

# Последовательности

2011

Васильева Е.Е.



Продолжи ряд

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6

2) 12, 10, 8, 6, 4


3) 6, 9, 12, 15, 18, 21

4) 2, 4, 8, 16, 32

5) 1, 4, 16




# Последовательности составляют такие элементы природы, которые можно пронумеровать




Дни  
недели



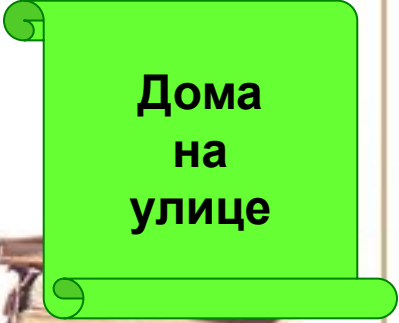
Название  
месяцев




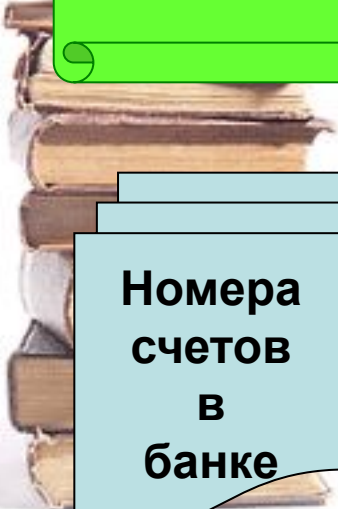
Классы  
В  
школе



Квартиры  
В  
доме



Дома  
на  
улице



Номера  
счетов  
В  
банке

# Найдите закономерности и покажите их стрелками

В порядке  
возрастания  
положительные  
нечетные числа

В порядке убывания  
Правильные дроби  
с числителем,  
равным 1

В порядке  
возрастания  
положительные  
числа,  
кратные 7

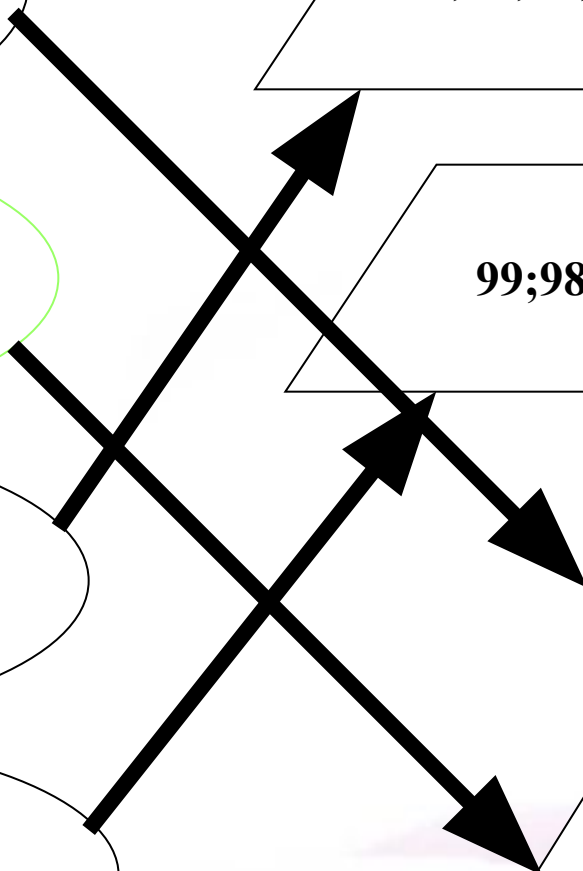
В порядке убывания  
положительные  
двузначные числа

7;14;21;28...

99;98;97...

1;3;5;7;9...

$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots$



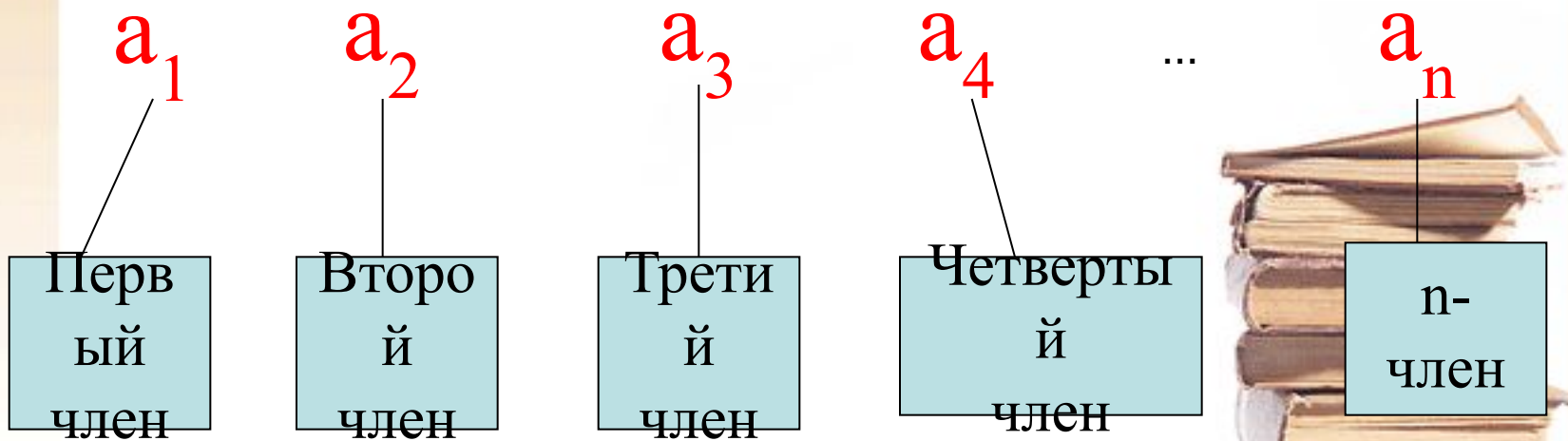
# Определение

**Функцию  $y=f(x)$ , определенную на множестве натуральных чисел  $x \in \mathbb{N}$  (или его конечном подмножестве), называют числовой последовательностью и обозначают  $y=f(n)$ , или  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  или  $(y_n)$ .**



Числа  $y_1, y_2, \dots, y_n$   
называют членами  
последовательности, а  
член с номером  $n$  – ее  
 $n$ -членом, его еще  
называют общим членом.





*последовательности*

# **Задать числовую последовательность**

— это значит указать, как  
отыскивается тот или иной  
ее член, если известен  
номер занимаемого  
им места.





# Способы описания последовательности

Последовательности  
можно задавать  
различными способами,  
среди которых особенно  
важны три:

- аналитический
- словесный
- рекуррентный



# Формула

1. Последовательность задана аналитически, если задана формула ее  $n$ -го члена:  $y_n = f(n)$ .

Пример:  $y_n = 2n - 1$

$$y_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$y_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$y_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$y_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$$

$$y_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

последовательность нечетных чисел:

1, 3, 5, 7, 9, ...



**Описательный способ задания числовой последовательности состоит в том, что объясняется, из каких элементов строится последовательность.**

Пример 1.

«Все члены последовательности равны 1». Это значит, речь идет о стационарной последовательности  $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$

Пример 2.

«Последовательность состоит из всех простых чисел в порядке возрастания». Таким образом, задана последовательность  $2, 3, 5, 7, 11, \dots$



# Рекуррентный

- Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывается правило, позволяющее вычислить  $n$ -й член последовательности, если известны ее предыдущие члены.



# Пример рекуррентного задания

Пример 1.

$$y_1 = 3;$$

$$y_n = y_{n-1} + 4, \text{ если } n = 2, 3, 4, \dots$$

Здесь

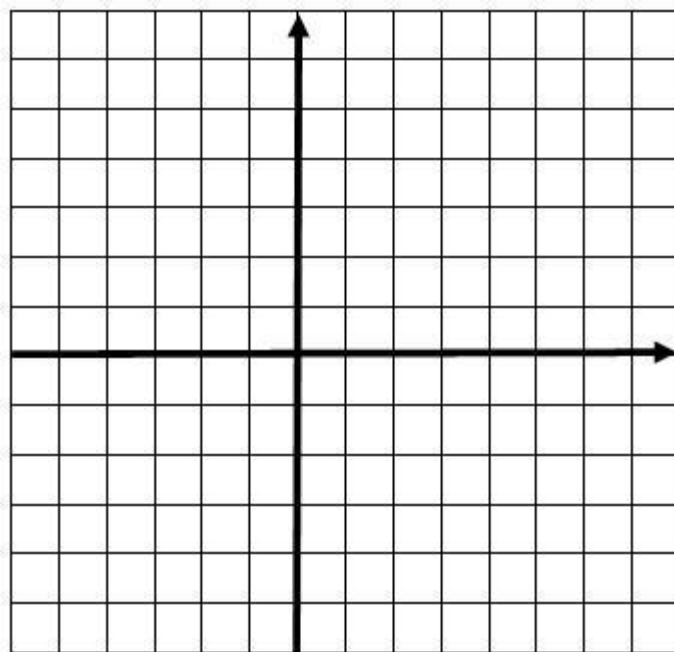
$$y_1 = 3;$$

$$y_2 = 3 + 4 = 7;$$

$$y_3 = 7 + 4 = 11; \dots$$



**Графиком последовательности** как функции, заданной на множестве натуральных чисел, являются отдельные, изолированные точки координатной плоскости



$$y_n = 3n - 2$$



# Задание

Последовательности заданы формулами

$$a_n = n^4$$

$$a_n = 2^n - 5$$

$$a_n = -n - 2$$

$$a_n = n + 4$$

$$a_n = (-1)^n n^2$$

$$a_n = 3^n - 1$$

1. Впишите пропущенные члены последовательности

1; 16; 81; 256; 625; ...

5; 6; 7; 8; 9

-1; 4; -9; 16; -25; ...

-3; -4; -5; -6; -7

-3; -4; -5; -6; -7...

2; 8; 26; 80; 242...

2. Укажите, какими числами являются члены этих последовательностей

Положительные  
и отрицательные

положительные

отрицательные









**По преданию, индийский царь Шерам, восхищенный остроумием шахматной игры, призвал к себе изобретателя шахмат Сету и сказал ему: «Я желаю достойно вознаградить тебя! Исполню любое твоё желание...» Сета попросил положить на первую клетку доски 1 пшеничное зерно, на вторую – 2 зерна, на третью – 4 зерна и т. д. Сколько нужно зерен?**



Среднеазиатский математик Бернулли  
получил верный ответ:

**18 446 744 073 709 551 615** зерен.

Такое количество зерен пшеницы можно  
собрать лишь с урожая планеты,  
поверхность которой в 2000 раз больше  
поверхности Земли.



# ПРОТОРГОВАЛСЯ ЛИ КУПЕЦ ?

- Некто продавал коня и просил за него 1000 рублей. Купец сказал, что цена велика, "Хорошо,-ответил продавец, если ты говоришь, что конь дорого стоит, то возьми его себе даром, а заплати только за одни гвозди на его подковах, а гвоздей на его каждой подкове по 6 штук, и будешь ты мне за них платить таким образом: за первый гвоздь полушку, за второй - две полушки, за третий 4 полушки, и так далее за все гвозди: за каждый в два раза больше чем предыдущий". Купец согласился, проторговался ли купец?



# РЕШЕНИЕ:

всего гвоздей 24 штуки,  
за все гвозди купец должен  
заплатить

$$1 + 2 + 2*2 + 2*2*2 + \\ + \dots + 2*2* \dots *2 \text{ полушек}$$

23 раза и того получаем  
41943 рубля и 15 полушек.



# Свойства числовых последовательностей

Числовая последовательность называется возрастающей, если каждый ее член больше предыдущего, иными словами, если для всякого  $n > 1$  верно неравенство  $a_n > a_{n-1}$ .



# Пример

Последовательность кубов  
натуральных чисел

1,8,27



# УБЫВАЮЩАЯ

Числовая последовательность называется убывающей, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего, иными словами, если для всякого  $n > 1$  верно неравенство  $a_n < a_{n-1}$ .



# Пример

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$





# Монотонность

Вместе возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями.



# Определить монотонность

1)  $-1, -4, -9, -16, \dots$

2)  $-1, 0, 1, 2, \dots$

3)  $-1, 1, -1, 1$



# Ограниченность сверху

## **Определение.**

Последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  называется ограниченной сверху, если для нее такое число  $M$ , что неравенство  $a_n < M$  выполняется для всех номеров  $n$ .



# Пример

1,-1,-3,-5

Ограничена сверху  $M = 1$



# Ограниченность снизу

- **Определение.**

Последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  называется ограниченной снизу, если для нее такое число  $m$ , что неравенство  $a_n > m$  выполняется для всех номеров  $n$ .



# Пример

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Ограничена и сверху и снизу

$$M=1$$

$$M=0$$



# Упражнение 1

Укажите номер функции, являющейся  
числовой последовательностью

$$1) y = 3x - 1, x \in Z$$

$$2) y = \frac{4 - x}{x}, x \in N$$

$$3) y = \frac{5x^2 - 1}{x - 2}, x \in Q$$



## Упражнение 2

Найдите первые пять членов  
последовательности  
заданной рекуррентно

$$Y_1 = 2$$

$$Y_n = y_{n-1} + 5$$





## Упражнение 3

Является ли число  $3\frac{1}{13}$  членом

последовательности  $c_n = \frac{4n}{n+3}$ ?



## Упражнение 4

Укажите номер убывающей последовательности

$$1) b_n = \frac{4n}{n+1}$$

$$2) c_n = 2 + \frac{2}{5n}$$

$$3) x_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$$



# Упражнение 5

Является ли ограниченной  
последовательность

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

