Понятие степени.
Свойства степени.
Преобразование степеней.

Понятие корня.
Свойства корня натуральной степени.

Понятие степени
с натуральным показателем

1. Степенью числа a с показателем k, где $k \in N$, $a \in Q$, называется произведение k множителей, каждый из которых равен a:

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ раз}}.$$

Число a называется основанием степени, а число k — показателем степени.

2. Четная степень отрицательного числа есть число положительное. Например, $(-3)^{24} > 0$.

Нечетная степень отрицательного числа есть число отрицательное. Например, $\left(-\frac{3}{4}\right)^{17} < 0$.

Любая степень положительного числа есть число положительное. Например, $12^k > 0$.

3. При возведении нуля в любую натуральную степень k получается нуль, т. е. $0^k = 0$.

4. При возведении единицы в любую натуральную степень k получается единица, т. е. $1^k = 1$.

Свойства степени с натуральным показателем

1. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается прежним:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ m,\ n \in N.$$

Например, $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$.

2. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются, а основание остается прежним:

$$a^m : a^n = a^{m-n};\ m,\ n \in N.$$

Например, $a^5 : a^3 = a^2$.

3. При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание остается прежним:

$$(a^m)^n = a^{mn};\ m,\ n \in N.$$

Например, $(a^4)^3 = a^{12}$.

4. Степень произведения равна произведению степеней множителей:

$$(abc)^k = a^k b^k c^k;\ k \in N.$$

Например, $(a \cdot b)^2 = a^2 b^2$.

5. Степень частного равна частному степеней делимого и делителя:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k};\ b \neq 0,\ k \in N.$$

Например, $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$.

Степень с целым и дробным показателем

Рассмотрим степень a^p, где $p \in \mathbf{Z}$.

1. Если $p=0$, то по определению $a^0=1$ (при $a \neq 0$). Например, $5^0=1$.

2. Если $p<0$, то по определению $a^p=\frac{1}{a^{-p}}$ (при $a \neq 0$). Например, $2^{-1}=\frac{1}{2}$; $5^{-2}=\frac{1}{5^2}$; $(-3)^{-1}=-\frac{1}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$.

3. Рассмотрим степень $a^{\frac{p}{q}}$, где $\frac{p}{q}$ — рациональное число. Выражение $a^{\frac{p}{q}}$ имеет в общем виде смысл только при $a>0$. Если $a>0$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, то по определению $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$; $0^q=0$. Например, $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}$. Выражения $(-8)^{\frac{1}{2}}$ и $(-8)^{\frac{3}{4}}$ смысла не имеют.

4. Степень с рациональным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с натуральным показателем, а именно если $a>0$ и $n \in \mathbf{Q}$, $m \in \mathbf{Q}$, то:

а) $a^m \cdot a^n=a^{m+n}$; б) $a^m : a^n=a^{m-n}$; в) $(a^n)^m=a^{mn}$; г) $(ab \cdot \ldots \times k)^n=a^n b^n \cdot \ldots \cdot k^n$; д) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Понятие корня

1. Корнем k-й степени, где $k \in N$ и $k \neq 1$, из действительного числа a называется действительное число x, k-я степень которого равна a.

2. Корень k-й степени из числа a обозначается символом $\sqrt[k]{a}$. Согласно определению $(\sqrt[k]{a})^k = a$.

3. Нахождение корня k-й степени из числа a называется извлечением корня. Число k называют показателем корня, число a — подкоренным выражением.

4. Заметим, что $\sqrt[2n]{a}$, где $n \in N$ и $a < 0$, не существует. Например, выражения $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$ не имеют смысла. Корень нечетной степени извлекается и из отрицательного числа. Например $\sqrt[3]{-8} = -2$, так как $(-2)^3 = -8$.

5. Чтобы устранить двузначность корня k-й степени из числа a, вводится понятие арифметического корня. Арифметическим корнем k-й степени из числа a $(a \geqslant 0)$ называется неотрицательное число b, k-я степень которого равна a, где $k > 1$ — натуральное число.

Например: а) $\sqrt[k]{a^k} = |a|$; б) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = |x+1| + |x-1|$; в) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$; г) $\sqrt{9} = 3$ (но не ± 3).

З а м е ч а н и е. В школьном курсе рассматривается только арифметическое значение корня, т. е. $\sqrt[k]{a}$ имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$ и принимает только неотрицательные значения.

Преобразования арифметических корней

1. Корень k-й степени из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней той же степени из сомножителей: $\sqrt[k]{ab}=\sqrt[k]{a}\cdot\sqrt[k]{b}$, где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ (правило извлечения корня из произведения).

2. Если $a\geqslant 0$, $b>0$, то $\sqrt[k]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$ (правило извлечения корня из дроби).

3. Если $a\geqslant 0$, k, $c\in \boldsymbol{N}$, $k>1$, $c>1$, то $\sqrt[k]{\sqrt[c]{a}}=\sqrt[kc]{a}$ (правило извлечения корня из корня).

4. Если $a\geqslant 0$, то $(\sqrt[k]{a})^m=\sqrt[k]{a^m}$ правило возведения корня в степень).

5. Если $a\geqslant 0$, то $\sqrt[k]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{nm}}$, где $m\in \boldsymbol{N}$, $n\in \boldsymbol{N}$, т. е. показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножить на одно и то же число.

6. Если $a_1>a_2>0$, то $\sqrt[k]{a_1}>\sqrt[k]{a_2}>0$, т. е. большему положительному подкоренному выражению соответствует и большее значение корня.

7. Все указанные выше формулы часто применяются в обратном порядке (т. е. справа налево). Например,

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3\cdot 2}=\sqrt{6}$ (правило умножения корней);

$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{10}{5}}=\sqrt{2}$ (правило деления корней);

$\sqrt[6]{5}=\sqrt[3]{\sqrt{5}}$.

8. Правило вынесения множителя из-под знака корня. При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\sqrt[k]{ba^k} = a\sqrt[k]{b}$.

9. Обратная задача — внесение множителя под знак корня. Например,

$$b\sqrt{3} = \begin{cases} \sqrt{3b^2}, \text{ если } b \geqslant 0, \\ -\sqrt{3b^2}, \text{ если } b \leqslant 0. \end{cases}$$

10. Уничтожение иррациональности в знаменателе дроби. Рассмотрим некоторые типичные случаи.

а) $\dfrac{m}{\sqrt[k]{a}} = \dfrac{m\sqrt[k]{a^{k-1}}}{\sqrt[k]{a}\cdot\sqrt[k]{a^{k-1}}} = \dfrac{m\sqrt[k]{a^{k-1}}}{\sqrt[k]{a^k}} = \dfrac{m\sqrt[k]{a^{k-1}}}{a}$, так как $a > 0$.

Например, $\dfrac{5}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{5\cdot\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{5\sqrt[3]{9}}{3}$.

б) $\dfrac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \dfrac{m(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})} = \dfrac{m(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}$.

Например, $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$.

в) $\dfrac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \dfrac{m((\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c})}{((\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c})((\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c})}$ и т. д.

11. Применение тождеств сокращенного умножения к действиям с арифметическими корнями:

1) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$;

2) $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b$;

3) $a\sqrt{a}\pm b\sqrt{b}=(\sqrt{a})^3\pm(\sqrt{b})^3=(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(a\mp\sqrt{ab}+b)$.

12. Множитель, стоящий перед корнем, называется его коэффициентом. Например, $3\sqrt{7}$. Здесь 3 является коэффициентом.

13. Корни (радикалы) называются подобными, если они имеют одинаковые показатели корней и одинаковые подкоренные выражения, а отличаются только коэффициентом. Чтобы судить о том, подобны данные корни (радикалы) или нет, нужно привести их к простейшей форме.

Например, $\sqrt[3]{54}$ и $\sqrt[3]{16}$ подобны, так как $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot2}=3\sqrt[3]{2}$, а $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot2}=2\sqrt[3]{2}$.