

Последовательность независимых испытаний

Постановка задачи

- Проводятся n испытаний, в каждом из которых может произойти определенное событие («успех») с вероятностью p (или не произойти — «неудача» — $q = 1 - p$).
- Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях **успех наступит ровно k раз**.

Якоб Берну́лли



(27 декабря 1654 — 16 августа 1705)

швейцарский математик;

Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний в одинаковых условиях, причем в каждом из них с вероятностью p появляется событие A .

- Тогда вероятность $P_{k,n}$ того, что событие A производится в n испытаниях k раз выражается формулой:

$$P_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{где } (q=1-p)$$

Пример

- 1. Производится 4 независимых выстрела по цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность 4 попаданий из 6 выстрелов.
- Решение

$$P_{6,4} = C_6^4 \cdot 0,6^4 \cdot (1 - 0,6)^{6-4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^2 = 15 \cdot 0,1296 \cdot 0,16 = 0,31104$$

Пример

2. Установлено, что виноградник поражен вредителями в среднем на 10%, определить вероятность того, что из 10 проверенных кустов винограда один будет поражен.

Решение

Вероятность того, что случайно проверенный куст будет поврежден равна

$$p = \frac{10\%}{100\%} = 0.1,$$

$$q = 1 - 0.1 = 0.9,$$

Вероятность того, что из 10 кустов 1 будет поврежден вычислим по формуле Бернулли

$$P_{1,10} = C_{10}^1 \cdot 0.1^1 \cdot (0.9)^{10-1} = 10 \cdot 0.1 \cdot (0.9)^9 \approx 0,3874.$$

Пример

3. Бланк программированного опроса состоит из 5 вопросов. На каждом даны три ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность, что методом угадывания ученику удастся выбрать
- 5 правильных;
 - 2 правильных
 - хотя бы 4 правильных

Решение

$$p = \frac{1}{3} \quad q = \frac{2}{3}$$

- $P_{5,5} = p^5 = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$

- $P_{2,5} = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{8}{243} = \frac{80}{243}$

- $P_{4,5} + P_{5,5} = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{243} = \frac{10}{243} + \frac{1}{243} = \frac{11}{243}$

Наивероятнейшее число

- Наивероятнейшее число наступивших событий в схеме Бернулли определяется из неравенства:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p$$

Пример

1. Ученик отвечает на тестовые задания. На каждый вопрос он отвечает верно с вероятностью 0,65. Найти наивероятнейшее число верных ответов, если в тесте 20 вопросов.

Решение:

$$p = 0,65, q = 1 - 0,65 = 0,35, n = 20$$

$$20 \cdot 0,65 - 0,35 \leq k_0 \leq 20 \cdot 0,65 + 0,65$$

$$12,65 \leq k_0 \leq 13,65$$

$$k_0 = 13$$

Пример

2. Сколько раз нужно подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадения 6 очков было равно 50?

- Решение: $np - q \leq k_0 \leq np + p$

$$p = 1/6, q = 5/6,$$

$$\frac{n-5}{6} \leq 50 \leq \frac{n+1}{6}$$

$$n - 5 \leq 300 \leq n + 1$$

$$299 \leq n \leq 305$$