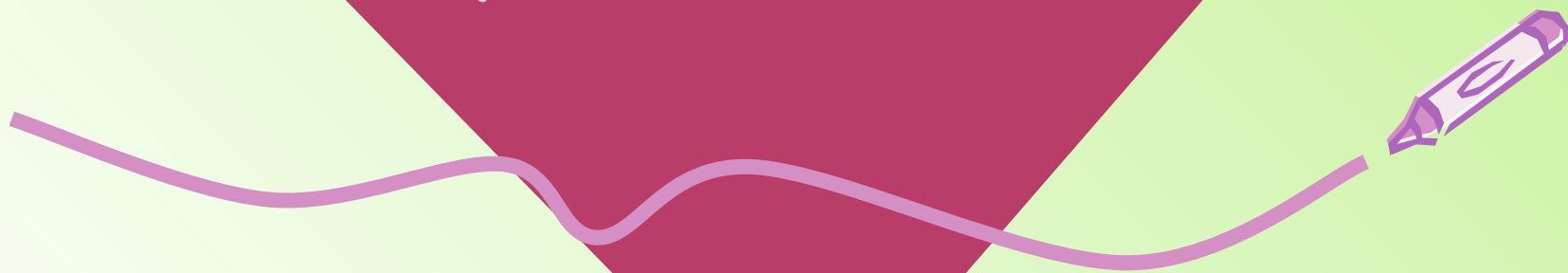
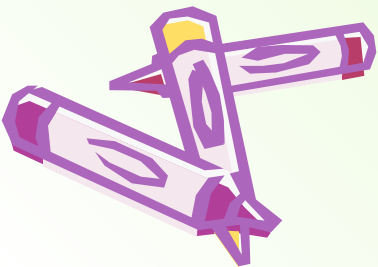


Построение графиков
функций с
использованием
производной.



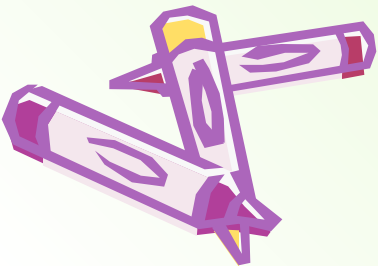
Основные понятия



1. Область определения функции

-множество всех значений, которые может принимать аргумент, т.е. множество значений x , для которых можно вычислить y , если функция задана формулой.

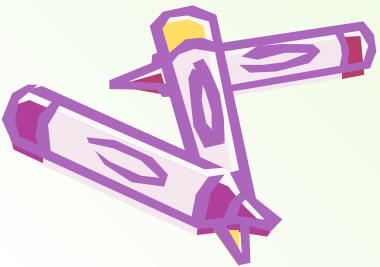
• Обозначение: D_f



2. Область изменения функции

или множество значений функции.

- Обозначение: E_f



3. Точки пересечения с осями координат

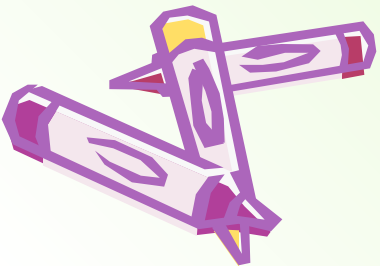


- Ордината точки пересечения с осью Oy находится из условия

$$y = f(0)$$

- Абсциссы точек пересечения с осью Ox (нули функции) находятся из условия

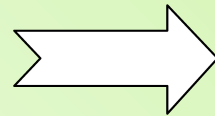
$$f(x) = 0.$$



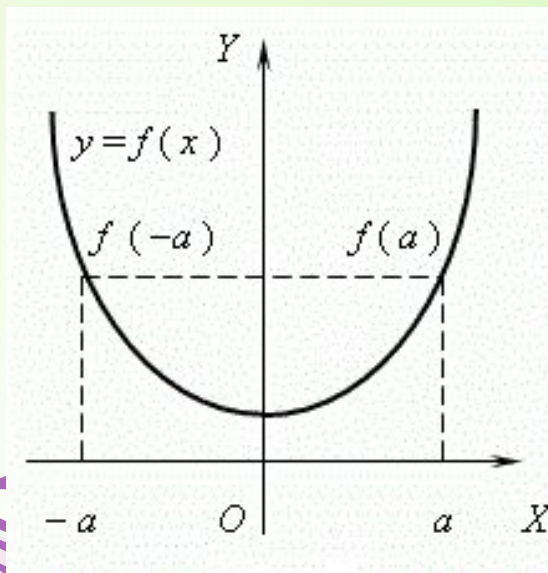
4. Четные, нечетные функции и функции общего положения.

$$y=f(x)$$

ЧЕТНАЯ



$$f(-x)=f(x)$$



Область определения четной функции- интервал оси Ox , симметричный относительно точки O .

График четной функции симметричен относительно оси Oy .

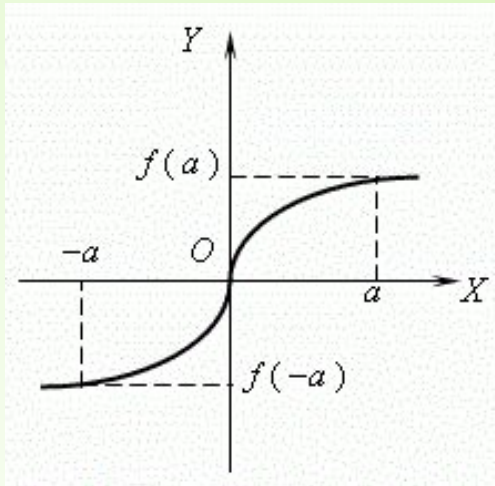
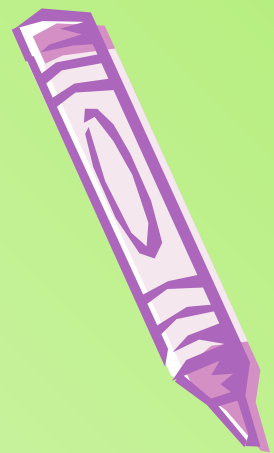


$$y = f(x)$$

НЕЧЕТНАЯ



$$f(-x) = -f(x)$$



Область определения нечетной функции-интервал оси Ox , симметричный относительно точки O . График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни нечетной, ни четной, называется функцией общего положения.



5. Периодические функции.

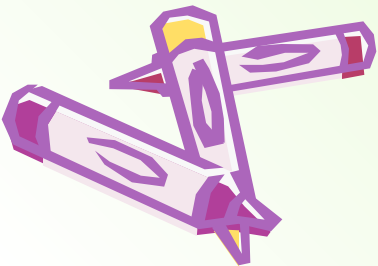
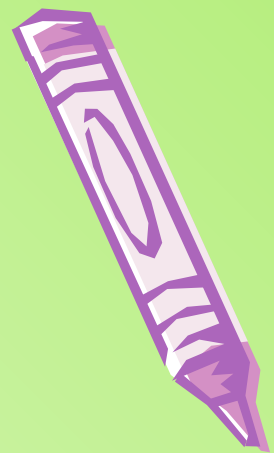
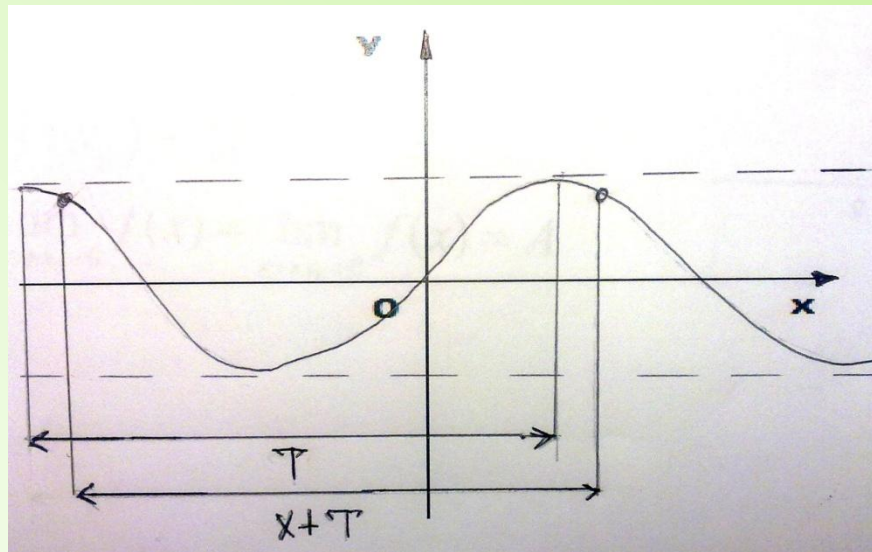
$$y = f(x)$$

-периодическая



$$f(x + T) = f(x)$$

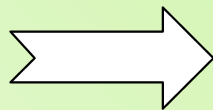
T-период



6. Ограниченные функции.

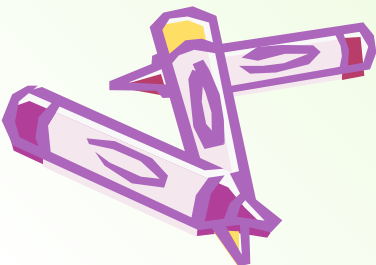
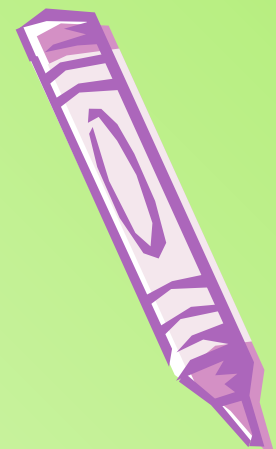
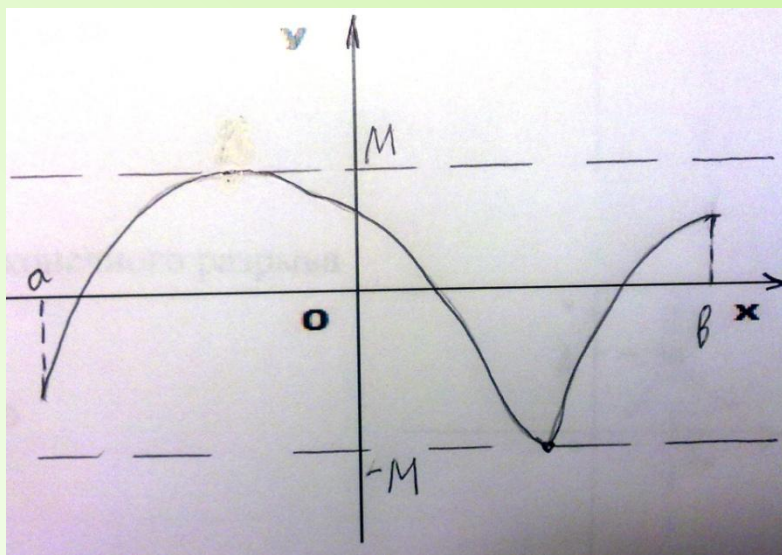
$$y = f(x)$$

ограниченная на
интервале $(a; b)$



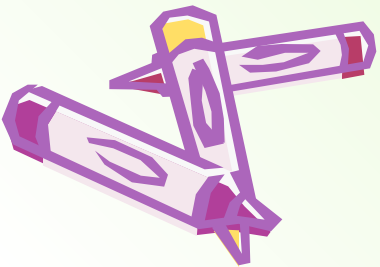
$$|f(x)| \leq M \quad (M > 0)$$

для всех $x \in (a; b)$



7. Точки разрыва функции и их характер.

- Для элементарных функций точка разрыва - это такая точка, в которой функция не определена, но определена в окрестностях этой точки.

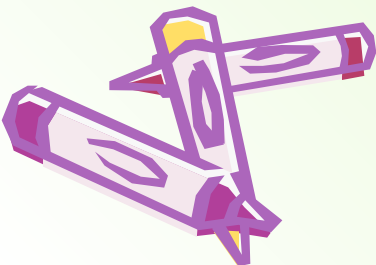
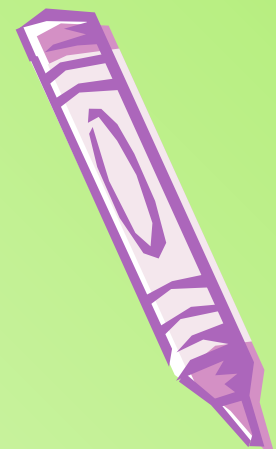
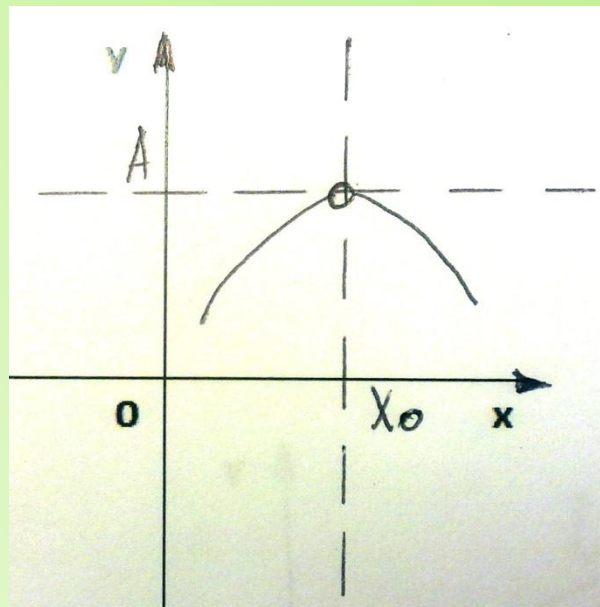


Виды точек разрыва:

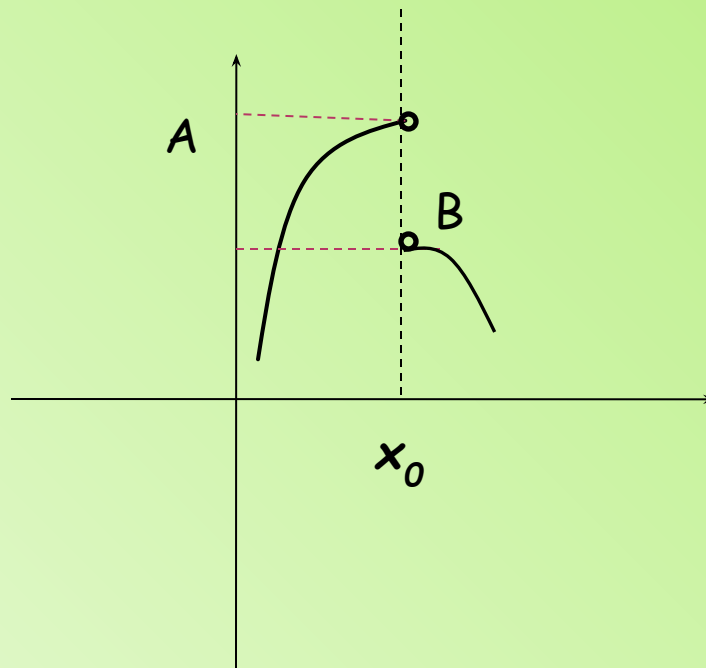
x_0 - точка
устранимого
разрыва

$$f(x_0) - \exists$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$$

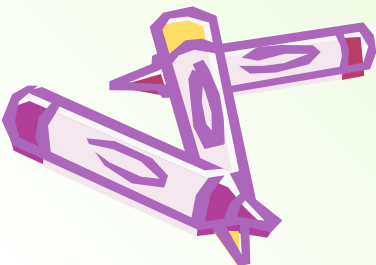
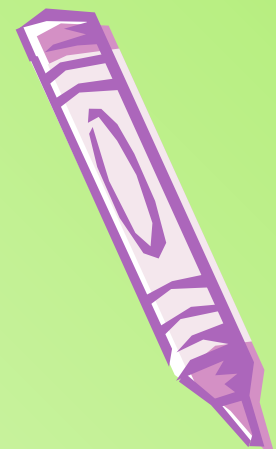


x_0 -точка
конечного
разрыва



$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$$

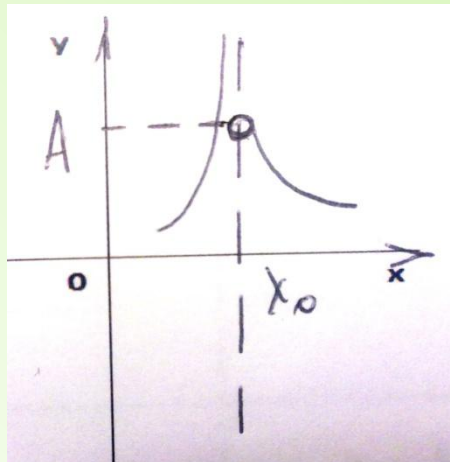
$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = B; A \neq B$$



x_0 -точка бесконечного разрыва

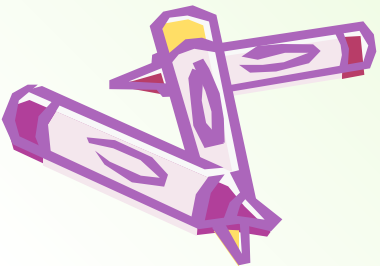
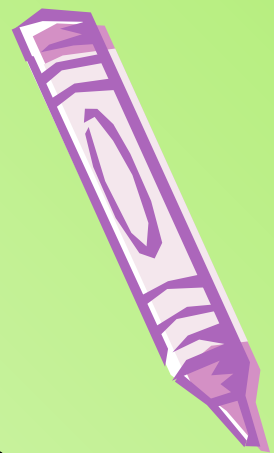
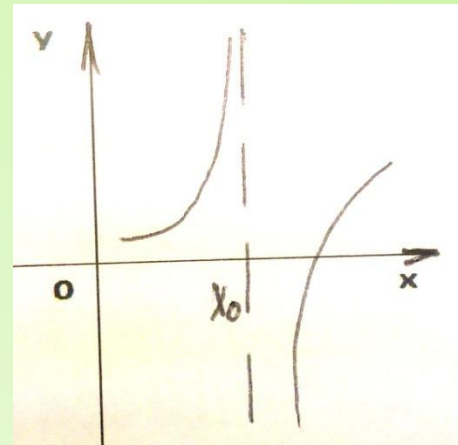
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$$



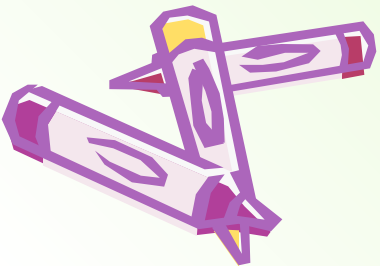
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = -\infty$$



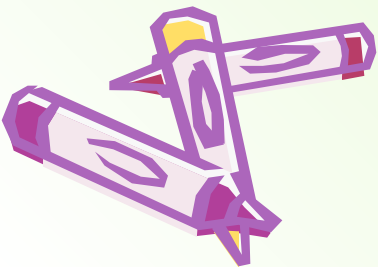
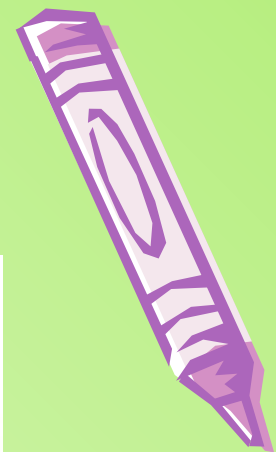
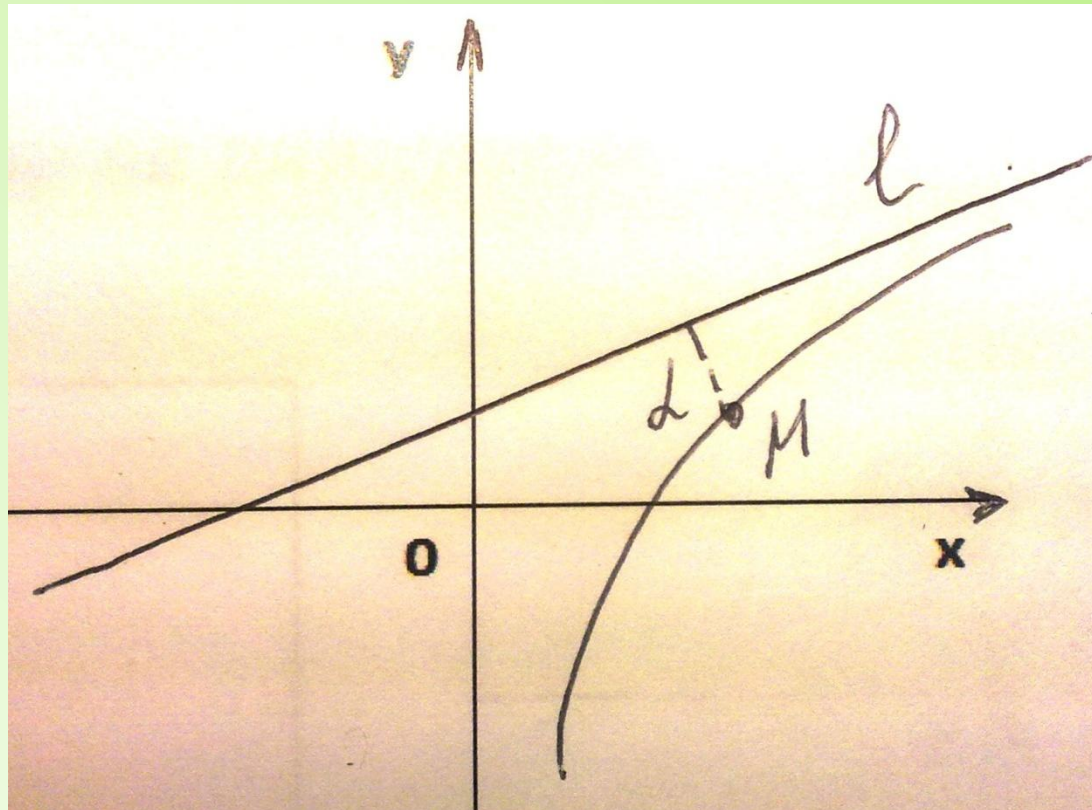
8. Асимптоты графика функций.

- Прямая l называется асимптотой графика функции $y=f(x)$, если расстояние от точки M графика до прямой стремится к нулю при удалении точки M до кривой в бесконечность.



$$\alpha \rightarrow 0$$

$$M \rightarrow \infty$$



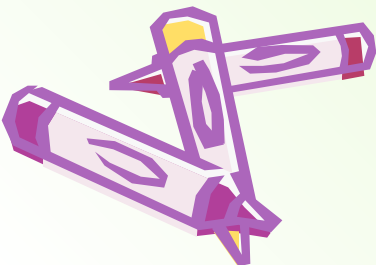
Виды асимптот

- **Вертикальная**
- **Горизонтальная**
- **Наклонная**

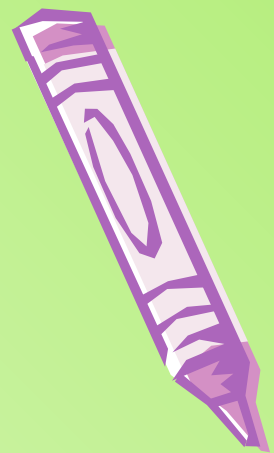
Если $f(x)$ можно представить в виде $f(x)=kx+b+\alpha$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow \infty$, то прямая $y=kx+b$ является асимптотой:

при k равном нулю - горизонтальной,
при k не равном нулю- наклонной.

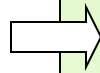
График функции может иметь вертикальные асимптоты в точках разрыва (бесконечного) или на границах области определения функции.



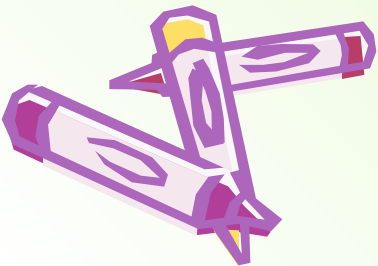
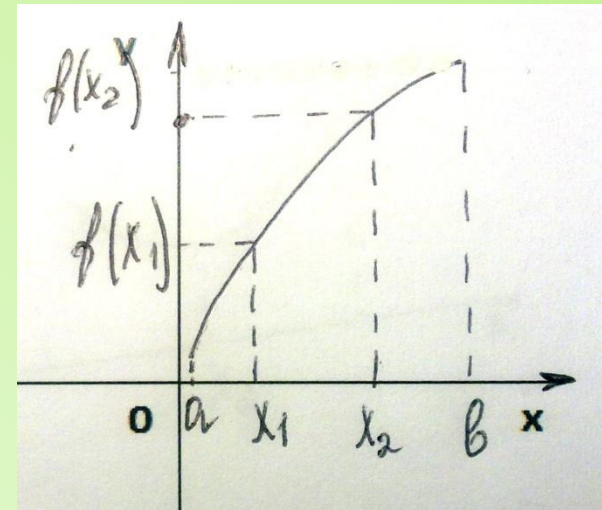
9. Возрастание и убывание функции на интервале



$y = f(x)$
возрастает на
интервале
 $(a; b)$



$x_2 \square x_1 \Rightarrow$
 $f(x_2) \square f(x_1)$
для всех
 $x_1, x_2 \in (a; b)$



$$y = f(x)$$

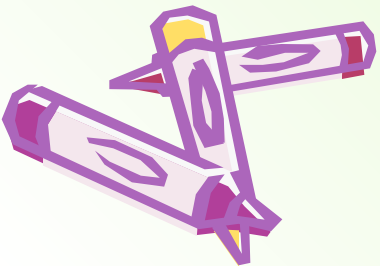
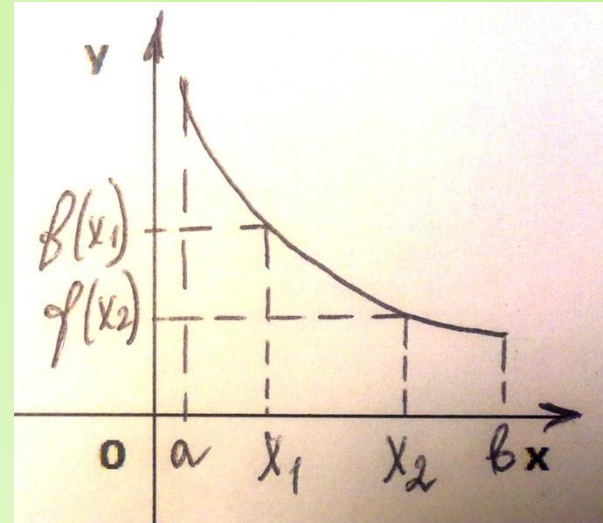
убывает на
интервале
 $(a; b)$

$$x_2 \leq x_1 \Rightarrow$$

$$f(x_2) \geq f(x_1)$$

для всех

$$x_1, x_2 \in (a; b)$$



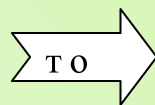
Достаточные признаки возрастания и убывания функции:



Если

$$f'(x) \geq 0$$

для всякого
 $x \in (a; b)$

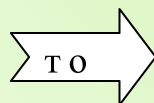


функция возрастает на
интервале $(a; b)$

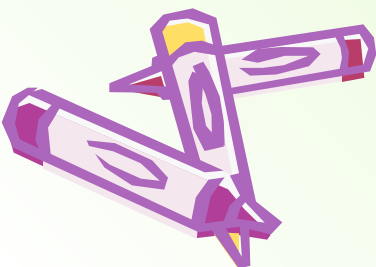
Если

$$f'(x) \leq 0$$

для всякого
 $x \in (a; b)$



функция убывает на
интервале $(a; b)$



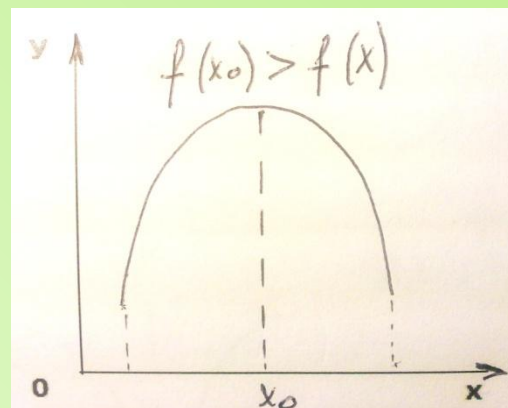
10. Точки экстремума

x_0

-точка максимума



В окрестности точки x_0 , $f(x_0)$ -наибольшее значение функции

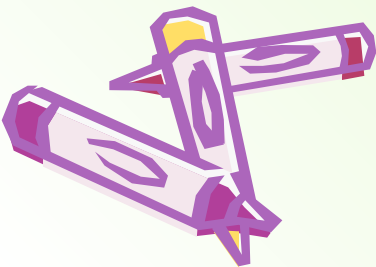
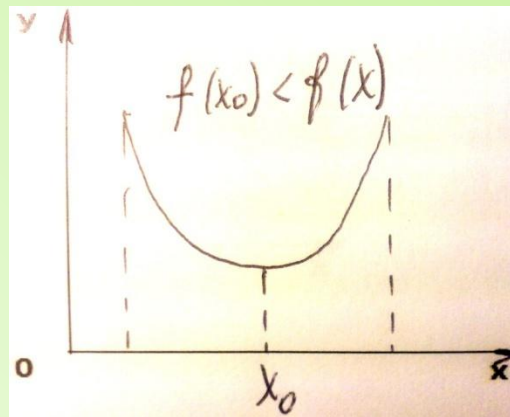


x_0

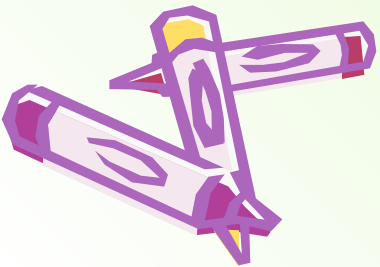
-точка минимума



В окрестности точки x_0 , $f(x_0)$ -наименьшее значение функции



Достаточные признаки
точки экстремума.

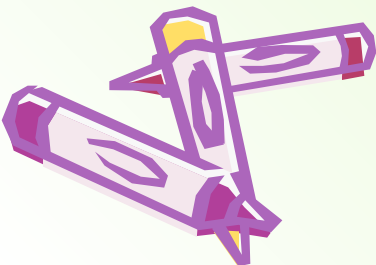
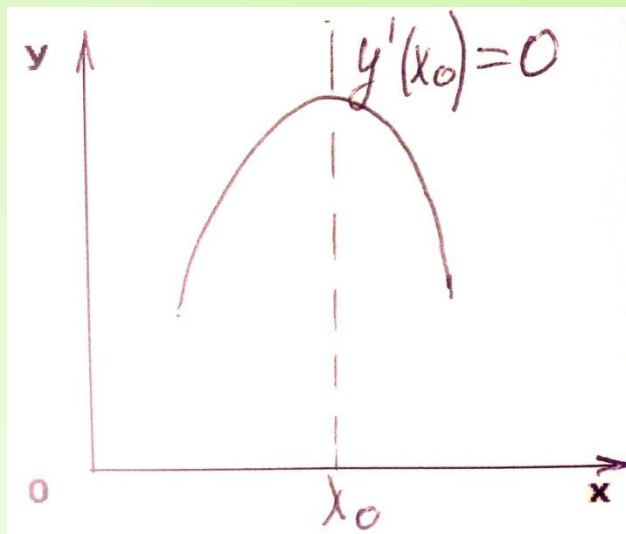


1ый достаточный признак

$$f(x_0) = 0 \text{ (или } \exists)$$
$$f'(x) \leq 0, f'(x) \leq 0$$
$$x \leq x_0 \quad x \geq x_0$$



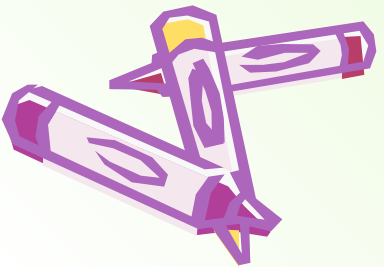
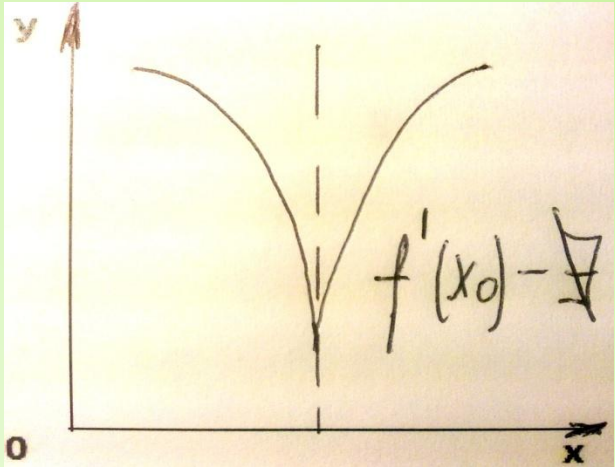
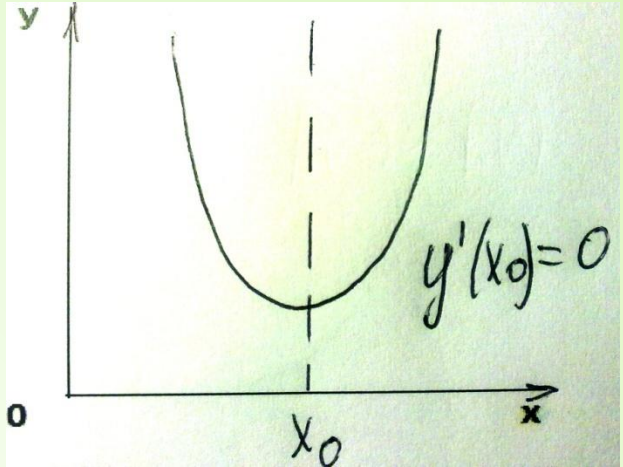
Точка x_0 –
точка максимума



$$f(x_0) = 0 \text{ (или } \infty)$$
$$f'(x) \leq 0, \quad f'(x) \geq 0$$
$$x \leq x_0, \quad x \geq x_0$$



Точка x_0 –
точка
минимума



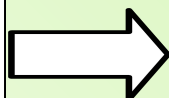
2ой достаточный признак

$$f'(x_0) = 0$$
$$f''(x_0) < 0$$

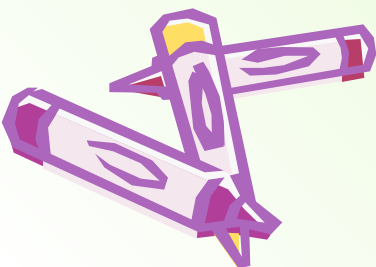
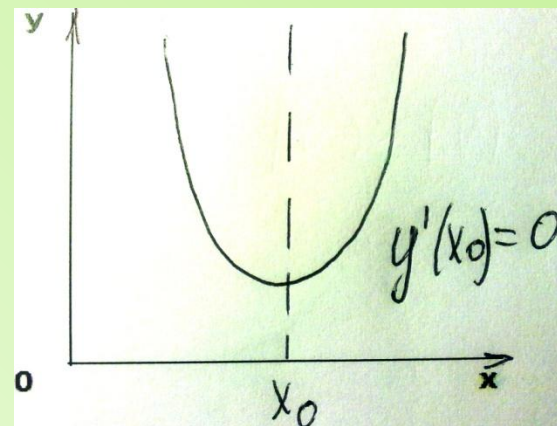
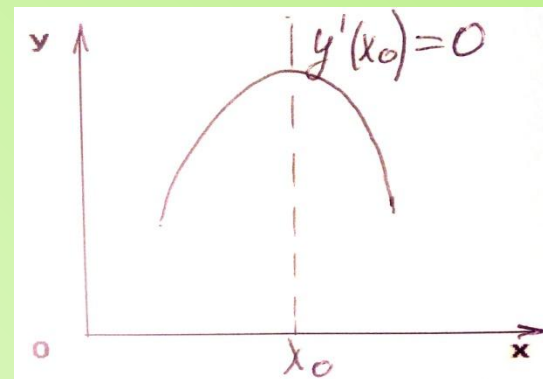


Точка x_0 –
точка
максимума

$$f'(x_0) = 0$$
$$f''(x_0) > 0$$



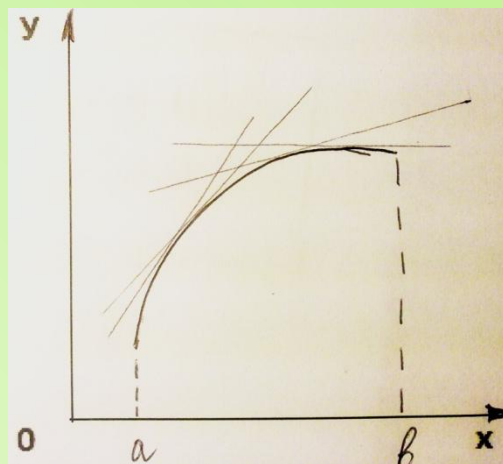
Точка x_0 –
точка
минимума



11. Выпуклость и вогнутость

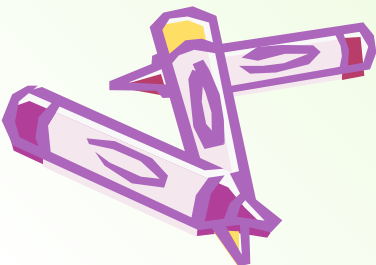
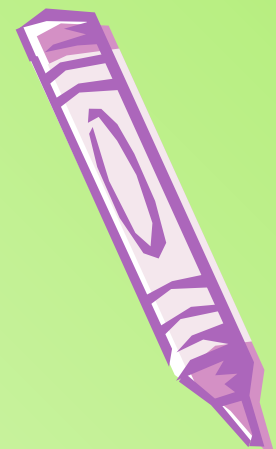
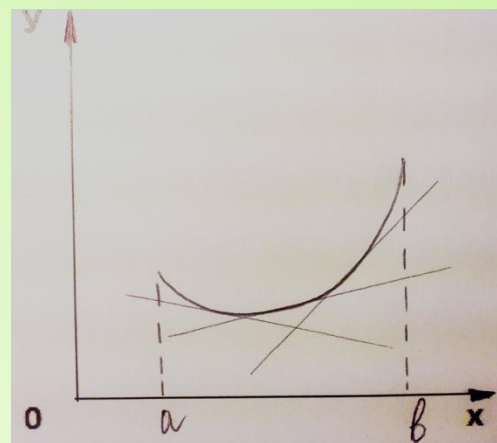
Кривая выпукла на
(a;b)

Кривая
расположена
ниже любой
своей
касательной



Кривая вогнута на
(a;b)

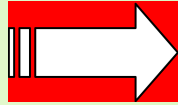
Кривая
расположена
выше любой
своей
касательной



Достаточные признаки выпуклости и вогнутости

$$f''(x) \leq 0$$

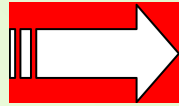
на $(a;b)$



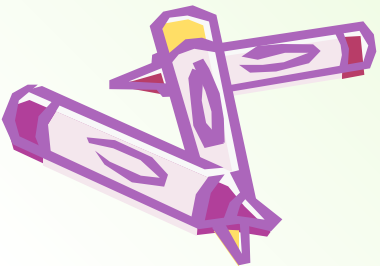
Кривая вогнута на $(a;b)$

$$f''(x) \geq 0$$

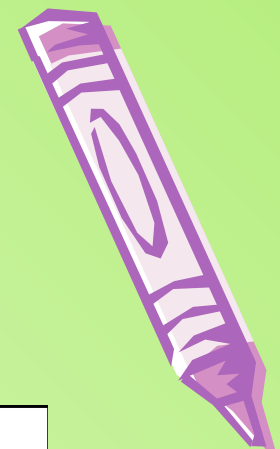
на $(a;b)$



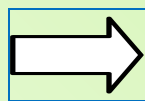
Кривая выпукла на $(a;b)$



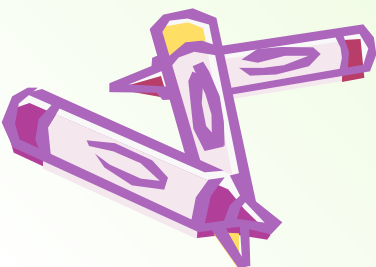
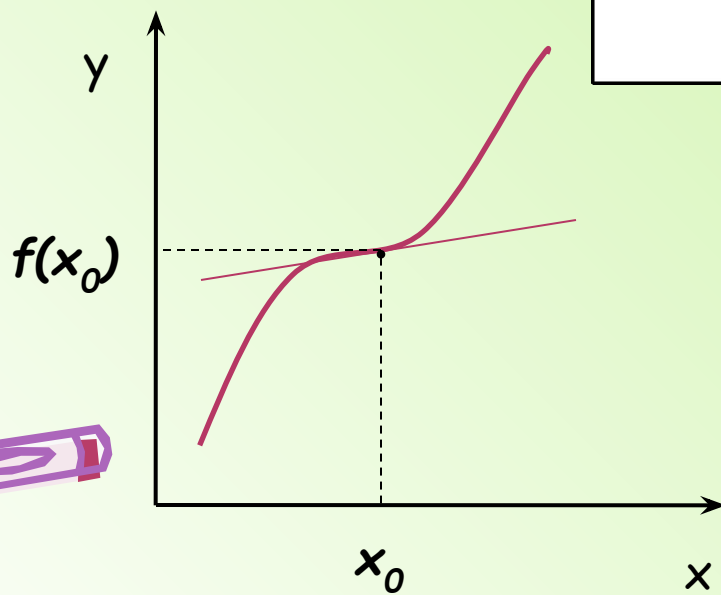
12. Точки перегиба функции



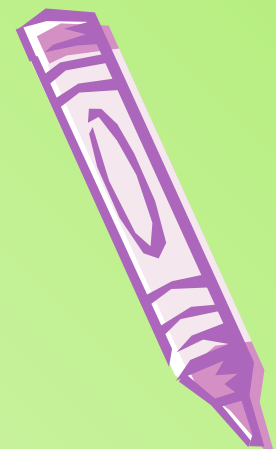
Точка перегиба
 $(x_0; f(x_0))$



В точке $(x_0; f(x_0))$
существует касательная,
при переходе через эту
точку меняется выпуклость
на вогнутость (или
наоборот)



Достаточный признак точки перегиба

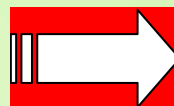


В точке $(x_0; f(x_0))$
существует касательная,

$$y''(x_0) = 0$$

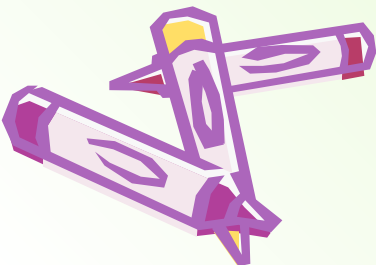
(или не существует) и при
переходе через точку x_0

y'' меняет знак



$(x_0; f(x_0))$
-точка перегиба

Для построения точки перегиба необходимо установить связь между существованием производной в точке x_0 и существованием касательной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$.

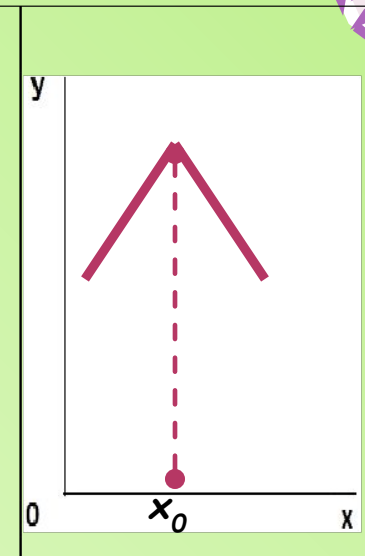
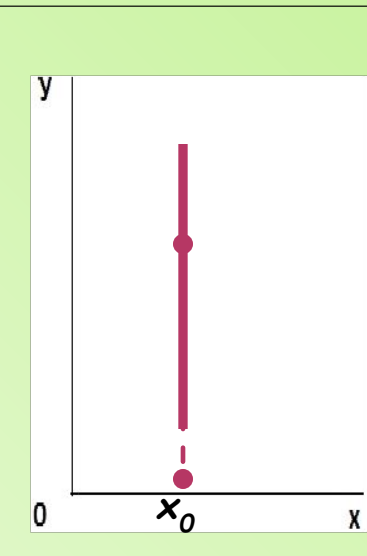
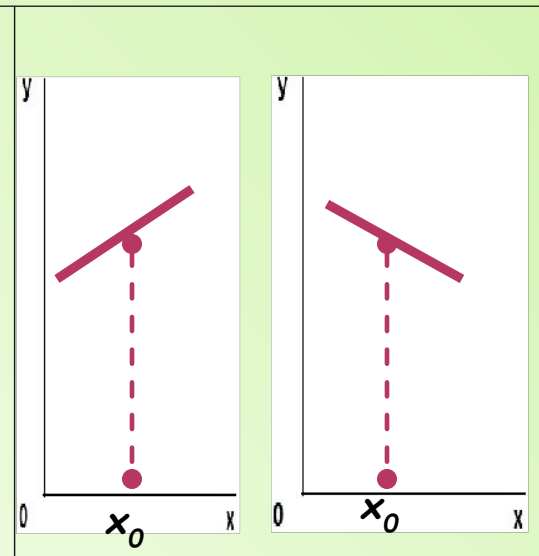
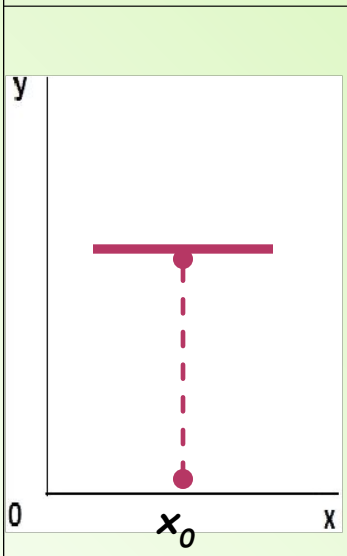


Связь между существованием производной в точке x_0 и существованием касательной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$



Производная существует

Производная не существует

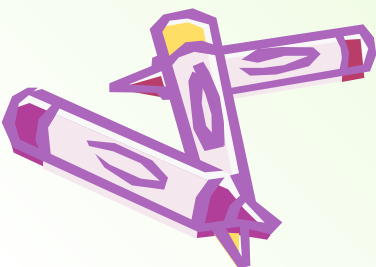


касательная горизонтальная

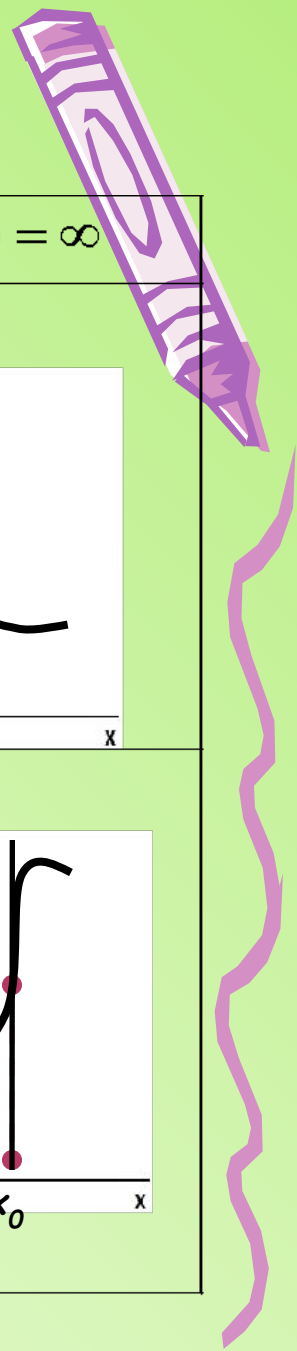
касательная наклонная

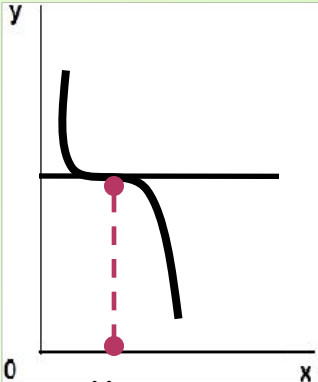
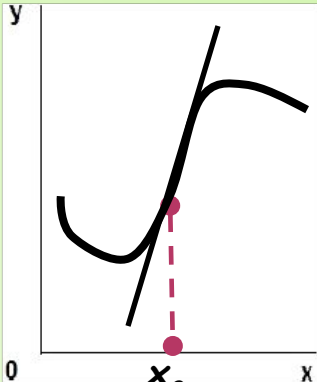
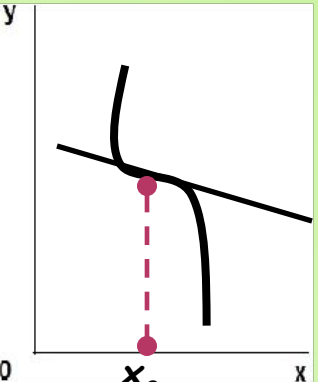
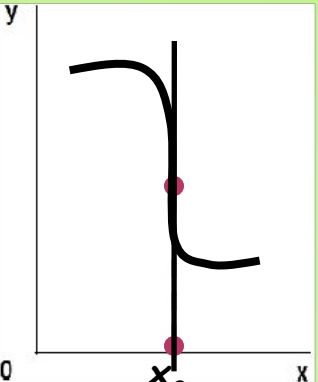
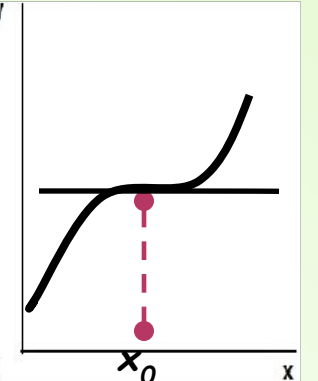
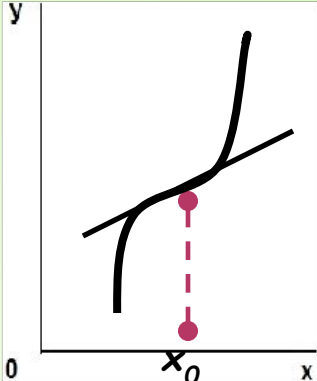
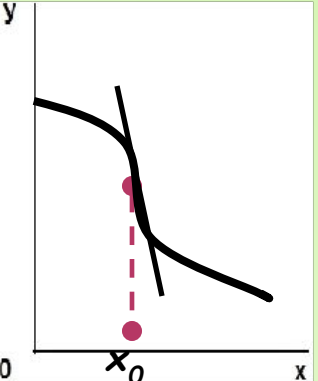
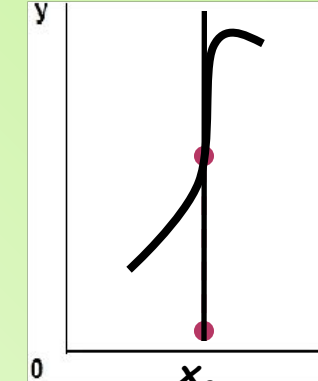
касательная вертикальная

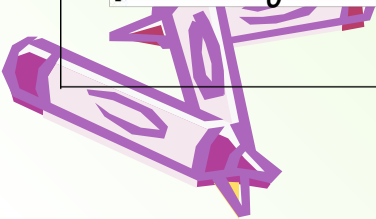
касательная не существует



Различные типы точек перегиба:



$y'(x_0) = 0$	$y'(x_0) < 0$	$y'(x_0) > 0$	$y'(x_0) = \infty$
			
			





Спасибо за внимание!

