Построение графиков функций с использованием производной.

Основные понятия

1. Область определения функции

-множество всех значений, которые может принимать аргумент, т.е. множество значений x, для которых можно вычислить y, если функция задана формулой.

- Обозначение: D_f

2. Область изменения функции

или множество значений функции.

- Обозначение: E_f

3. Точки пересечения с осями координат

- Ордината точки пересечения с осью Oy находится из условия

$$y = f(0)$$

- Абсциссы точек пересечения с осью Ox (нули функции) находятся из условия

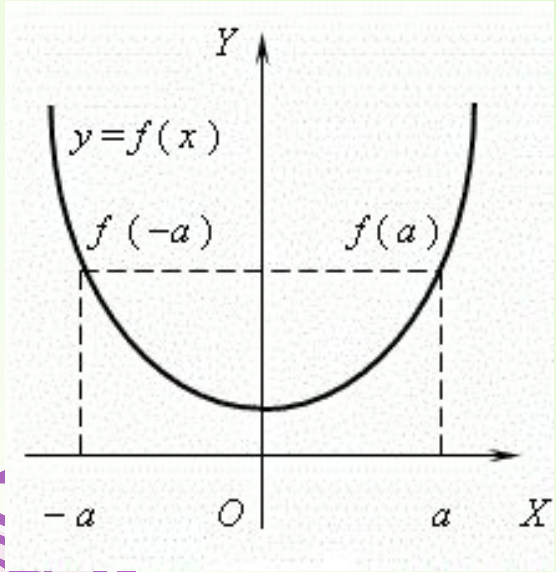
$$f(x) = 0.$$

4. Четные, нечетные функции и функции общего положения.

$y=f(x)$

ЧЕТНАЯ

$$f(-x)=f(x)$$



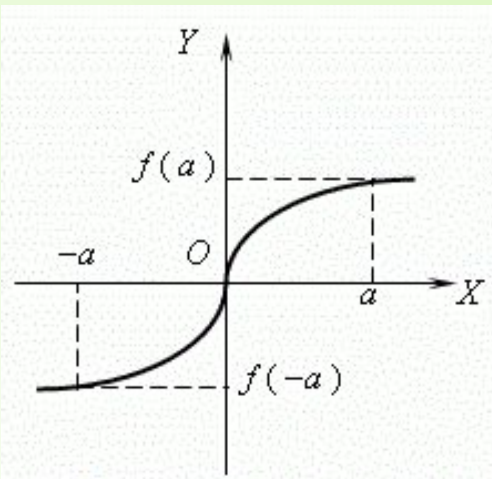
<u>Область определения четной функции</u>- интервал оси Ох, симметричный относительно точки О.

<u>График четной функции</u> симметричен относительно оси Оу.

$$y = f(x)$$

НЕЧЕТНАЯ

$$f(-x) = -f(x)$$



<u>Область определения нечетной функции</u>-интервал оси Ох, симметричный относительно точки О. <u>График нечетной функции</u> симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни нечетной, ни четной, называется <u>функцией общего положения.</u>

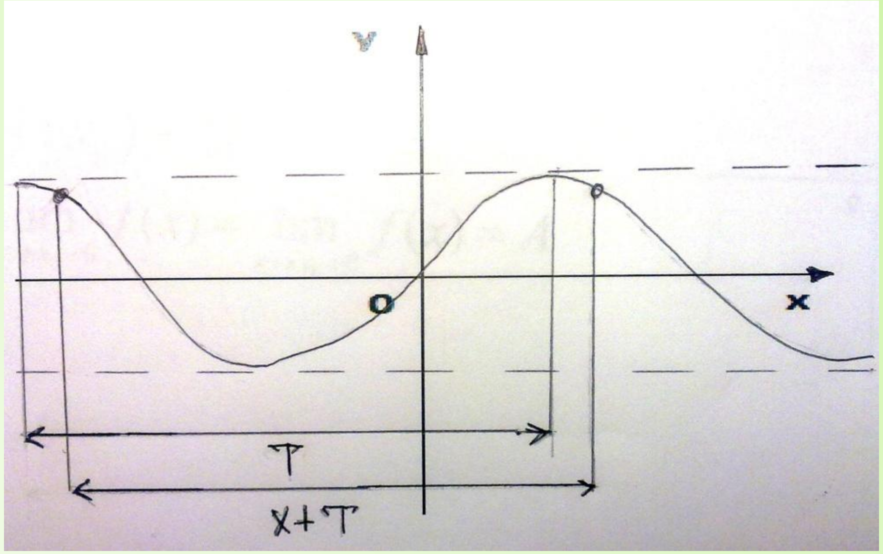
5. Периодические функции.

$y = f(x)$

-периодическая

$f(x+T) = f(x)$

T-период



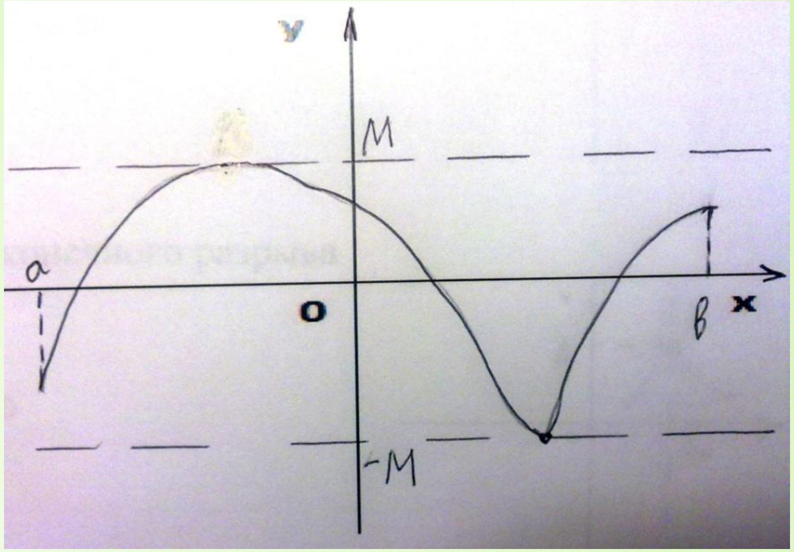
6. Ограниченные функции.

$y = f(x)$

ограниченная на интервале (a;b)

$|f(x)| \leq M \quad (M > 0)$

для всех $x \in (a;b)$



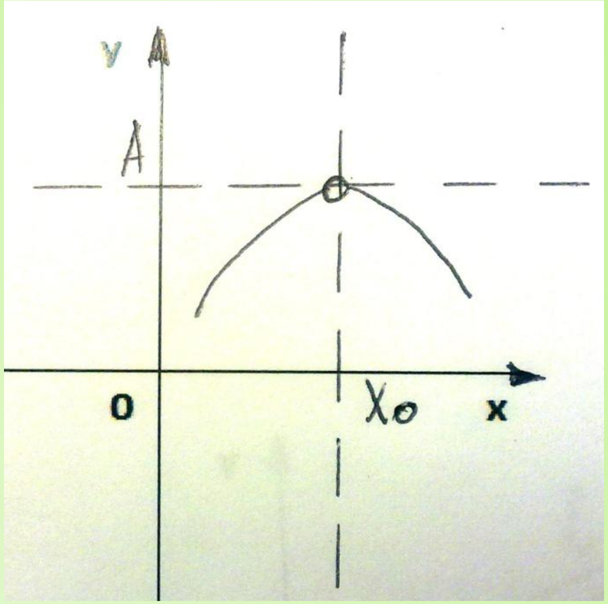
7. Точки разрыва функции и их характер.

- <u>Для элементарных функций</u> точка разрыва – это такая точка, в которой функция не определена, но определена в окрестностях этой точки.

Виды точек разрыва:

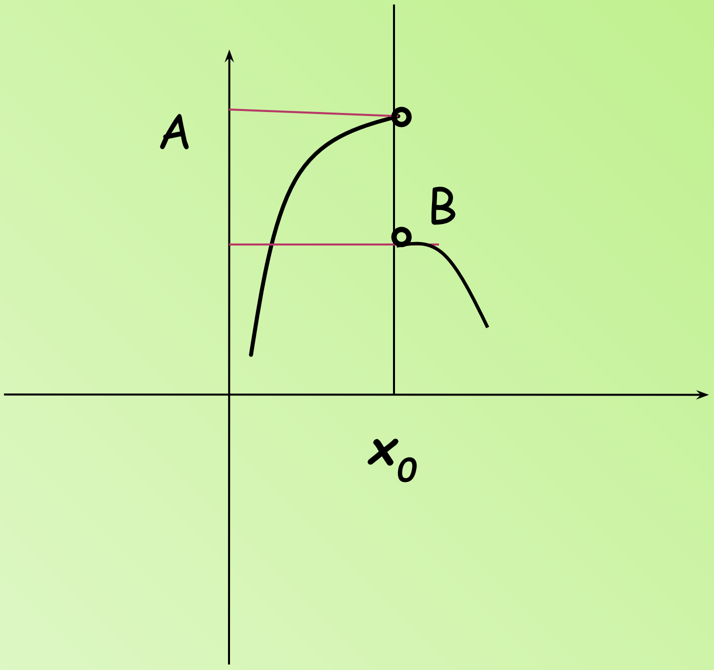
x_0 -точка устранимого разрыва

$f(x_0) - \not\exists$



$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$$

x_0 -точка конечного разрыва



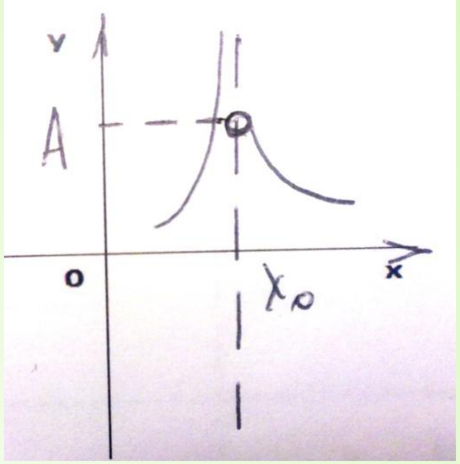
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B; \; A \neq B$$

x_0 -точка бесконечного разрыва

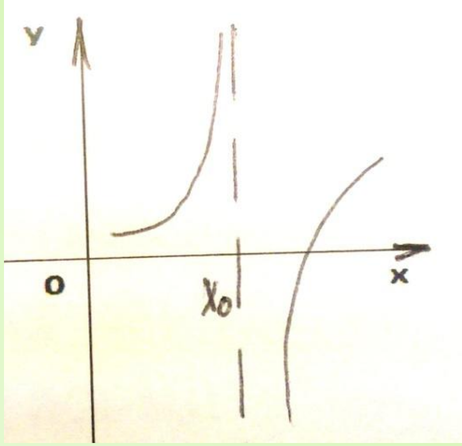
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$$



$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$$

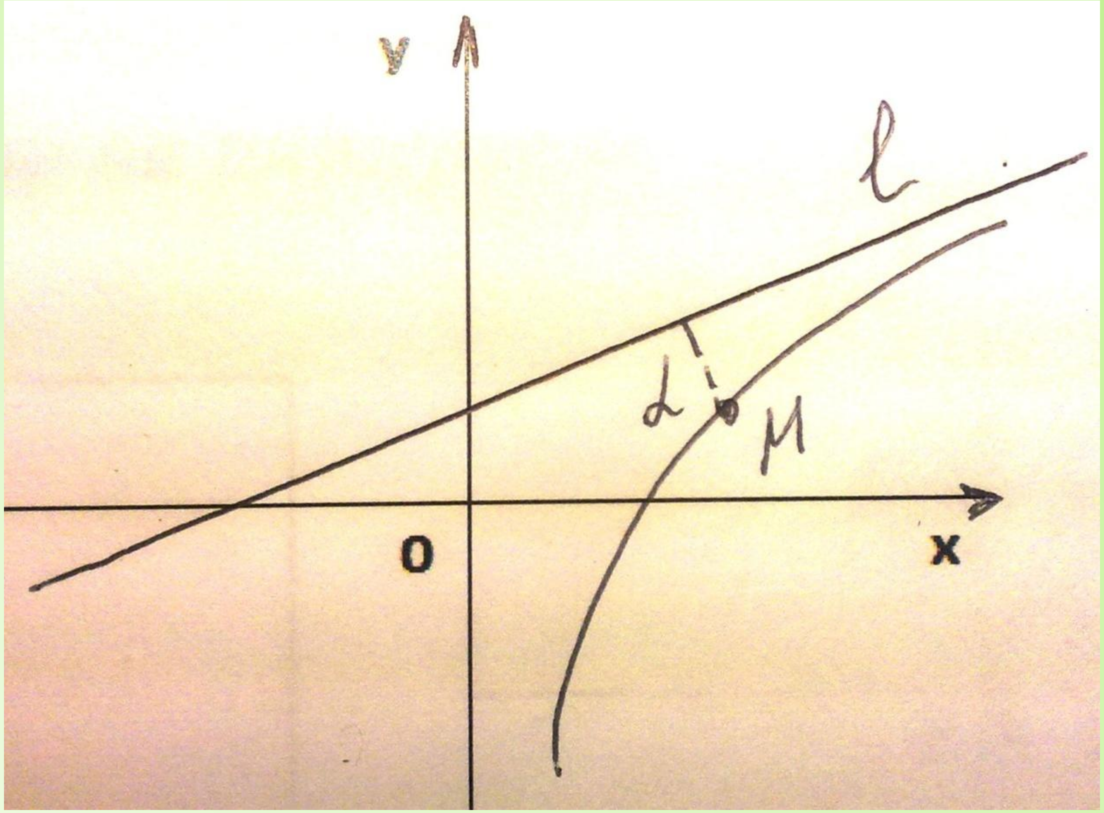
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$$



8. Асимптоты графика функций.

- Прямая l называется асимптотой графика функции y=f(x), если расстояние от точки М графика до прямой стремится к нулю при удалении точки М до кривой в бесконечность.

$$\alpha \to 0$$
$$M \to \infty$$



Виды асимптот

- ***Вертикальная***
- ***Горизонтальная***
- ***Наклонная***

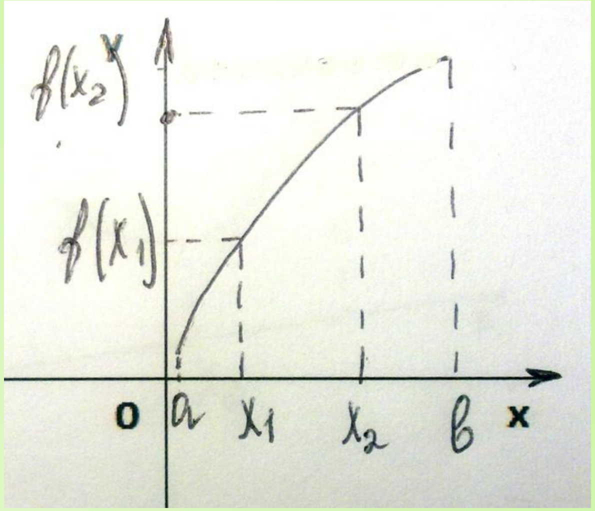
Если *f(x)* можно представить в виде *f(x)=kx+b+* α, где $\alpha(x) \to 0$, когда $x \to \infty$, то прямая *y=kx+b* является асимптотой:
при *k равном нулю* - горизонтальной,
при *k не равном нулю*- наклонной.

График функции может иметь вертикальные асимптоты в точках разрыва (бесконечного) или на границах области определения функции.

9.Возрастание и убывание функции на интервале

$y = f(x)$
возрастает на интервале $(a;b)$

$x_2 \,\square\, x_1 \Rightarrow$
$f(x_2) \,\square\, f(x_1)$
для всех
$x_1, x_2 \in (a;b)$



$y = f(x)$

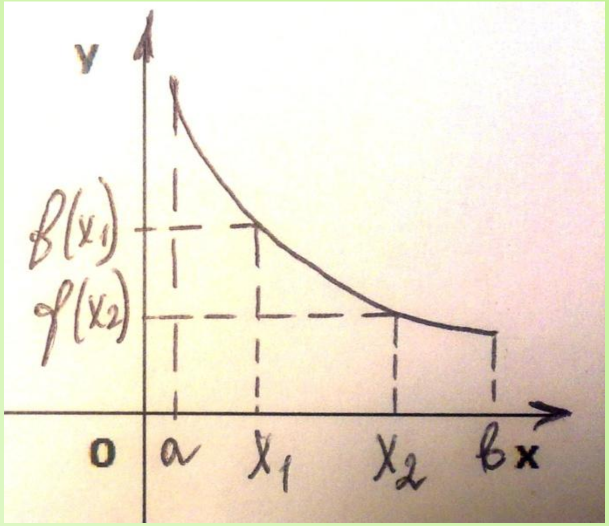
убывает на интервале $(a;b)$

$x_2 > x_1 \Rightarrow$

$f(x_2) < f(x_1)$

для всех

$x_1, x_2 \in (a;b)$



Достаточные признаки возрастания и убывания функции:

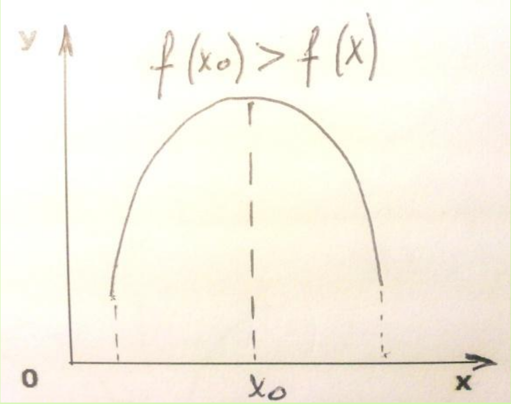
Если $f'(x) > 0$ для всякого $x \in (a;b)$ то функция возрастает на интервале (a;b)

Если $f'(x) < 0$ для всякого $x \in (a;b)$ то функция убывает на интервале (a;b)

10.Точки экстремума

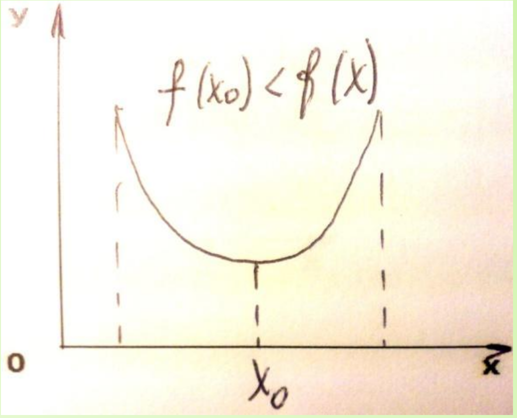
x_0
-точка максимума

В окрестности точки x_0, $f(x_0)$- наибольшее значение функции



x_0
-точка минимума

В окрестности точки x_0, $f(x_0)$- наименьшее значение функции



Достаточные признаки точки экстремума.

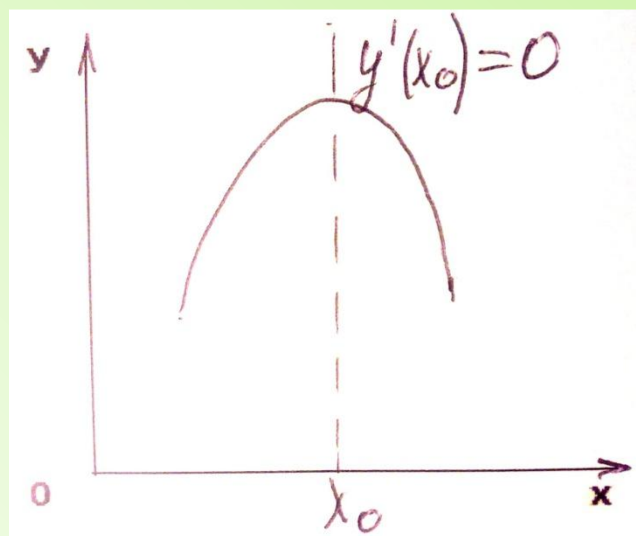
1ый достаточный признак

$f(x_0) = 0$ (*или* ∄)

$f'(x) \square 0$, $f'(x) \square 0$

$x \square x_o$ $x \square x_o$

⇒ Точка $\boldsymbol{x_0}$ –
точка максимума

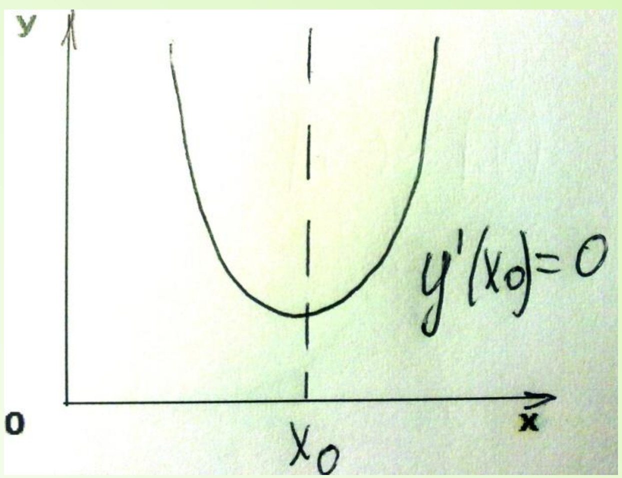


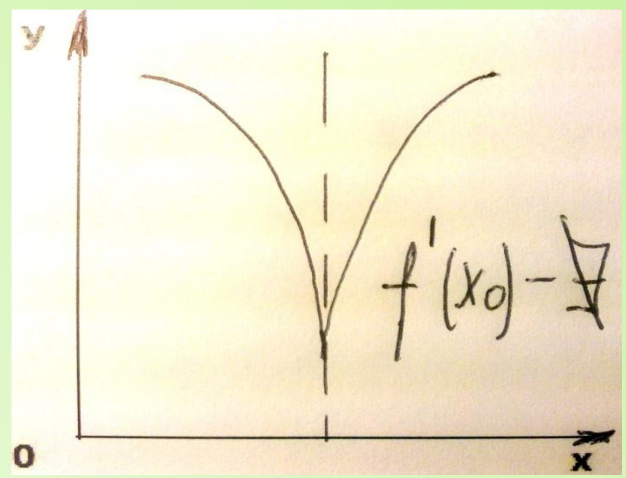
$f(x_0)=0$ $(или\ \nexists)$

$f'(x) \square 0$, $f'(x) \square 0$

$x \square x_o$ $x \square x_o$

Точка ***x₀*** –
точка
минимума

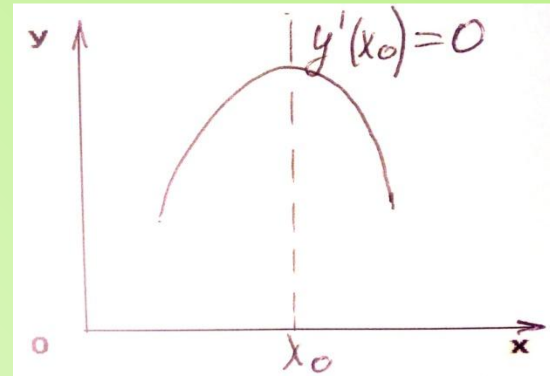




2ой достаточный признак

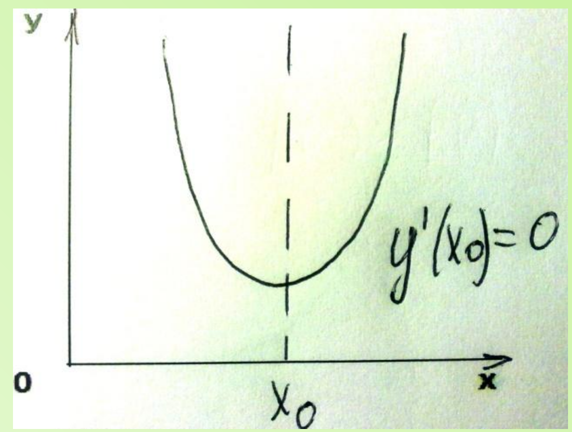
$$f'(x_0) = 0$$
$$f''(x_0) \square 0$$

⇒ Точка $\boldsymbol{x_0}$ – точка максимума



$$f'(x_0) = 0$$
$$f''(x_0) \square 0$$

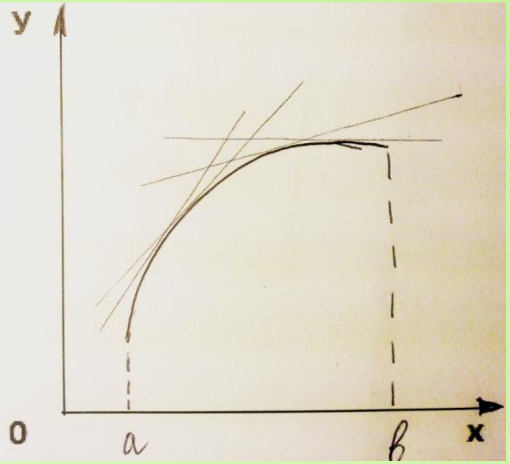
⇒ Точка $\boldsymbol{x_0}$ – точка минимума



11. Выпуклость и вогнутость

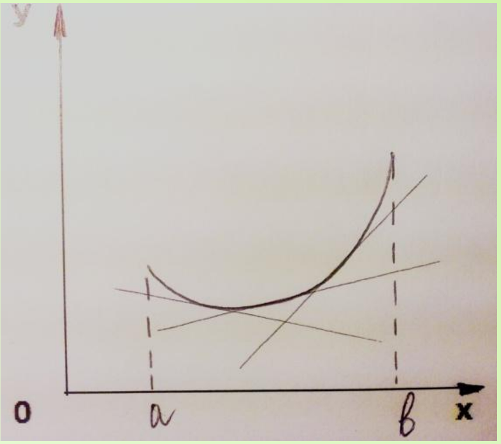
Кривая выпукла на (a;b)

Кривая расположена ниже любой своей касательной



Кривая вогнута на (a;b)

Кривая расположена выше любой своей касательной



Достаточные признаки выпуклости и вогнутости

$f''(x) \square 0$

на (a;b)

Кривая вогнута на (a;b)

$f''(x) \square 0$

на (a;b)

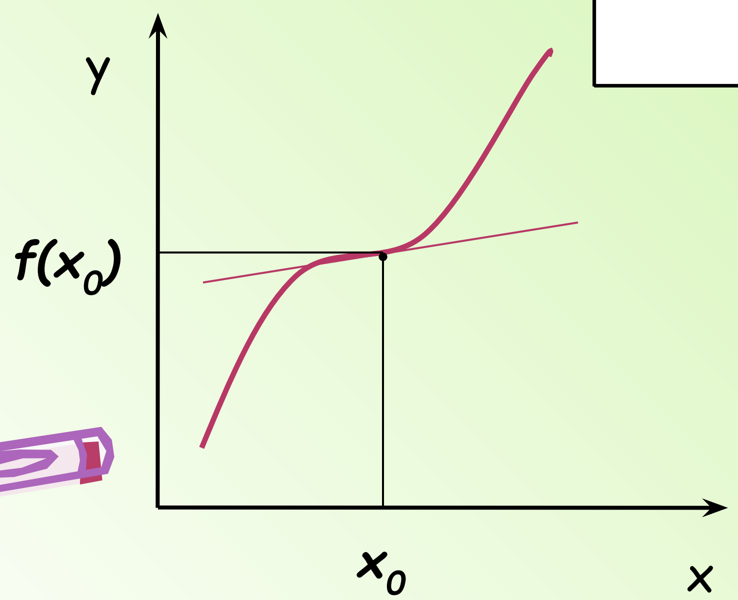
Кривая выпукла на (a;b)

12.Точки перегиба функции

Точка перегиба $(x_0 ; f(x_0))$

⇒

В точке $(x_0 ; f(x_0))$ существует касательная, при переходе через эту точку меняется выпуклость на вогнутость (или наоборот)



Достаточный признак точки перегиба

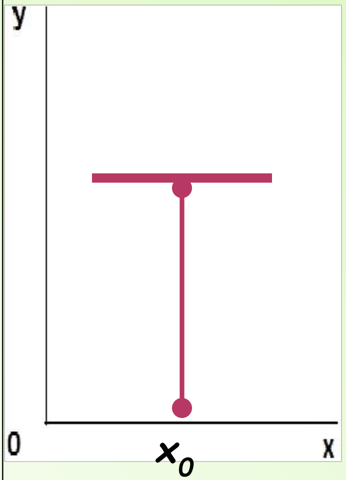
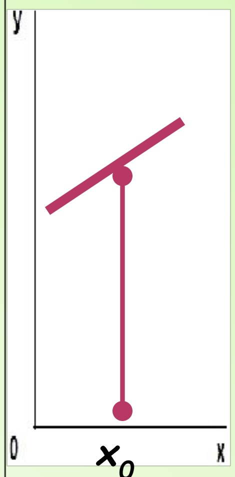
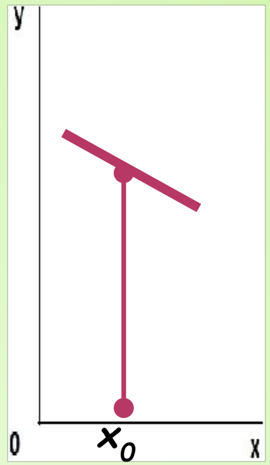
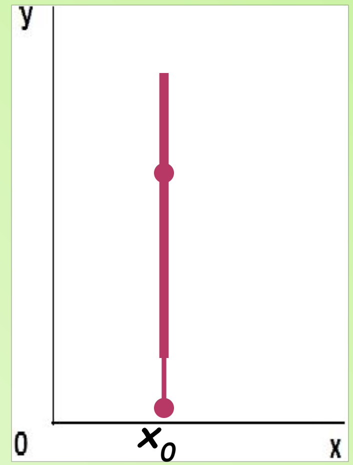
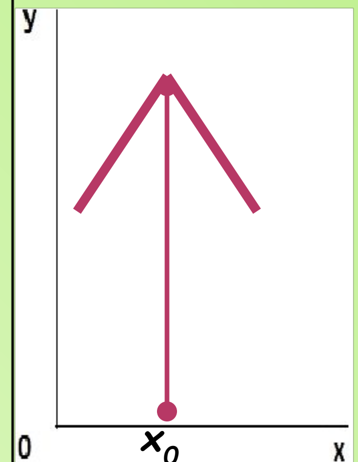
В точке $(x_0 ; f(x_0))$ существует касательная,
$y''(x_0) = 0$
(или не существует) и при переходе через точку x_0
y'' меняет знак

$\Rightarrow$

$(x_0 ; f(x_0))$
-точка перегиба

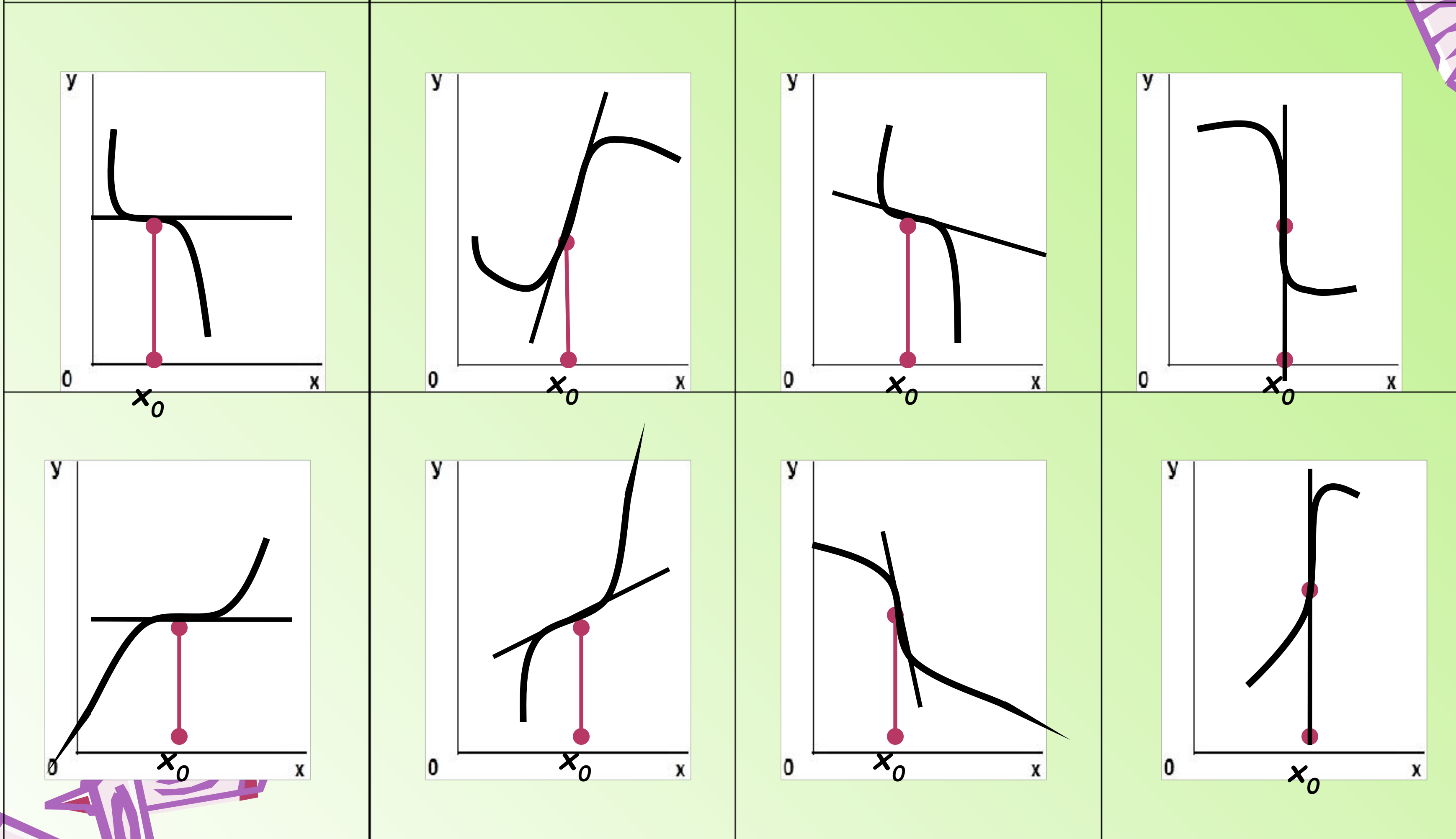
Для построения точки перегиба необходимо установить связь между существованием производной в точке x_0 и существованием касательной к графику функции в точке $(x_0 ; f(x_0))$.

Связь между существованием производной в точке x_0 и существованием касательной к графику функции в точке $(x_0 ; f(x_0))$

Производная существует		Производная не существует	
	 		
касательная горизонтальная	касательная наклонная	касательная вертикальная	касательная не существует

Различные типы точек перегиба:

$y'(x_0)=0$	$y'(x_0) \square 0$	$y'(x_0) \square 0$	$y'(x_0)=\infty$



Спасибо за внимание!