Построение графиков функций с использованием производной.

Основные понятия

1. Область определения функции

-множество всех значений, которые может принимать аргумент, т.е. множество значений х, для которых можно вычислить у, если функция задана формулой.

- Обозначение: D_f

2. Область изменения функции

или множество значений функции.

- Обозначение: E_f

3. Точки пересечения с осями координат

- <u>Ордината</u> точки пересечения с осью Оу находится из условия

$$y = f(0)$$

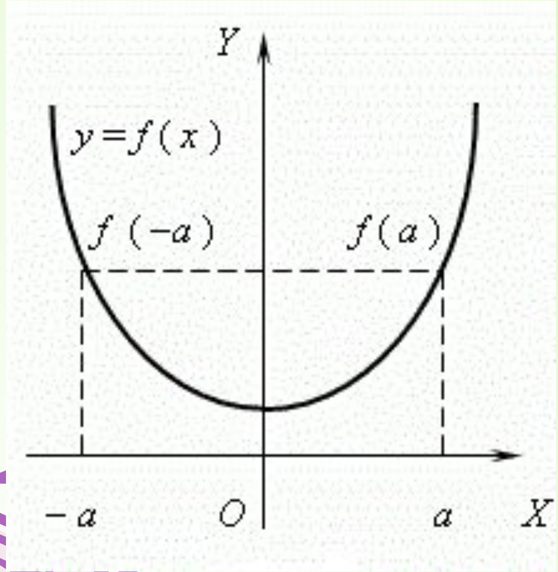
- <u>Абсциссы</u> точек пересечения с осью Ох (нули функции) находятся из условия

$$f(x) = 0.$$

4. Четные, нечетные функции и функции общего положения.

$y = f(x)$
ЧЕТНАЯ

$f(-x) = f(x)$



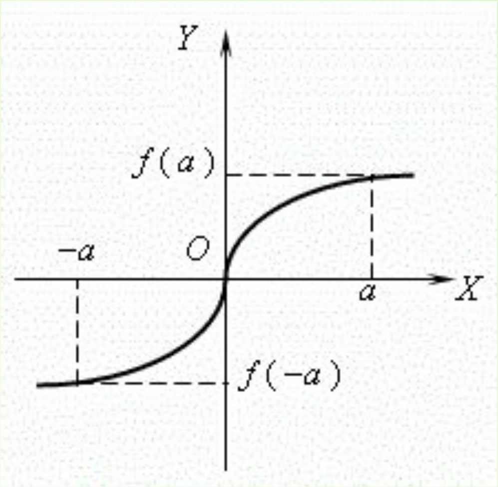
<u>Область определения четной функции</u>- интервал оси Ох, симметричный относительно точки О.

<u>График четной функции</u> симметричен относительно оси Оу.

$y = f(x)$

НЕЧЕТНАЯ

$f(-x) = -f(x)$



<u>Область определения нечетной функции</u>-интервал оси Ox, симметричный относительно точки O. <u>График нечетной функции</u> симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни нечетной, ни четной, называется <u>функцией общего положения.</u>

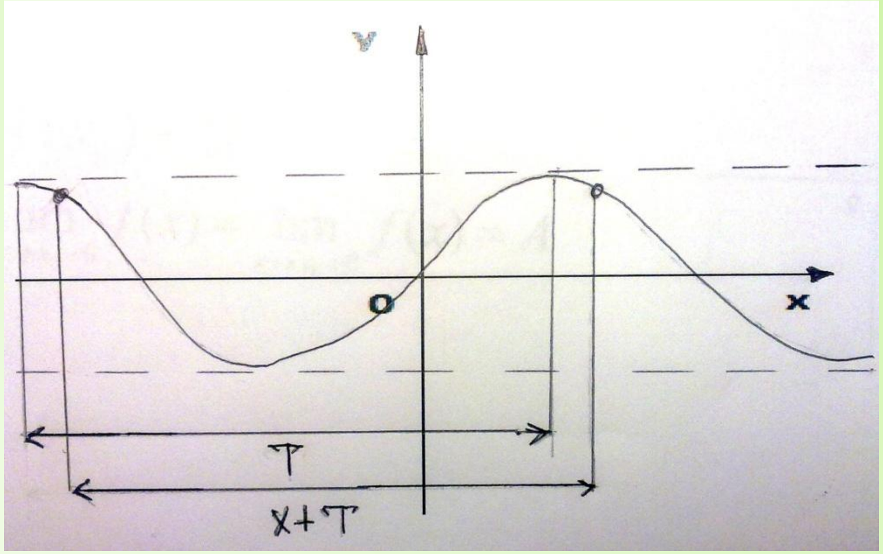
5. Периодические функции.

$y = f(x)$

-периодическая

$f(x+T) = f(x)$

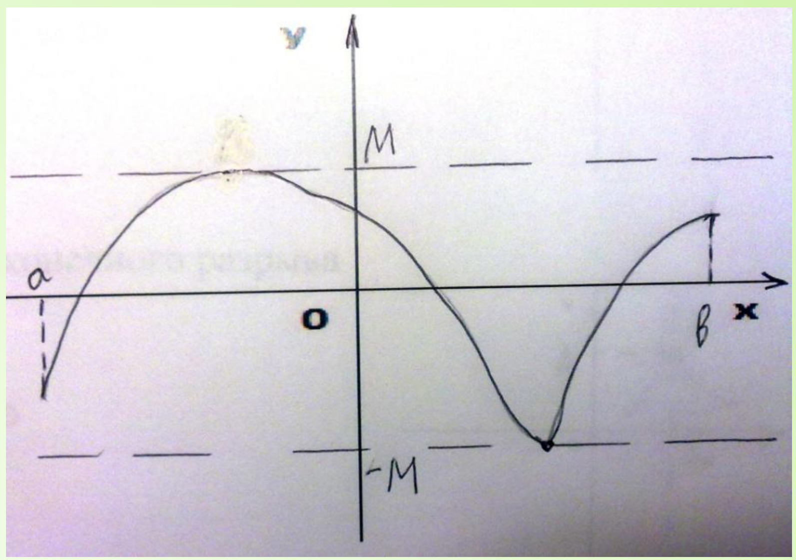
T-период



6. Ограниченные функции.

$y=f(x)$
ограниченная на интервале (a;b)

$|f(x)| \le M \quad (M>0)$
для всех $x \in (a;b)$



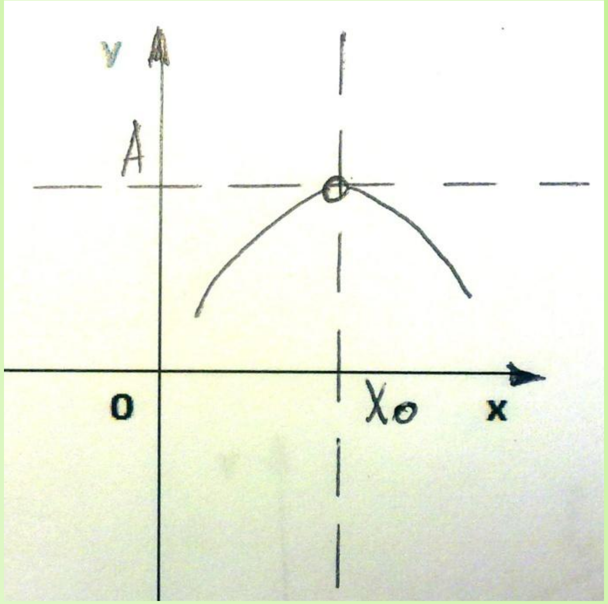
7. Точки разрыва функции и их характер.

- Для элементарных функций точка разрыва - это такая точка, в которой функция не определена, но определена в окрестностях этой точки.

Виды точек разрыва:

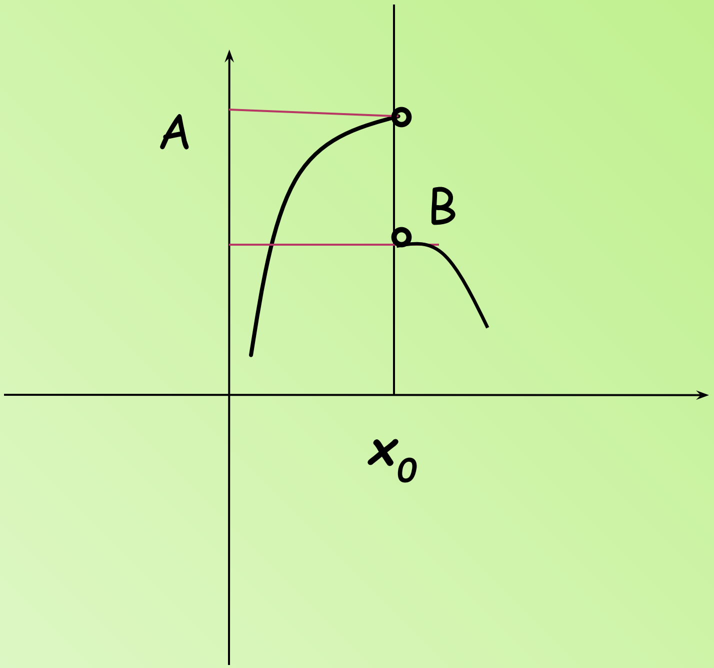
x_0 -точка устранимого разрыва

$$f(x_0) - \nexists$$



$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$$

x_0 -точка конечного разрыва



$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B; A \neq B$$

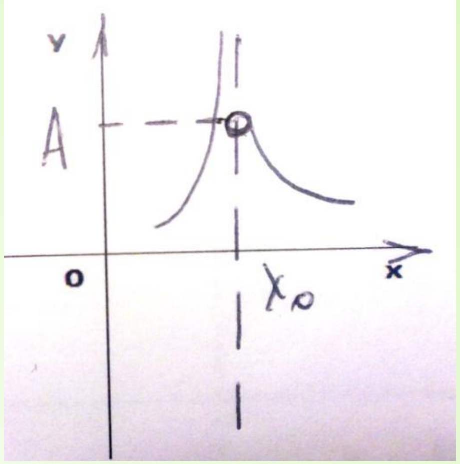
x_0 -точка бесконечного разрыва

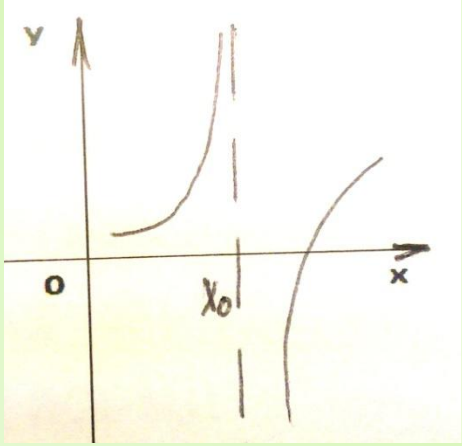
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$$

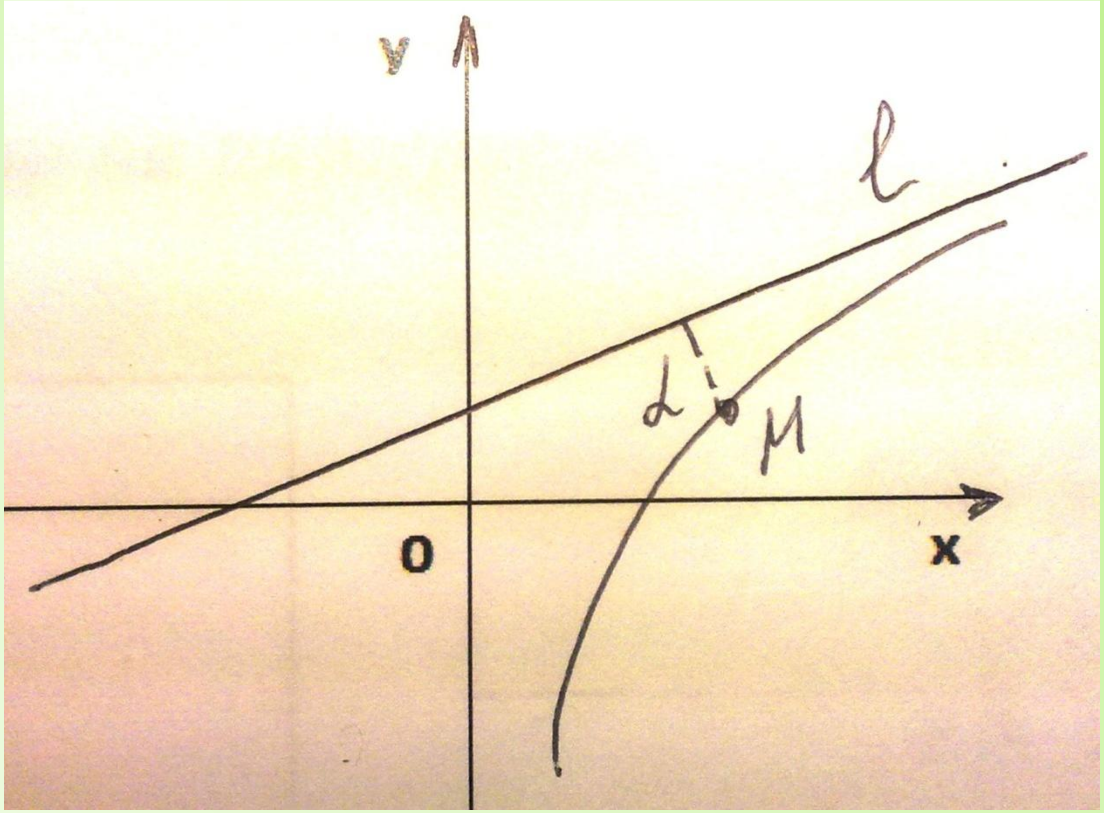




8. Асимптоты графика функций.

- Прямая l называется асимптотой графика функции $y=f(x)$, если расстояние от точки М графика до прямой стремится к нулю при удалении точки М до кривой в бесконечность.

$$\alpha \to 0$$
$$M \to \infty$$



Виды асимптот

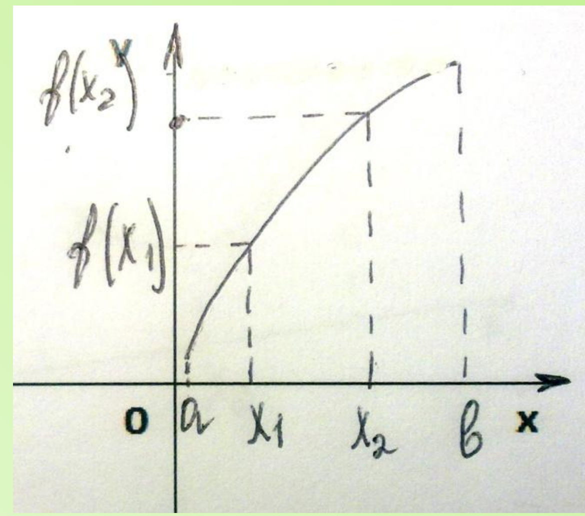
- ***Вертикальная***
- ***Горизонтальная***
- ***Наклонная***

Если *f(x)* можно представить в виде *f(x)=kx+b+* α, где $\alpha(x) \to 0$, когда $x \to \infty$, то прямая *y=kx+b* является асимптотой:
при *k равном нулю* - горизонтальной,
при *k не равном нулю*- наклонной.

График функции может иметь вертикальные асимптоты в точках разрыва (бесконечного) или на границах области определения функции.

9.Возрастание и убывание функции на интервале

$y = f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$ $\Rightarrow$ $x_2 > x_1 \Rightarrow$ $f(x_2) > f(x_1)$ для всех $x_1, x_2 \in (a;b)$



$y = f(x)$

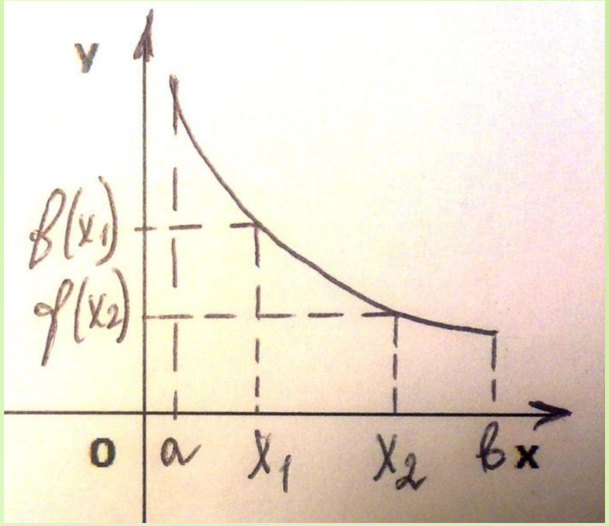
убывает на интервале $(a;b)$

$x_2 \square x_1 \Rightarrow$

$f(x_2) \square f(x_1)$

для всех

$x_1, x_2 \in (a;b)$



Достаточные признаки возрастания и убывания функции:

Если $f'(x) \square 0$ для всякого $x \in (a;b)$ то функция возрастает на интервале (a;b)

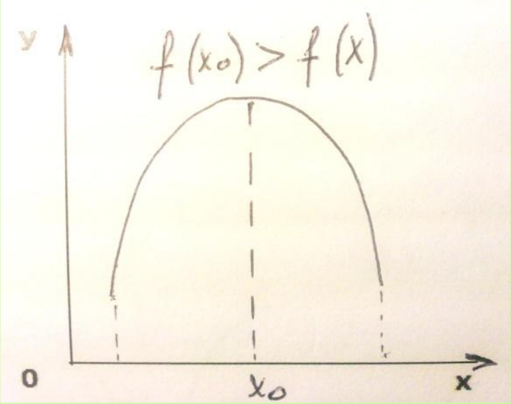
Если $f'(x) \square 0$ для всякого $x \in (a;b)$ то функция убывает на интервале (a;b)

10. Точки экстремума

x_0

-точка максимума

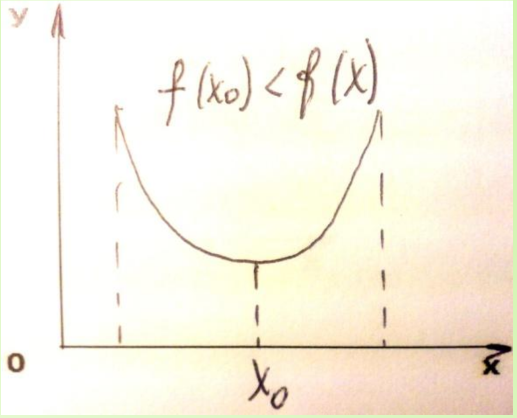
В окрестности точки x_0, $f(x_0)$- наибольшее значение функции



x_0

-точка минимума

В окрестности точки x_0, $f(x_0)$- наименьшее значение функции



Достаточные признаки точки экстремума.

1ый достаточный признак

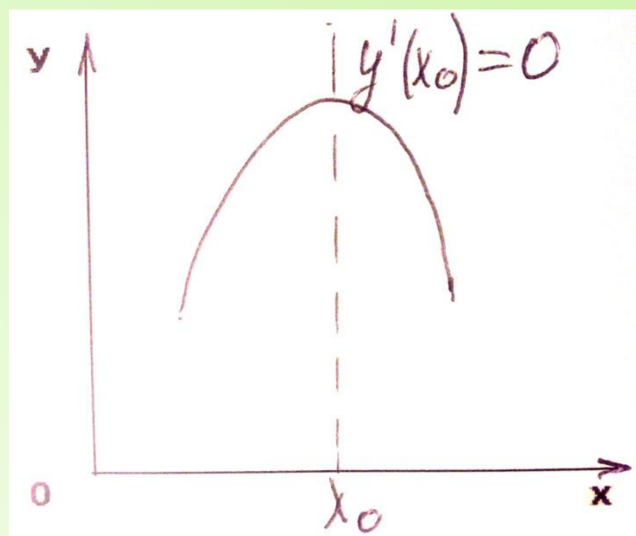
$f(x_0) = 0$ (*или* $\nexists$)

$f'(x) \square 0$, $f'(x) \square 0$

$x \square x_o$ $\qquad$ $x \square x_o$

$\Rightarrow$

Точка $\boldsymbol{x_0}$ –
точка максимума



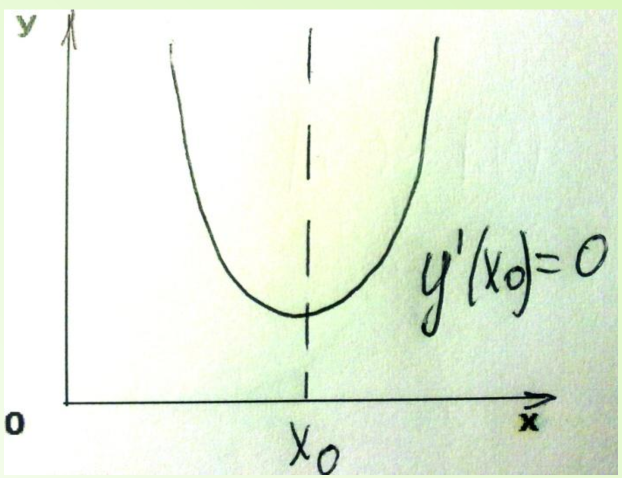
$f(x_0)=0$ (*или* $\nexists$)

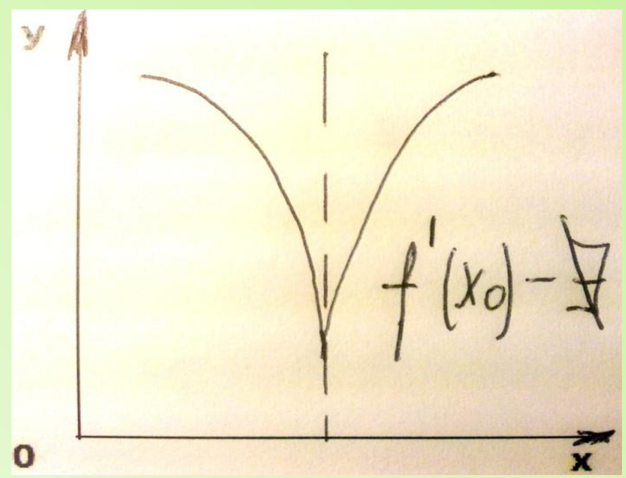
$f'(x)\ \square\ 0$, $f'(x)\ \square\ 0$

$x\ \square\ x_o$ $\quad$ $x\ \square\ x_o$

⇨

Точка $\boldsymbol{x_0}$ – точка минимума

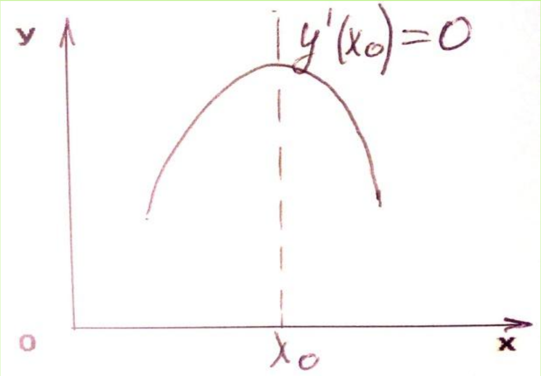




2ой достаточный признак

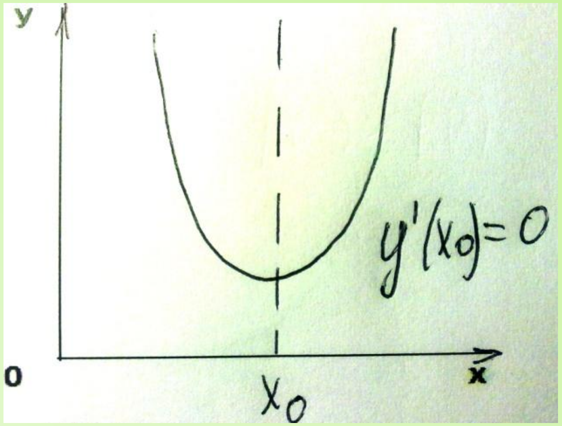
$$f'(x_0) = 0$$
$$f''(x_0) \square 0$$

Точка x_0 – точка максимума



$$f'(x_0) = 0$$
$$f''(x_0) \square 0$$

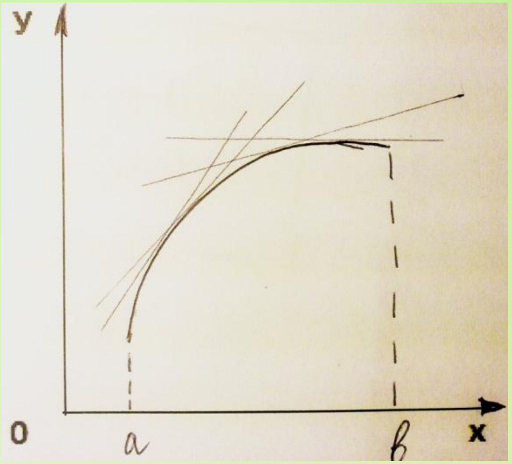
Точка x_0 – точка минимума



11. Выпуклость и вогнутость

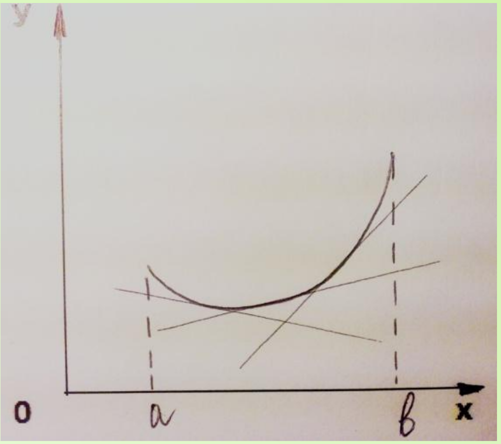
Кривая выпукла на (a;b)

Кривая расположена ниже любой своей касательной



Кривая вогнута на (a;b)

Кривая расположена выше любой своей касательной



Достаточные признаки выпуклости и вогнутости

$f''(x) \square 0$

на (a;b)

Кривая вогнута на (a;b)

$f''(x) \square 0$

на (a;b)

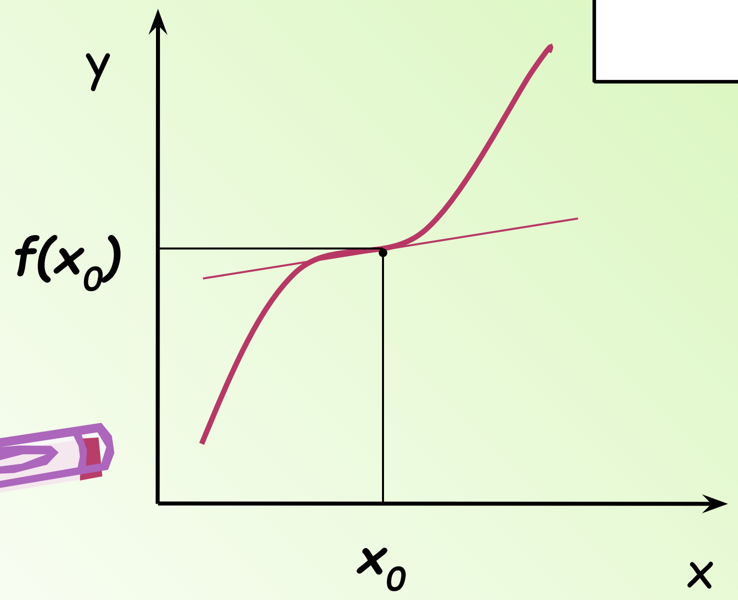
Кривая выпукла на (a;b)

12.Точки перегиба функции

Точка перегиба $(x_0 ; f(x_0))$

⇒

В точке $(x_0 ; f(x_0))$ существует касательная, при переходе через эту точку меняется выпуклость на вогнутость (или наоборот)



Достаточный признак точки перегиба

В точке $(x_0; f(x_0))$ существует касательная,

$$y''(x_0) = 0$$

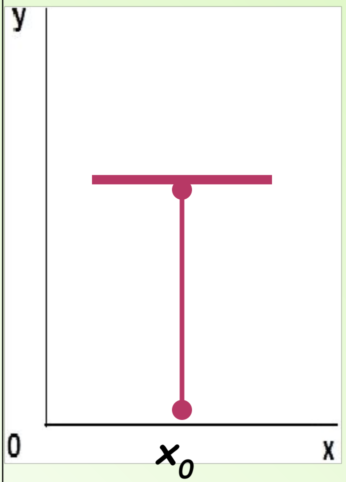
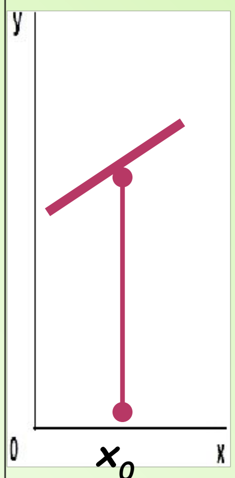
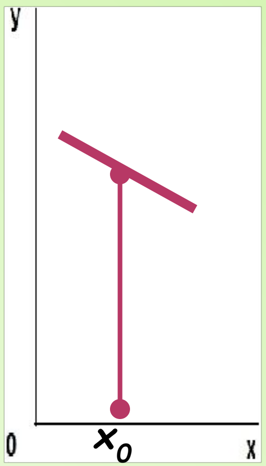
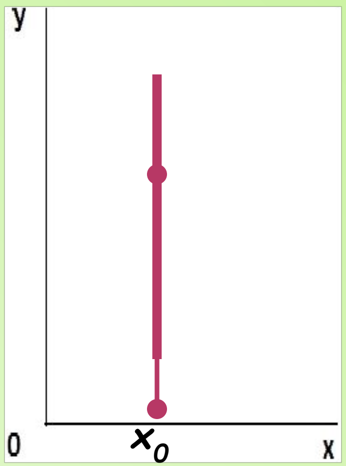
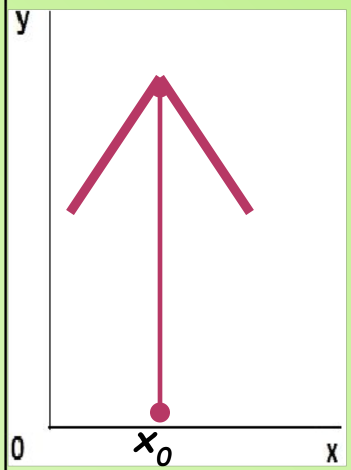
(или не существует) и при переходе через точку x_0 y'' меняет знак

⇒

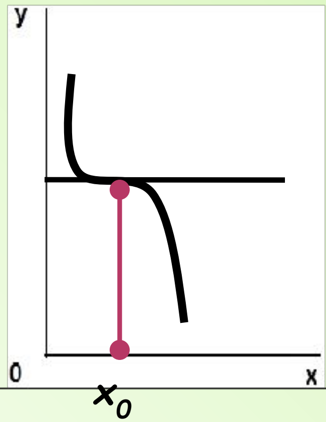
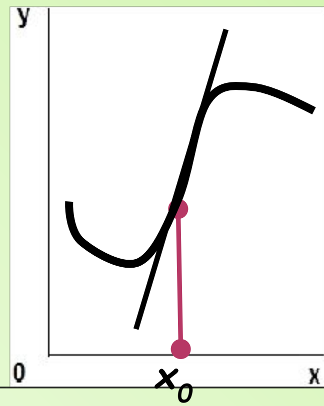
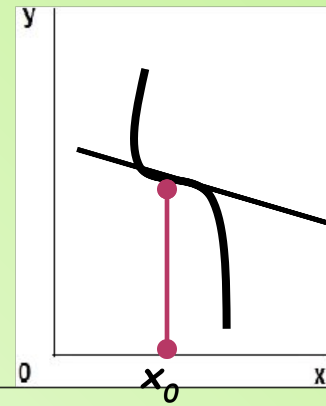
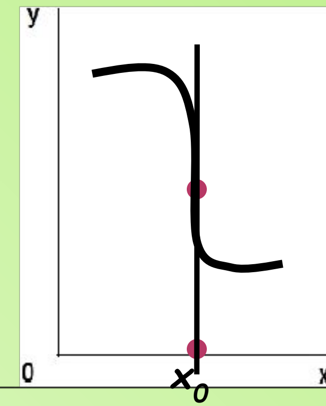
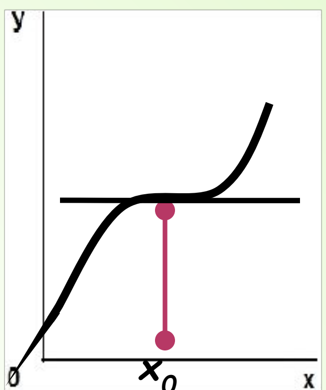
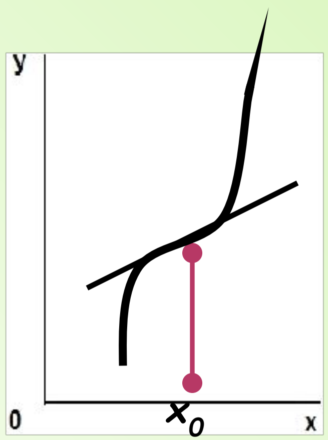
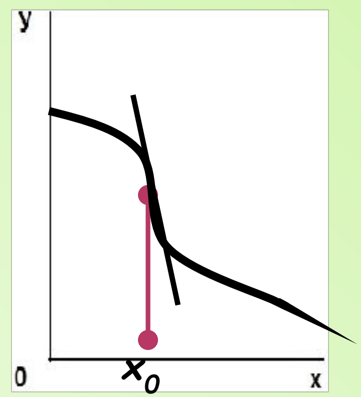
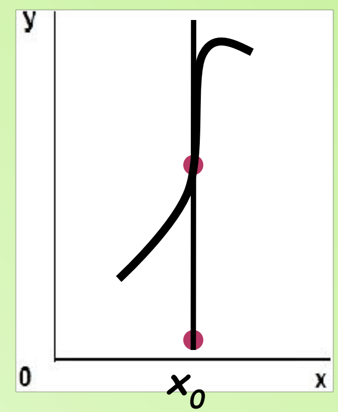
$(x_0; f(x_0))$ **-точка перегиба**

Для построения точки перегиба необходимо установить связь между существованием производной в точке x_0 и существованием касательной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$.

Связь между существованием производной в точке x_0 и существованием касательной к графику функции в точке $(x_0\,;\,f(x_0))$

Производная существует			Производная не существует	
				
касательная горизонтальная	касательная наклонная		касательная вертикальная	касательная не существует

Различные типы точек перегиба:

$y'(x_0)=0$	$y'(x_0)\square 0$	$y'(x_0)\square 0$	$y'(x_0)=\infty$
			
			

Спасибо за внимание!