует проколота окрестность точки a , на которой выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Определение 3

Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.

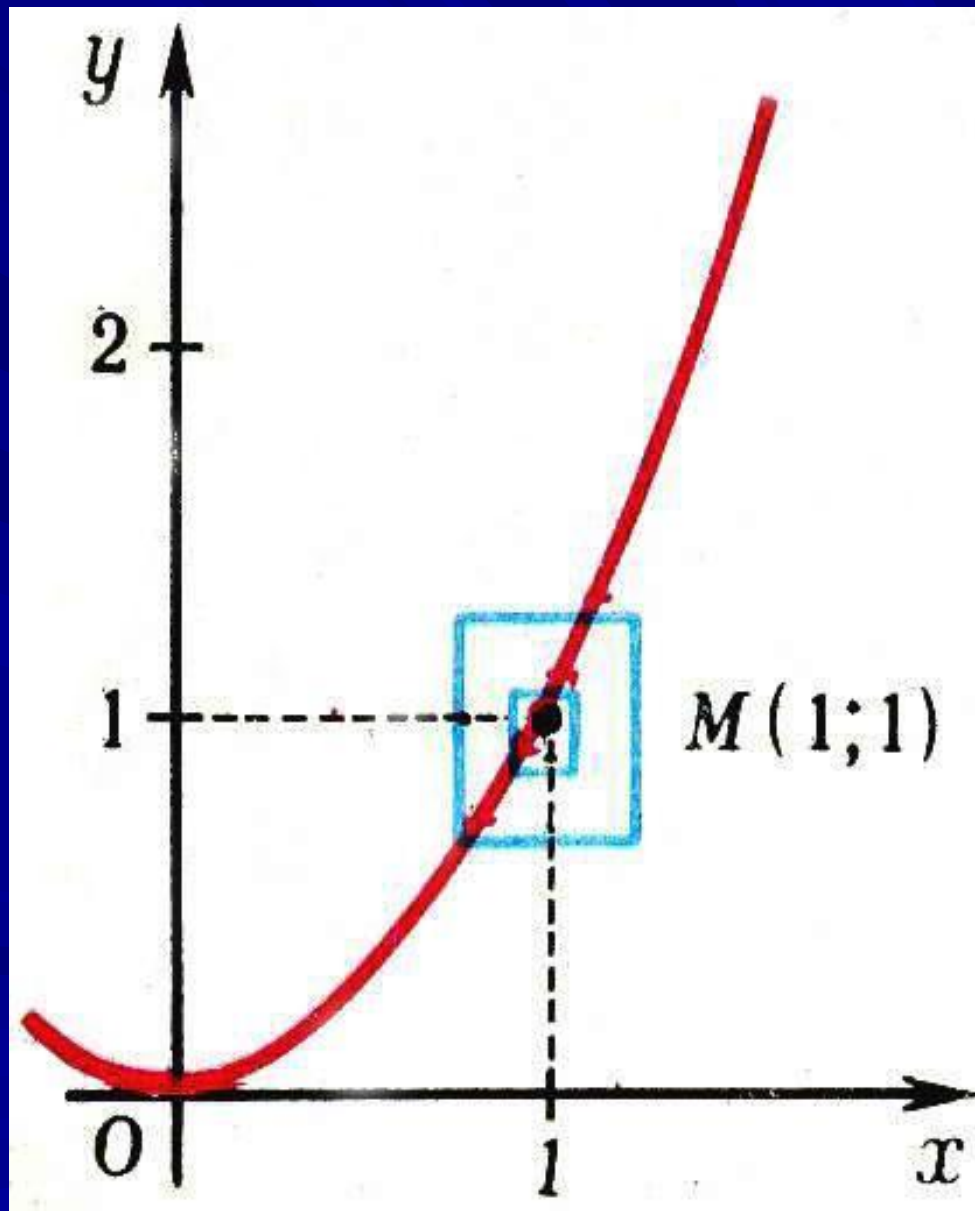
$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

Тема урока

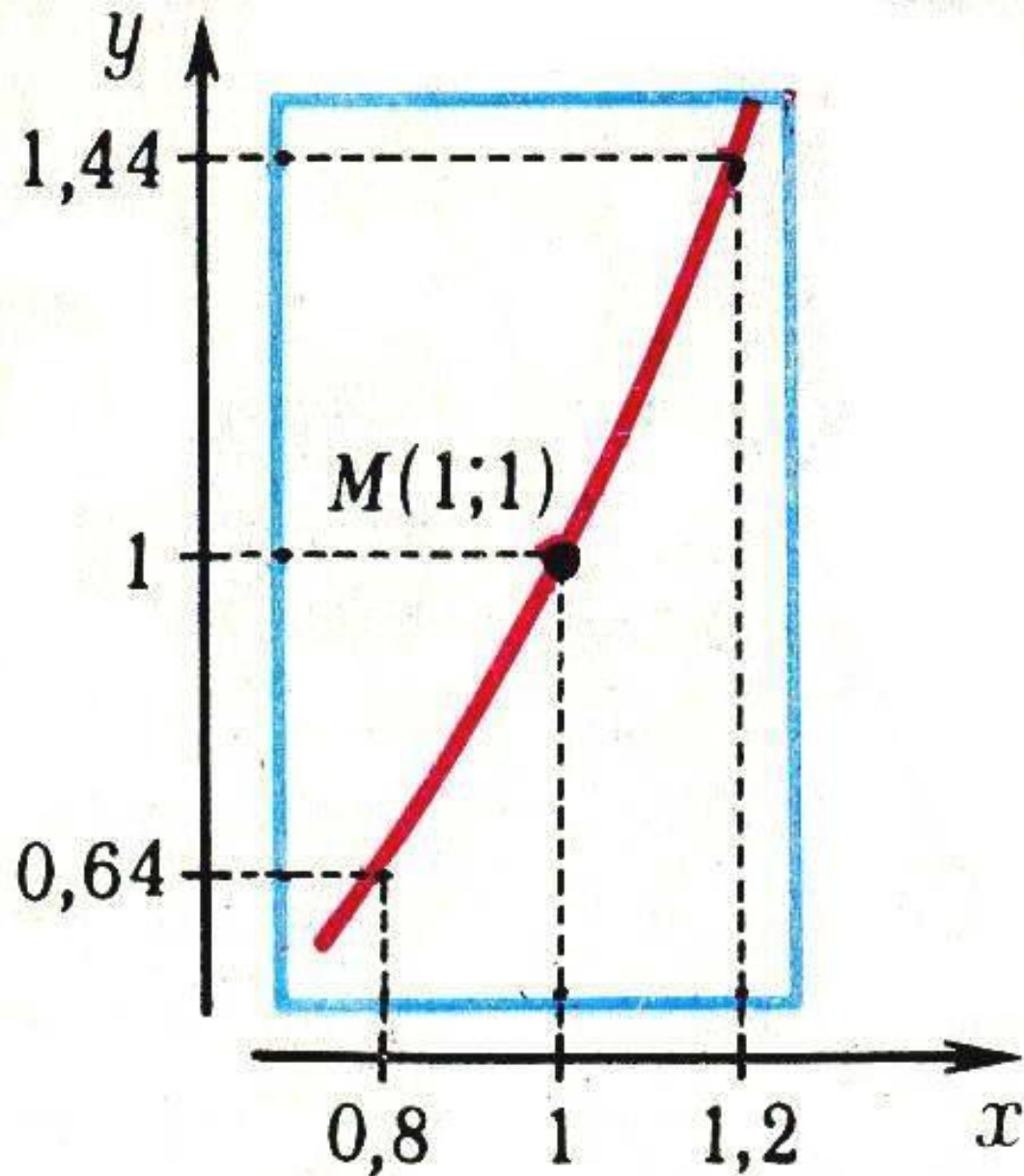
*Понятие производной
функции в точке*

Итак, идём по стопам Ньютона и Лейбница!

Рассмотрим график функции $y = x^2$ вблизи точки $M(1;1)$, изображённый в разных масштабах.

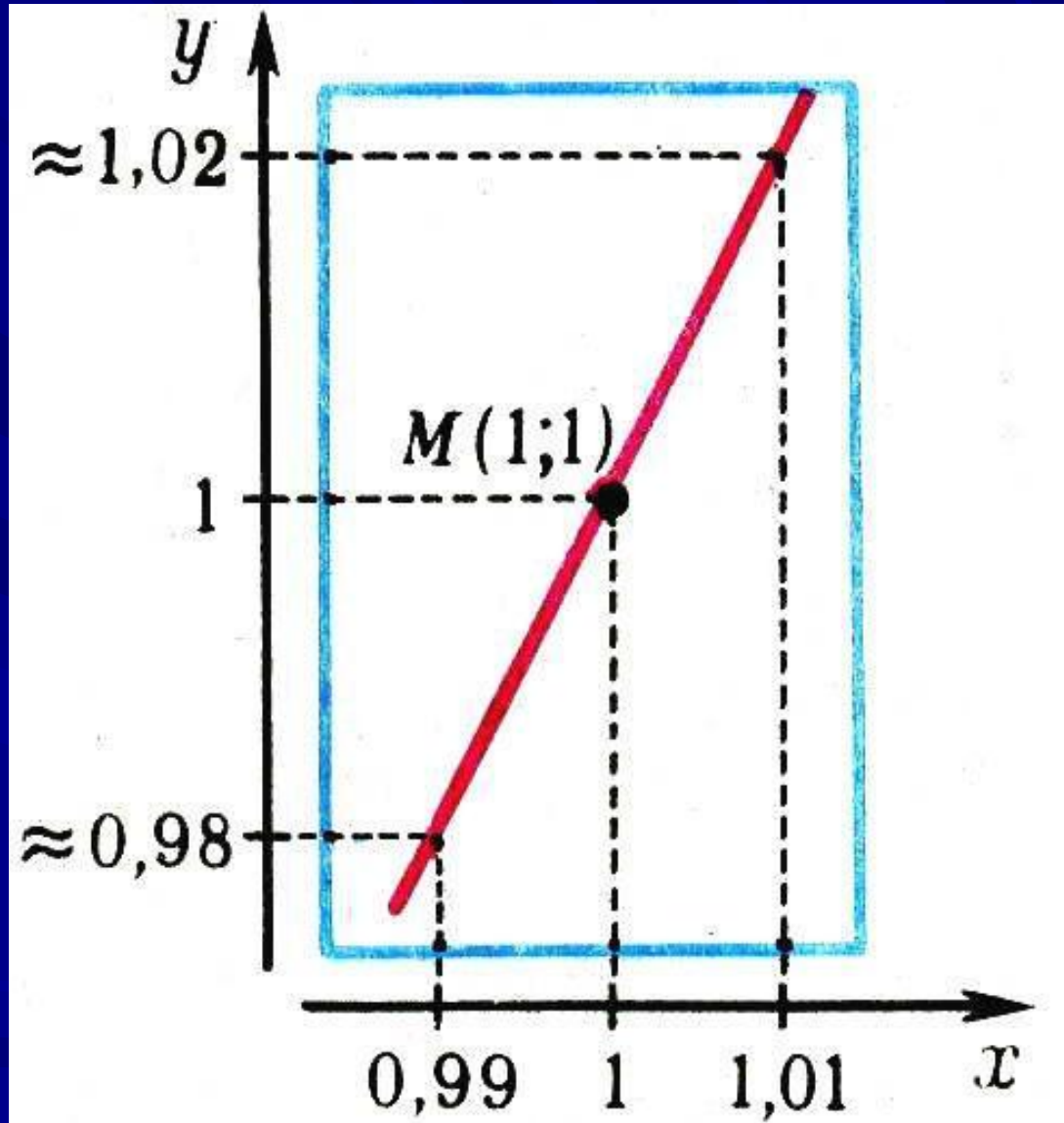


Как изменилась конфигурация графика?



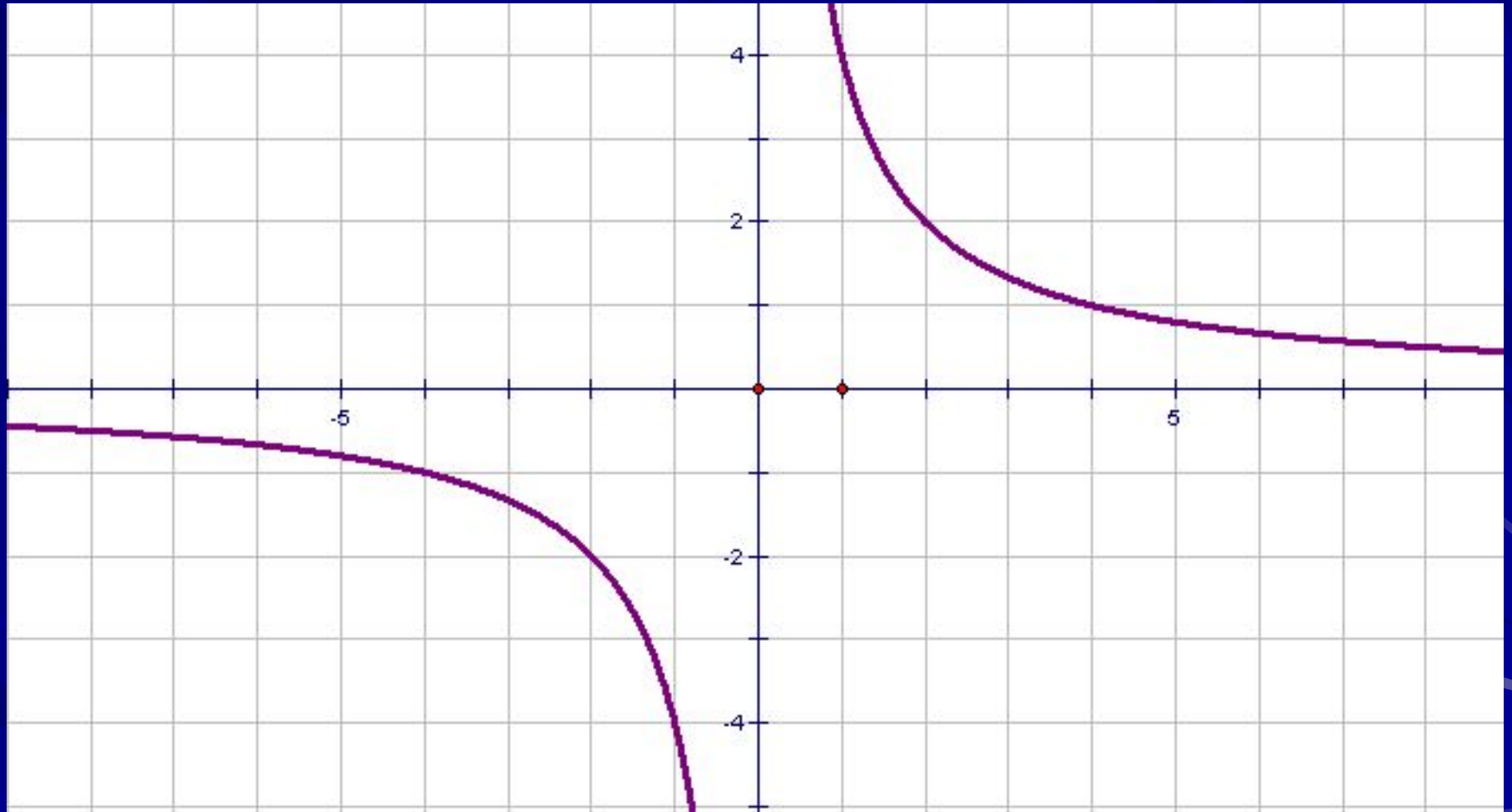
*Определите радиус
окрестности
точки $x = 1$*

*Как изменилась
конфигурация
графика?*

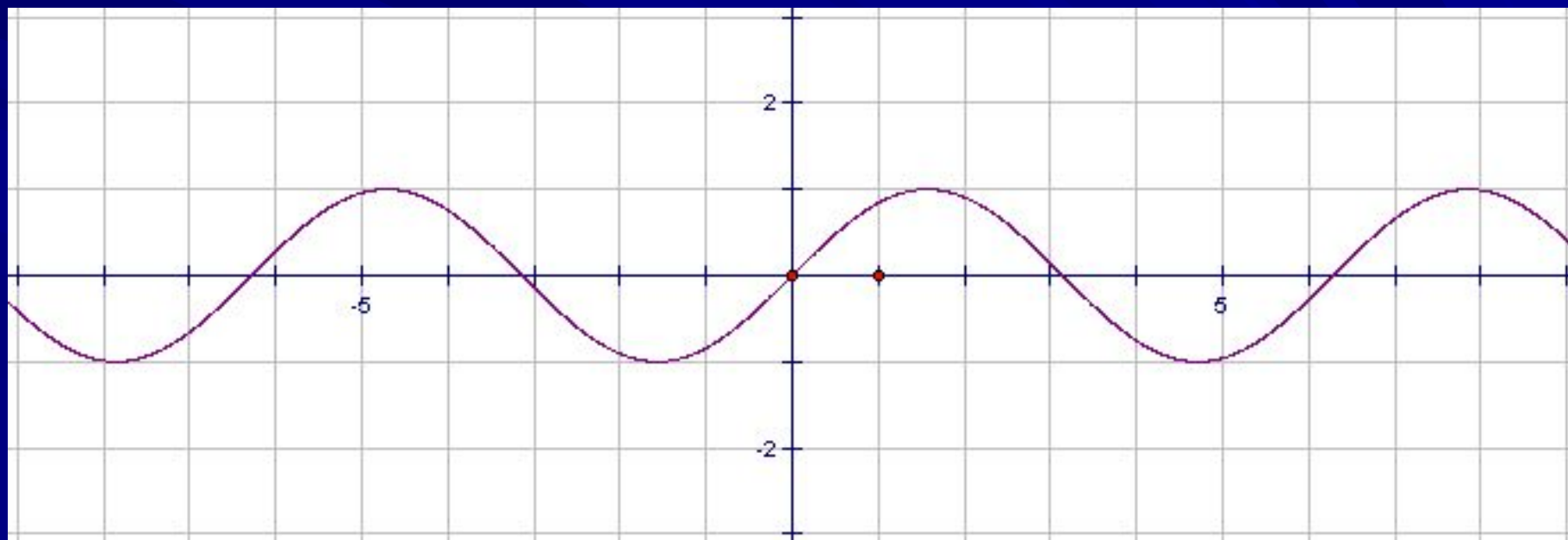


*Существуют ли другие функции,
графики которых обладают
таким же свойством?*

$$y = \frac{4}{x}$$



$$y = \sin x$$



ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Чем крупнее масштаб, тем меньше график функции будет отличаться от некоторой прямой, проходящей через точку $M(1;1)$.

2. То же самое будет происходить с графиком функции вблизи любой другой точки.

3. Этим свойством обладают и многие другие кривые: окружность, гиперболоа, синусоида и т. д.

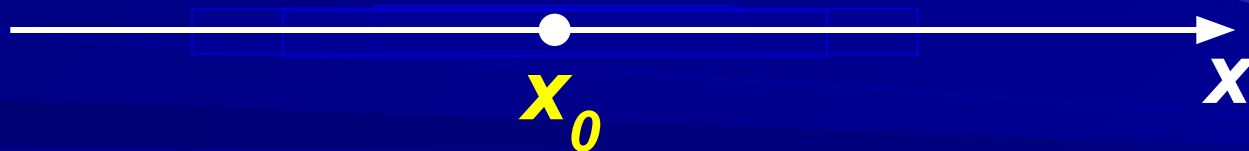
**Такое свойство функций называют
«линейность в малом»**

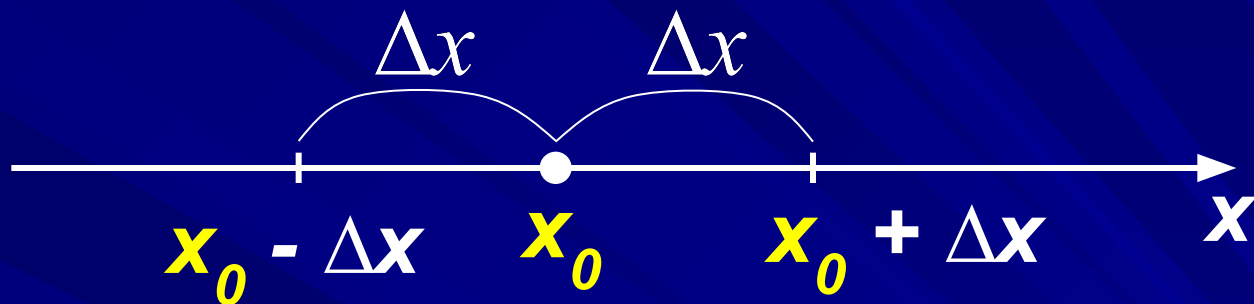
Свойство **«линейности в малом»**.

Выразим это свойство на языке формул.

Как перевести на математический язык слова «увеличить масштаб»?

Радиус окрестности точки x_0 уменьшается.





Изменим x_0 на величину Δx .

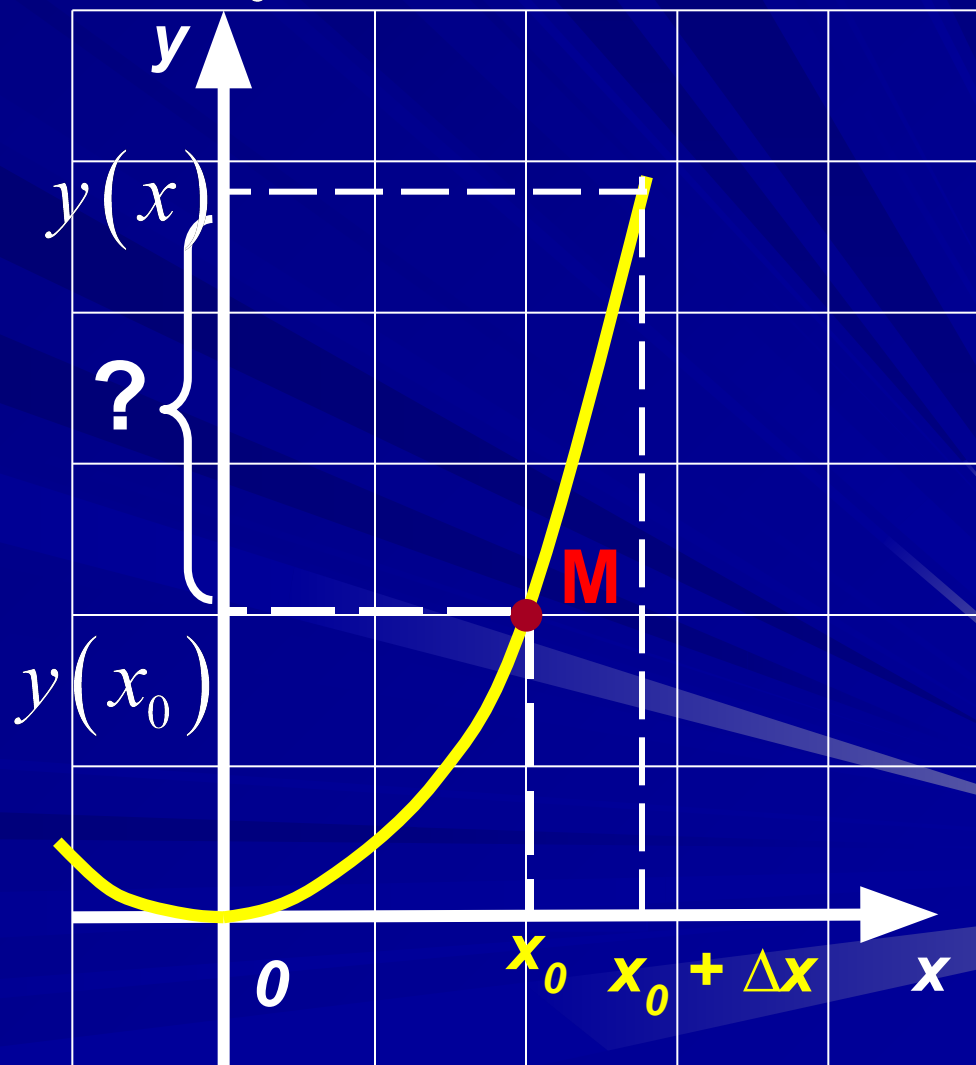
Δx - называется приращением аргумента.

$$x_0 + \Delta x = x$$

x – новое значение аргумента

На какую величину изменится значение функции $y = x^2$ при переходе от точки x_0 к точке $x = x_0 + \Delta x$?

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_0) &= \\ (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 &= \\ = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$



**Величина $y(x) - y(x_0)$
называется приращением функции
в точке x_0 и обозначается $\Delta y(x_0)$.**

$$\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

Таким образом, чтобы вычислить приращение функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке $x = x_0 + \Delta x$, нужно:

1. найти значение функции $f(x_0)$;
2. найти значение функции $f(x_0 + \Delta x)$
3. найти разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Почему график функции $y = x^2$
«выпрямляется», если мы
увеличиваем масштаб?

Найдите приращение функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$

$$\Delta y(1) = y(1 + \Delta x) - y(1) = 2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

Как изменяется слагаемое $(\Delta x)^2$ при приближении к точке $x = 1$?

$(\Delta x)^2$ стремится к нулю быстрее, чем Δx .

Следовательно, при малых значениях Δx величиной $(\Delta x)^2$ можно пренебречь, следовательно

$$\Delta y(1) \approx 2 \cdot \Delta x$$

С другой стороны

$$\Delta y(1) = y(1 + \Delta x) - y(1) = y(x) - y(1) = y - 1,$$

т.к. $1 + \Delta x = x$

Таким образом, $y - 1 \approx 2 \cdot (x - 1)$.

$$y \approx 2x - 1$$

Чем меньше Δx , тем теснее в точке $M(1;1)$ парабола примыкает к прямой $y = 2x - 1$.

Или,

парабола касается прямой $y = 2x - 1$ в точке M .

В этом и заключается причина «выпрямления» графика функции $y = x^2$ при увеличении масштаба.

Рассмотрим приращения нескольких функций и выясним, есть ли закономерности в их структуре.

$$\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

Найдите приращение функции $y = f(x)$
в точке x_0 :

$$1) f(x) = x^3;$$

$$\Delta f(x_0) = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$2) f(x) = 2x - x^2$$

$$\Delta f(x_0) = (2 - 2x_0) \cdot \Delta x - (\Delta x)^2$$

Заметим, что приращения рассмотренных нами функций можно представить в виде суммы двух слагаемых.

Функция	Приращение функции
$f(x) = x^2$	$\Delta f(x_0) = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$
$f(x) = 2x - x^2$	$\Delta f(x_0) = (2 - 2x_0) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$
$f(x) = x^3$	$\Delta f(x_0) = 3x_0^2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot (3x_0 + \Delta x)$

Определение

Величина α пренебрежимо мала по сравнению

с Δx , если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$.

Функция	Приращение функции
$f(x) = x^2$	$\Delta f(x_0) = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$
$f(x) = 2x - x^2$	$\Delta f(x_0) = (2 - 2x_0) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$
$f(x) = x^3$	$\Delta f(x_0) = 3x_0^2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 (3x_0 + \Delta x)$

Определение

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если её приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha$, где α – пренебрежимо мала по сравнению с Δx , A – некоторое действительное число.

Что такое коэффициент A ?

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha$$

Выразим из равенства коэффициент A

$$A = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - \frac{\alpha}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{\alpha}{\Delta x}, \text{ где } \frac{\alpha}{\Delta x} - \text{б. м. ф. при } \Delta x \rightarrow 0$$

$$\text{Значит, } A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

по определению предела функции в точке.

Определение

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Операция отыскания производной функции называется **дифференцированием**.

*Рассмотрим пример из физики,
который также приводит к
понятию производной.*

Пусть тело движется по закону $S(t)$

Надо найти скорость движения на промежутке времени $[t_1; t_2]$

$$v_{cp} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Если $t_1 \rightarrow t_2$, то $v_{cp} \rightarrow v_M$

$$v_M = \lim_{t_2 - t_1 \rightarrow 0} \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$v_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t_1)}{\Delta t}$$

Используя определение, найдите производные функций в точке x_0 :

$$1) y = kx + b;$$

$$\Delta y(x_0) = k \cdot \Delta x,$$

$$\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = k$$

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = k$$

$$2) f(x) = x^2;$$

$$\Delta f(x_0) = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

Чтобы найти производную функции в точке, надо:

- 1. найти приращение функции в точке x_0 ;*
- 2. найти отношение приращения функции к приращению аргумента;*
- 3. вычислить предел полученного отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.*

Найдите производные следующих функций в точке x_0 :

Функция	Производная
$f(x) = 2009 - 2x$	$f'(x_0) = -2$
$f(x) = 4x - 0,5x^2$	$f'(x_0) = 4 - x_0$
$f(x) = c, c - const$	$f'(x_0) = 0$

Что узнали на уроке?

1) Величина $y(x) - y(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0 и обозначается $\Delta y(x_0)$. $\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$

2) Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если её приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha$, где α – пренебрежимо мала по сравнению с Δx .

3) Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремиться к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

4) Чтобы найти производную функции, надо:

1. найти приращение функции в точке;
2. найти отношение приращения функции к приращению аргумента;
3. вычислить предел полученного отношения при условии, что приращение аргумента стремиться к нулю.