

*Тема: «Построение графика  
неявно заданной функции на  
примере лемнискаты Бернулли»*

---



*Проект  
Гузь Ольги*

# Содержание.

---

1. Определение функции заданной неявно.
  2. Определение лемнискаты.
  3. Вывод уравнения лемнискаты.
  4. Преобразование уравнения лемнискаты.
  5. Уравнение лемнискаты в полярной системе координат.
  6. Исследование уравнения лемнискаты.
  7. Построение лемнискаты.
  8. Применение лемнискаты.
  9. Краткая историческая справка.
-

# Определение неявно заданной функции

---

Рассмотрим функцию, заданную неявно уравнением  $F(x, y) = 0$ .

В зависимости от того, какой является функция  $F(x, y)$ -алгебраической или трансцендентной, кривые также делятся на алгебраические и трансцендентные.

Примеры, лемниската Бернулли.

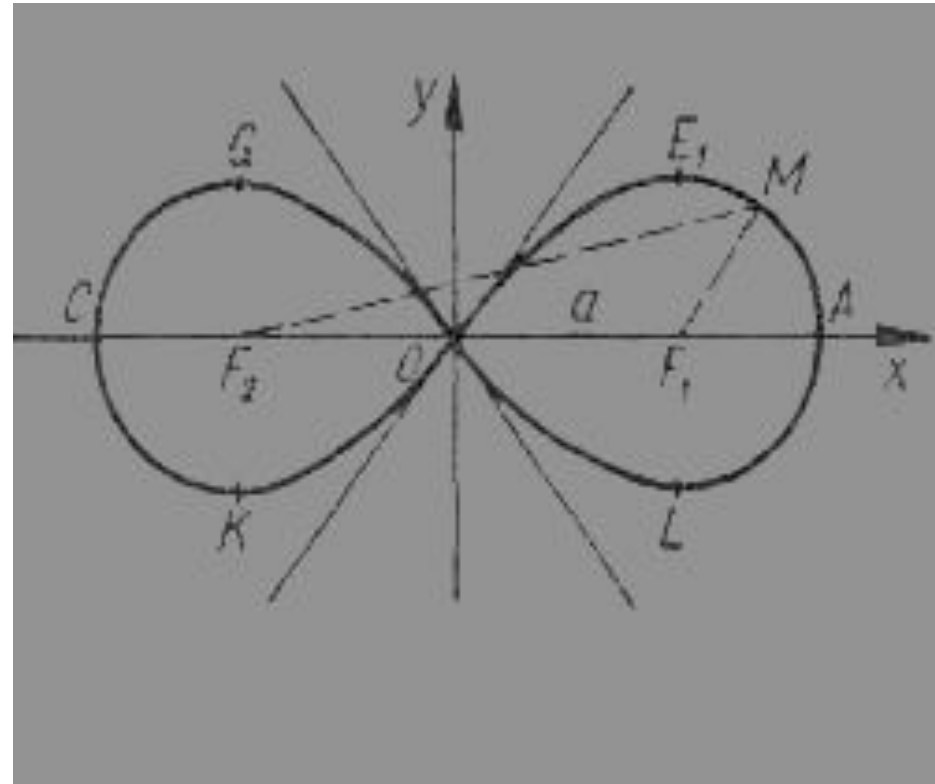
$$[(x^2 + y^2) + a^2]^2 - 4a^2 x^2 = a^4$$

---

# Определение лемнискаты

**Лемниската** –

это кривая, у которой произведение расстояний каждой ее точки до двух заданных точек-фокусов - постоянно и равно квадрату половины расстояния между ними.



# Вывод уравнения лемнискаты

Пусть фокусы имеют координаты:  $F_1(-a;0)$  и  $F_2(a;0)$ ;  $M(x, y)$  - произвольная точка геометрического места, то по условию

$$F_1M \cdot F_2M = 2a$$

Подставляя в это равенство выражения

$$F_1M = \sqrt{(x+a)^2 + (y-0)^2}; F_2M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2},$$

получим искомое уравнение данного геометрического места

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2$$

---

# Преобразование уравнения лемнискаты

---

Дальнейшая цель- получить уравнение лемнискаты Бернулли в более простом виде.

Возводя в квадрат обе части уравнения и группируя члены, находим

$$[(x^2 + y^2 + a^2) + 2ax] \cdot [(x^2 + y^2 + a^2) - 2ax] = a^4$$

отсюда

$$[(x^2 + y^2) + a^2]^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

---

# Преобразование уравнения лемнискаты

---

Преобразуя последнее уравнение, имеем:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 - 4a^2x^2 = a^2,$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$$

или в окончательном виде

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

Мы получили уравнение лемнискаты в декартовой системе координат.

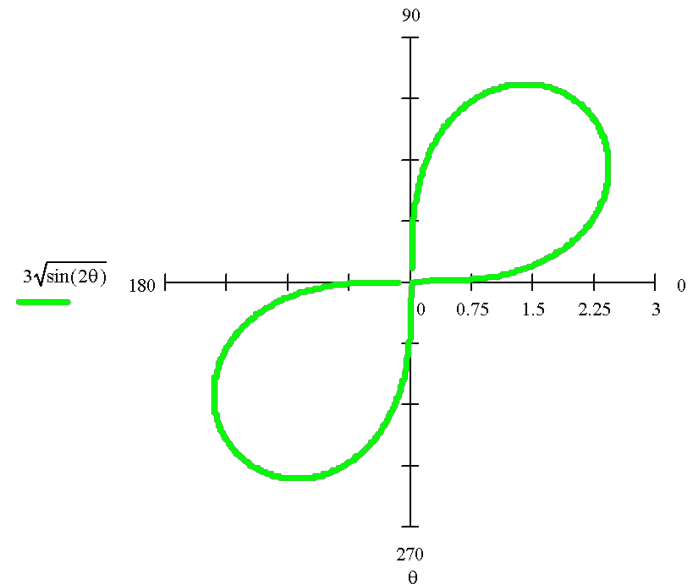
---

# Построение графика лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

Т.к  $x$  и  $y$  входят в это уравнение только в чётных степенях, то лемниската симметрична относительно координатных осей.

Построить график данной функции затруднительно. Запишем это же уравнение в полярной системе координат.





# Уравнение лемнискаты в полярной системе координат

---

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

Поскольку  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $x^2 + y^2 = \rho^2$ ,  
то уравнение лемнискаты в полярных  
координатах примет вид

$$\rho^4 = 2a^2 \rho (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

или

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

---

# Исследование уравнения лемнискаты

---

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

Из этого уравнения видно, что  $\rho = a\sqrt{2}$  при  $\varphi = 0$ . Если  $\varphi$  увеличивается в

пределах

от 0 до  $\frac{\pi}{4}$ , то  $\rho$  уменьшается от  $\rho = a\sqrt{2}$

до  $\rho = 0$ ,  $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

Если  $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , то  $\rho$  принимает мнимые

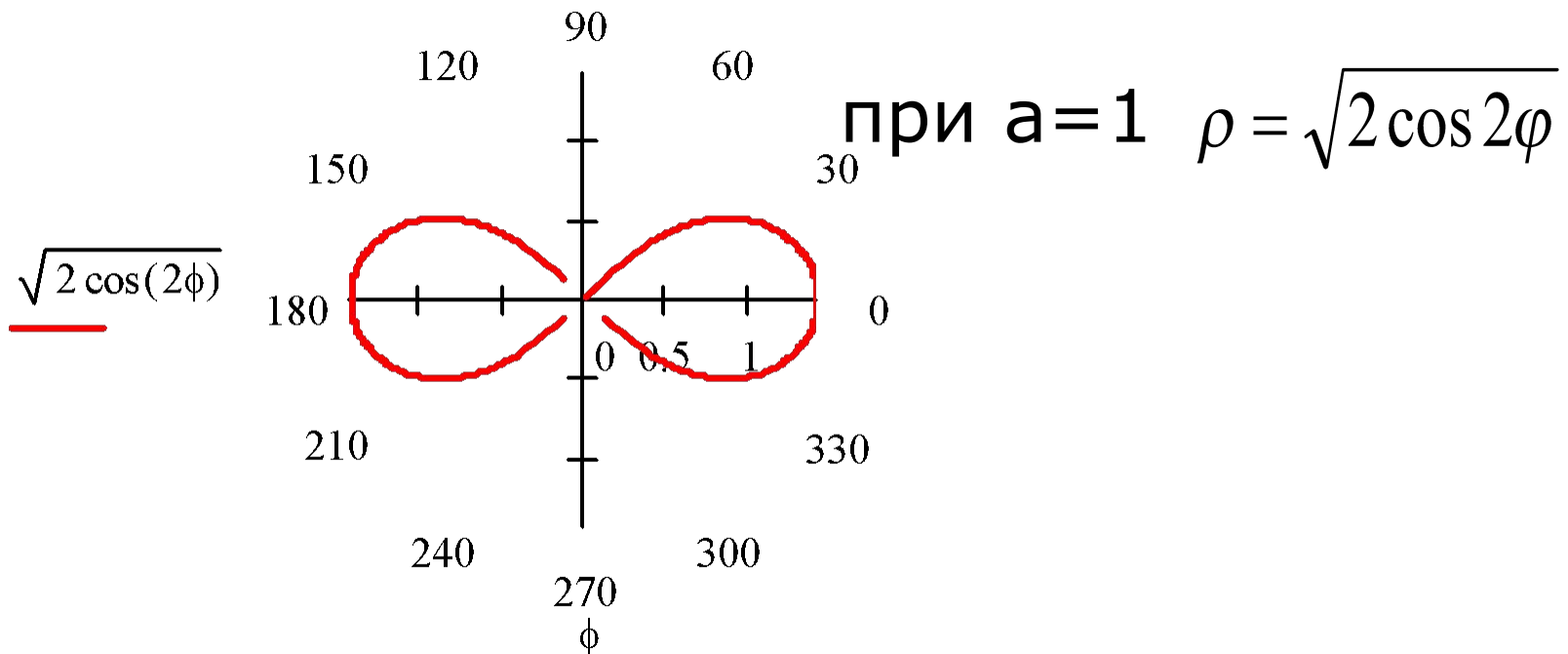
значения. Это означает, что на

лемнискате нет точек, для которых  $\varphi$  меняется в указанных пределах.

---

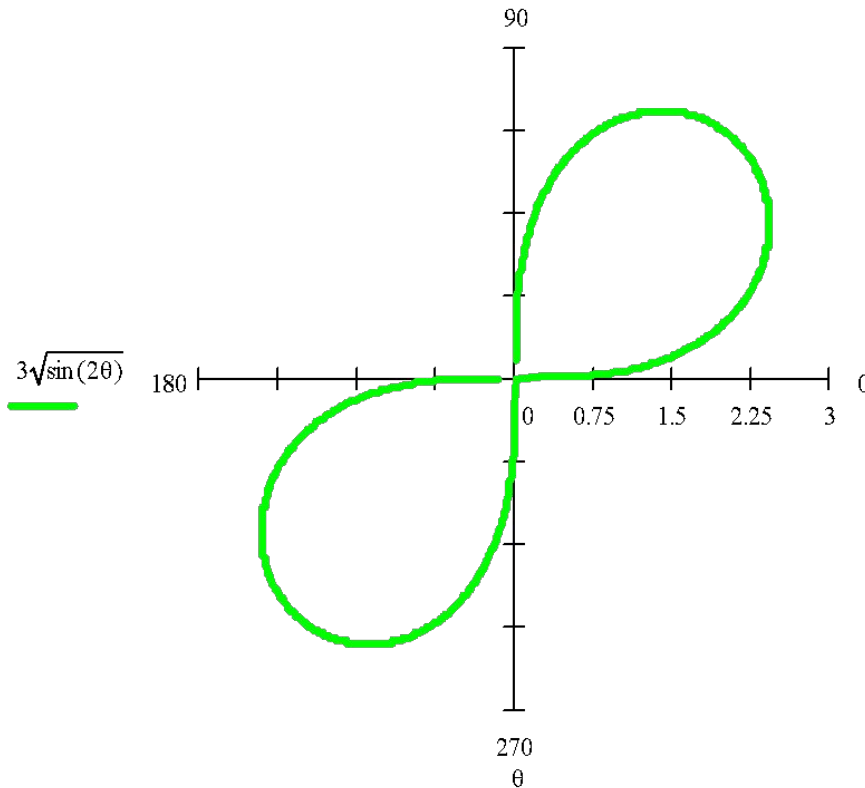
# Построение лемнискаты

Построим график функции  $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$   
при разных значениях  $a$ :



# Построение лемнискаты

---

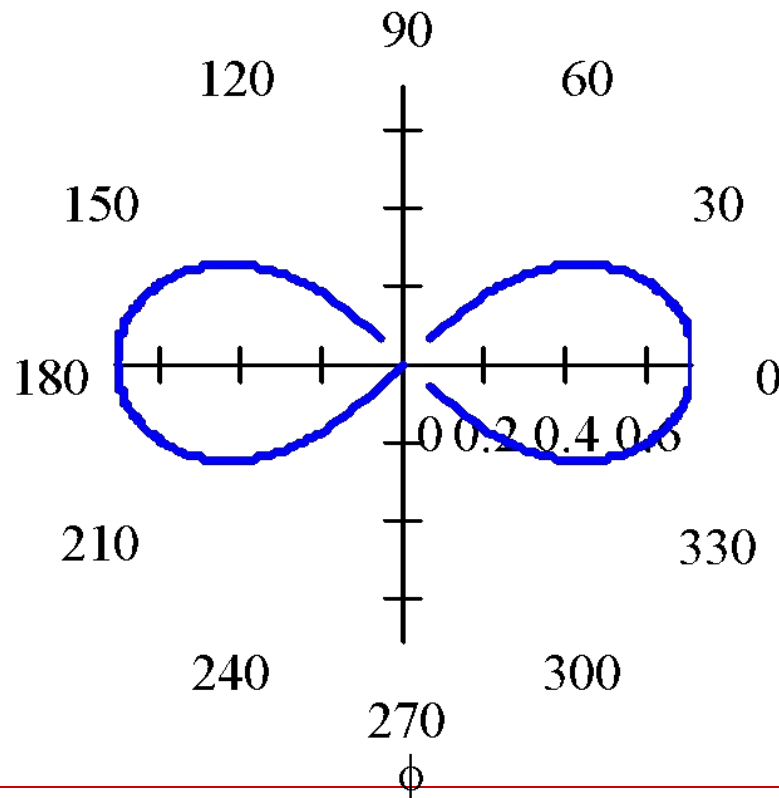


$$\rho = 3\sqrt{2 \sin 2\varphi}$$

# Построение лемнискаты

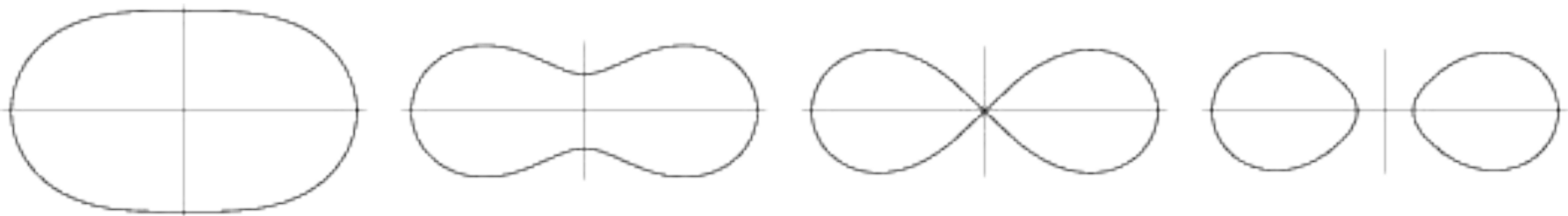
при  $a = -0,5$   $\rho = -0,5\sqrt{2 \cos 2\varphi}$

$-.5(\sqrt{2 \cos(2\phi)})$



---

При построении кривых семейства овалов Кассини, промежуточным графиком является лемниската Бернулли.



1.

2.

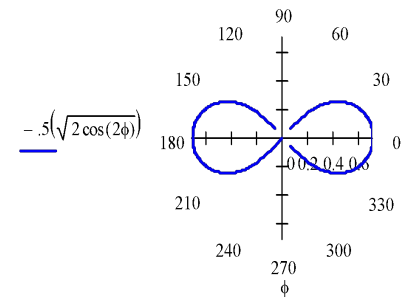
3.

4.

1. Фигура выпуклая как эллипс.
  2. Появляется вогнутая перемычка с четырьмя точками перегиба.
  3. Перемычка смыкается, полученная фигура называется лемнискатой Бернулли.
  4. Фигура разваливается на два овала.
-

# Применение:

---



В технике лемниската применяется, в частности, в качестве переходной кривой на закруглениях малого радиуса, как это имеет место на железнодорожных линиях в горной местности и на трамвайных путях.

---

# Способы построения лемнискаты

---

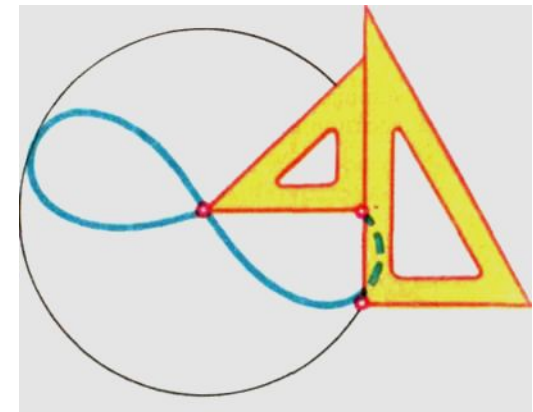
Существует два способа построения лемнискаты.

Первый способ - с помощью

двух угольников и нарисованной на листе бумаги окружности (рис.2). Вершина острого угла одного из угольников находится в центре окружности, вершина прямого угла другого - на окружности.

---

Рис.2

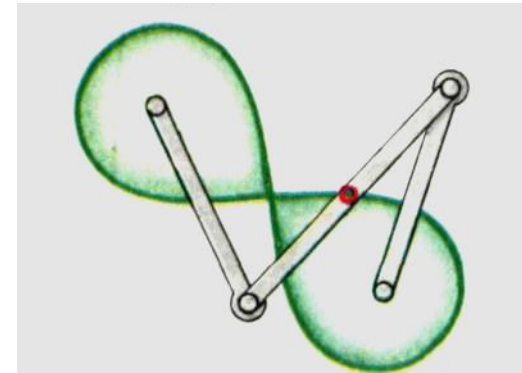




# Способы построения лемнискаты

**Второй способ - с помощью шарнирного устройства, две точки которого закреплены на плоскости (рис.3).**

Рис.3



# Историческая справка

---

## Лемниската Бернулли.

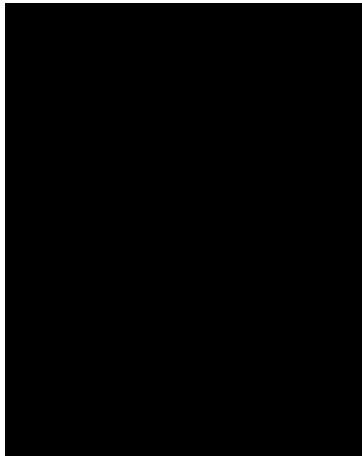
Ее автор – швейцарский математик Якоб Бернулли. Он дал этой кривой поэтическое название «лемниската».

В античном Риме так называли бантик, с помощью которого прикрепляли венок к голове победителя на спортивных играх.

---

# Краткая биография

---



БЕРНУЛЛИ Якоб I (1654-1705).  
Швейцарский математик.  
Работал в Базельском  
университете.

Работы посвящены  
математическому анализу,  
теории вероятностей и  
механике. В 1687  
познакомился с первым  
мемуаром *Лейбница* по  
дифференциальному  
исчислению и применил его  
идеи к изучению ряда кривых,  
встречающихся в математике,  
механике, и выводу формулы  
радиуса кривизны плоской  
кривой. Ввел термин  
«интеграл».

---

# Список использованной литературы

---

- ♣ **Вирченко Н.А. и др. Справочник «Графики функций»; Киев: Наук. думка, 1979г;**
  - ♣ **И.И.Валуцэ «Математика для техникумов»; Москва, Издательство «Наука», 1980г;**
  - ♣ **Маркушевич А.И. «Замечательные кривые»; Москва 1978 г.**
-

# Список использованной литературы

---

**Internet-ресурсы:** [WWW.Colledg.Ru](http://WWW.Colledg.Ru);  
[WWW.5ballov.Ru](http://WWW.5ballov.Ru); [WWW.bankreferatov.Ru](http://WWW.bankreferatov.Ru);  
[WWW.rubricon.com](http://WWW.rubricon.com).

**Программное обеспечение:** MS Word;  
MS Power Point; Windows Media; Nero  
Wave Editor; Сканер.

---