

ПОСТРОЕНИЕ  
ГРАФИКОВ  
ФУНКЦИЙ,  
СОДЕРЖАЩИХ  
ПЕРЕМЕННУЮ ПОД  
ЗНАКОМ МОДУЛЯ

# 1. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДА $Y=|F(X)|$ .

По определению модуля, выражение  $y=|f(x)|$  равносильно системе

$$Y = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Значит, для того чтобы построить график функции  $y=|f(x)|$ , нужно построить сначала график функции  $y=f(x)$ , ту часть графика, которая расположена выше оси  $X$ , оставить без изменений, а расположенную ниже - отобразить симметрично относительно оси  $X$ .

# ПРИМЕР 1.

Построить график функции  $y = |x - 3|$ .

*Решение.* Сначала построим график функции  $y = x - 3$ :

При  $x = 0$   $y = -3$ ,

при  $x = 3$   $y = 0$  (рис. 1а).

Часть графика, расположенную ниже оси абсцисс, отобразим симметрично относительно оси  $X$ , а другую - оставим без изменений. Полученный график - искомый (рис. 1б).

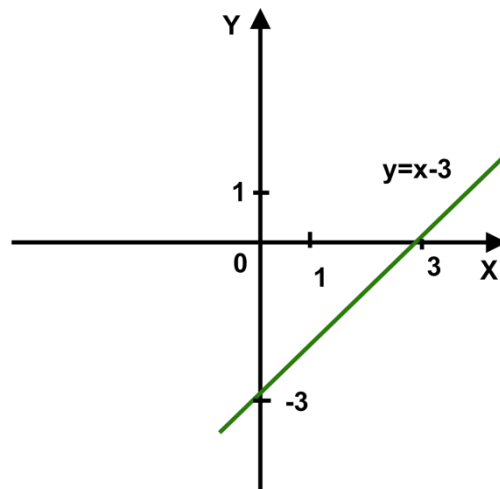


Рис. 1а

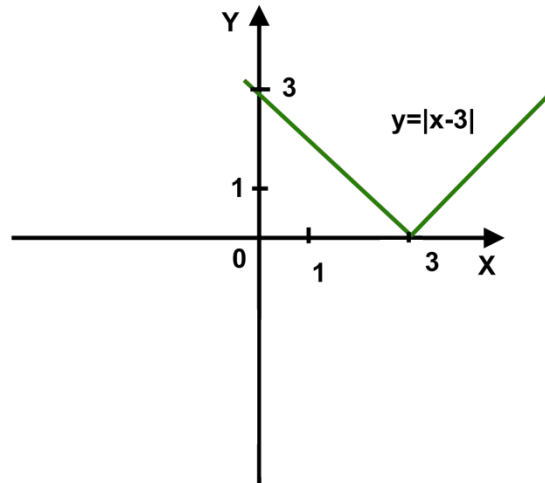


Рис. 1б

Можно поступить иначе. График функции  $y = |x - 3|$  представляет собой график функции  $y = |x|$  (рис. 1в), перенесенный на 3 единицы вправо по оси  $X$  (рис. 1г).

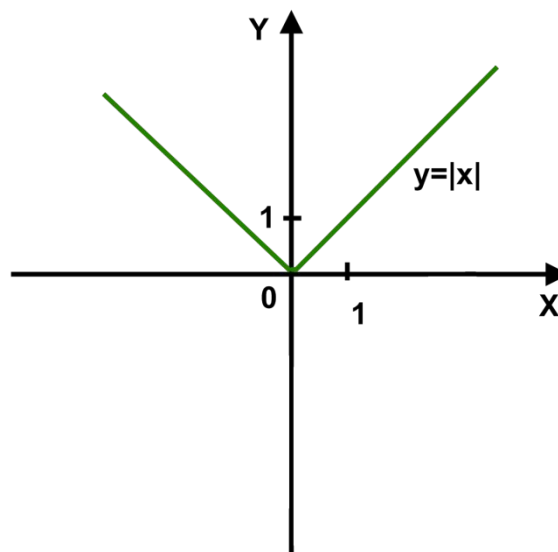


Рис. 1в

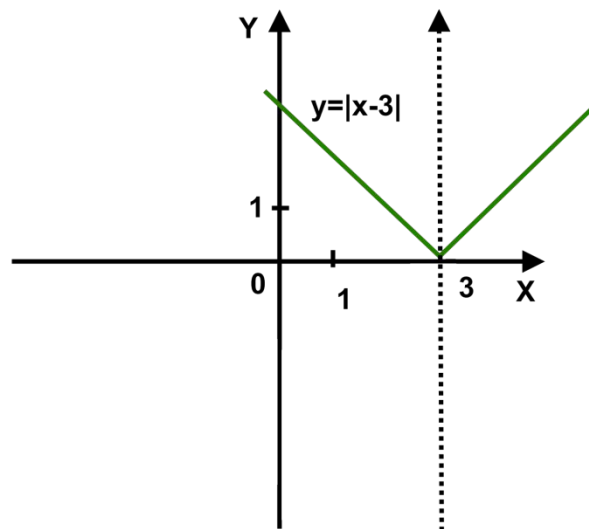


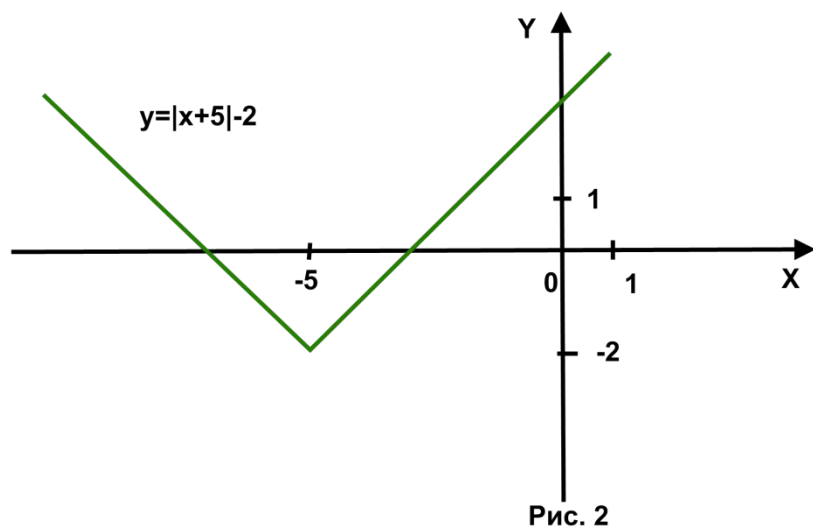
Рис. 1г

Вообще, графики функций вида  $y = |x+a| + b$  можно получить из графика функции  $y = |x|$  переносом его на  $a$  единиц по оси  $X$  вправо, если  $a < 0$ , или влево, если  $a > 0$ , и на  $b$  единиц по оси  $Y$  вверх, если  $b > 0$ , или вниз, если  $b < 0$

## ПРИМЕР 2.

Потроить график функции  $y = |x+5| - 2$

*Решение.* График функции  $y = |x+5| - 2$  можно получить из графика функции  $y = |x|$  путем переноса его на 5 единиц влево по оси  $X$  и на 2 единицы вниз по оси  $Y$  (рис.2).



## 2. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ ВИДА $y=f(|x|)$ .

По определению модуля, выражение  $y=f(|x|)$  равносильно системе

$$y = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Значит, чтобы построить график функции  $y=f(|x|)$ , нужно сначала построить график функции  $y=f(x)$ , часть графика, расположенную в правой полуплоскости (правее оси абсцисс) оставить без изменений и отобразить её симметрично оси  $Y$ , отбросив часть графика, расположенную в левой полуплоскости.

## ПРИМЕР 3.

Построить график функции  
 $y=x^2-2|x|-3$ .

*Решение.* По свойству модуля,  $x^2=|x|^2$ , значит  $y=x^2-2|x|-3$  можно представить в виде  $y=|x|^2-2|x|-3$ . Тогда для того чтобы построить график  $y=x^2-2|x|-3$  нужно построить график функции  $y=x^2-2x-3$ :

$$x_0 = -b/2a = -(-2)/2 = 1,$$
$$y_0 = y(1) = 1 - 2 - 3 = -4,$$

ось параболы  $x=1$ , её вершина имеет координаты  $(1; -4)$ ,

при  $y=0$   $x=3$  или  $x=-1$ ,

при  $x=0$   $y=-3$  (рис. 3а).

Теперь оставим без изменений часть графика, расположенную в правой полуплоскости, и отобразим её симметрично относительно оси  $Y$  (другую часть графика отбросим) (рис. 3б).

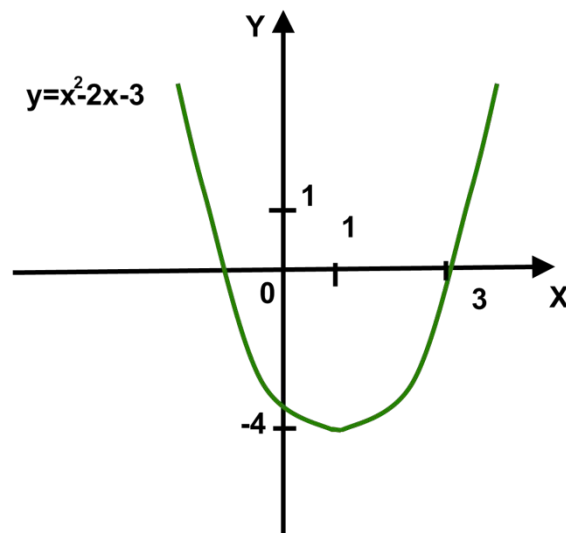


Рис. 3а

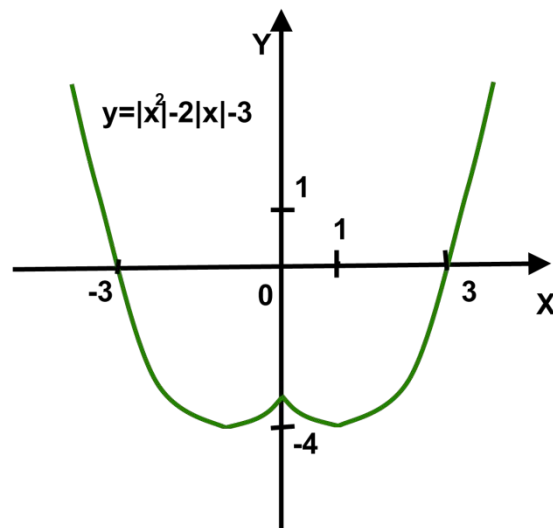


Рис. 3б



### 3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

#### ФУНКЦИИ ВИДА

$$Y = |F(X)| + |G(X)|.$$

Для построения графика функций такого вида нужно найти нули каждой функции под знаком модуля и нанести их на координатную прямую. На каждом из полученных промежутков необходимо раскрыть модули по определению, т.е. в зависимости от знака функции под модулем на данном промежутке. Затем нужно построить каждую из полученных функций  $y$  на их области определения; полученный график - искомый.

# ПРИМЕР 4.

Построить график функции  $y = |x-1| - |x+3|$ .

*Решение.* Найдем нули функций под модулем:  $f(x) = x-1=0$ , если  $x=1$ ;  $g(x) = x+3$ , если  $x=-3$ . Нанесём их на координатную прямую, они разобьют ее на три промежутка (рис.4а). На каждом из них раскроем модули, получим:

$$y = \begin{cases} 1-x+x+3, & \text{если } x < -3, \\ 1-x-x-3, & \text{если } -3 \leq x < 1, \\ x-1-x-3, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 4, & \text{если } x < -3, \\ -2x-2, & \text{если } -3 \leq x < 1, \\ -4, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

Построим график функции  $y$  (рис.4б)

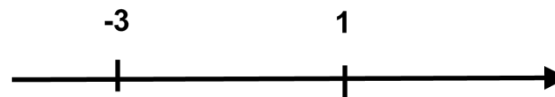


Рис. 4а

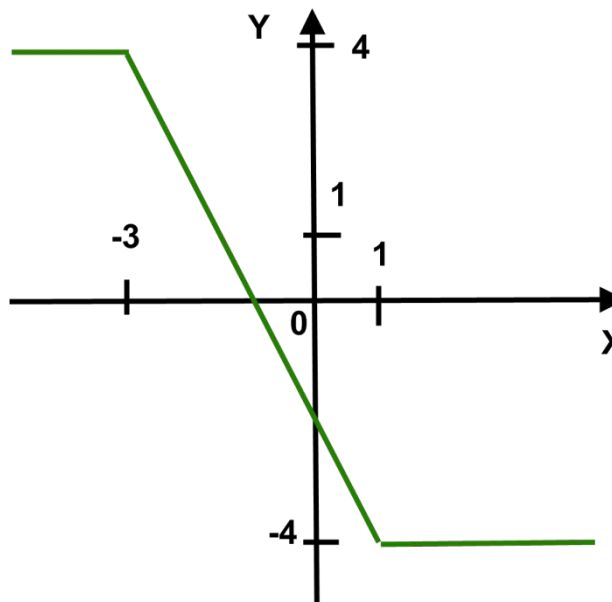


Рис. 4б

## 4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

### ФУНКЦИИ ВИДА

$$Y = || | f(x) | + A | + B |.$$

Для построения графика такой функции необходимо сначала построить график функции внутреннего модуля ( $y = |f(x)|$ ), потом преобразовать его в график  $y = ||f(x) + a|$ , затем - в график  $y = || |f(x) + a| + b|$ , т.е. последовательно раскрывать модули, начиная с внутреннего.

## ПРИМЕР 5.

Построить график функции  $y = ||x-1|-2|$ .

*Решение.* Построение графика проведем в три шага:

1. Построим график функции  $y = |x-1|$ . Его можно получить из графика функции  $y = |x|$  параллельным переносом по оси  $x$  на 1 единицу вправо (рис. 5а).

2. Построим график функции  $y = |x-1|-2$  (рис. 5б).

3. Построим график функции  $y = ||x-1|-2|$  (рис. 5в).

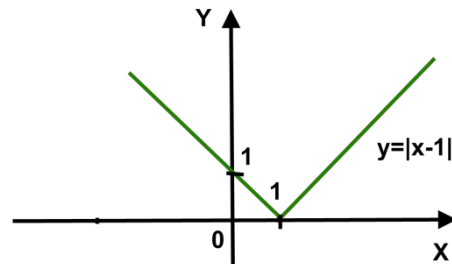


Рис. 5а

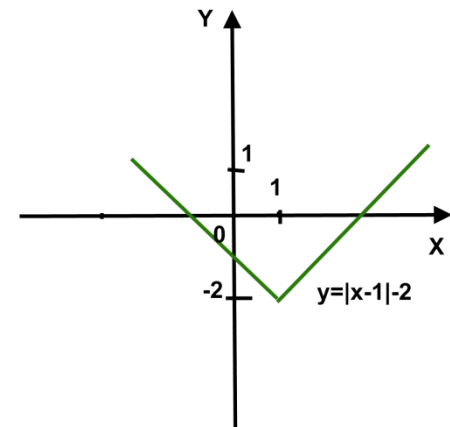


Рис. 5б

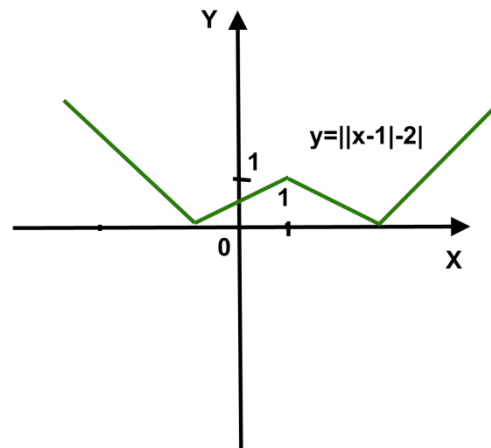


Рис. 5в

## 5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ ВИДА $y=g(x)|f(x)|$ .

**5.1. Если  $g(x)=a$ , то  $y=a|f(x)|$ .**  
Тогда график функции  $y=a|f(x)|$   
можно получить из графика  
функции  $y=|f(x)|$

его сжатием в  $a$  раз к оси  $y$ , если  
 $a>1$ ;

его растяжением в  $1/a$  раз к оси  
 $y$ , если  $1<a<0$ ;

симметрией относительно оси  $x$ ,  
если  $a<0$ .

## ПРИМЕР 6.

Построить график функции  $y = -2|x+1|$

*Решение.* Построение проведем в 3 шага:

1. Сначала построим график функции  $y = |x+1|$  (рис. 6а).

2. Построим график функции  $y = 2|x+1|$  - сжатие графика  $y = |x+1|$  в 2 раза к оси  $y$  (рис. 6б).

3. Построим график функции  $y = -2|x+1|$  - симметрия предыдущего графика относительно оси  $x$  (рис. 6в).

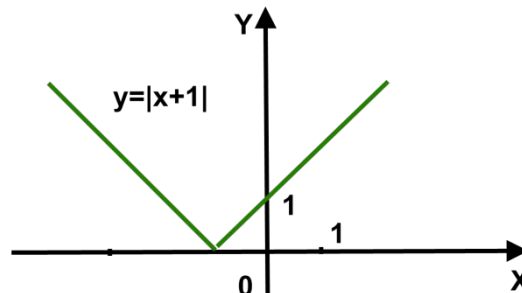


Рис. 6а

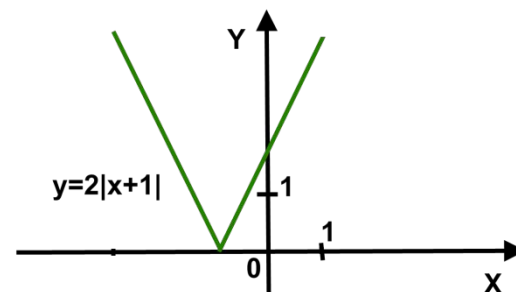


Рис. 6б

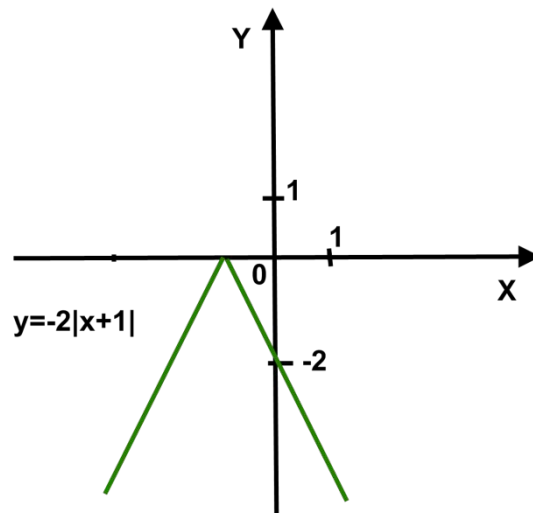


Рис. 6в

**5.2. Если  $g(x) \neq a$ , то находим нули функции под модулем и наносим их на координатную прямую. Раскрываем модуль на получившихся промежутках по определению и перемножаем функции.**

## ПРИМЕР 7.

Построить график функции  $y = |x|(x+2)$ .

*Решение.* Нуль функции  $f(x) = |x|$   $x=0$  делит координатную прямую на два промежутка -  $(-\infty; 0)$  и  $[0; +\infty)$ ; на каждом из них раскроем модуль:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{если } x \geq 0, \\ -(x^2 + 2x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Построим график функции  $y$ . (рис.7)

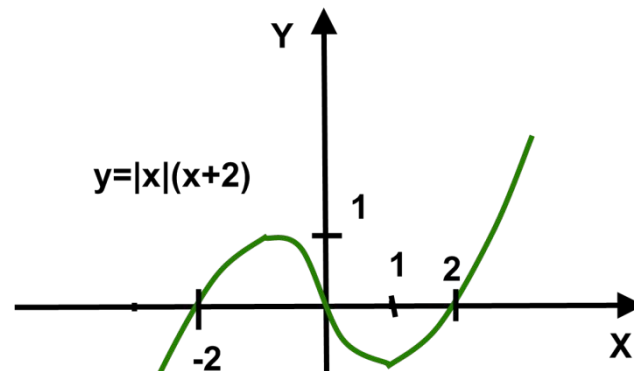


Рис. 7



## 6. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ ВИДА $|y|=f(x)$ .

По определению модуля, выражение  $|y|=f(x)$  равносильно системе

$$f(x) = \begin{cases} y, & \text{если } y \geq 0, \\ -y, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Значит, чтобы построить график функции  $|y|=f(x)$ , необходимо сначала построить график функции  $y=f(x)$ , его часть, расположенную выше оси  $X$ , оставить без изменений и, отбросив часть, расположенную ниже оси  $X$ , отобразить симметрично относительно оси  $X$ .

## ПРИМЕР 8.

Построить график функции  $|y|=x^2-1$ .

*Решение.* Сначала построим график  $y=x^2-1$  (рис. 8а).

Часть графика, расположенную выше оси  $X$ , без изменений и отобразим её симметрично относительно оси  $x$  (другую часть графика уберём). (рис. 8б)

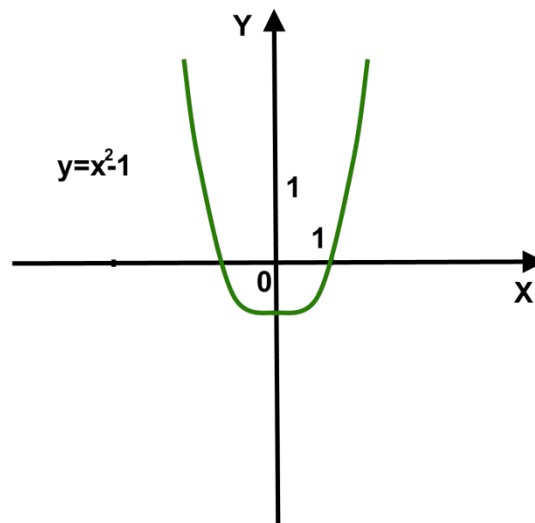


Рис. 8а

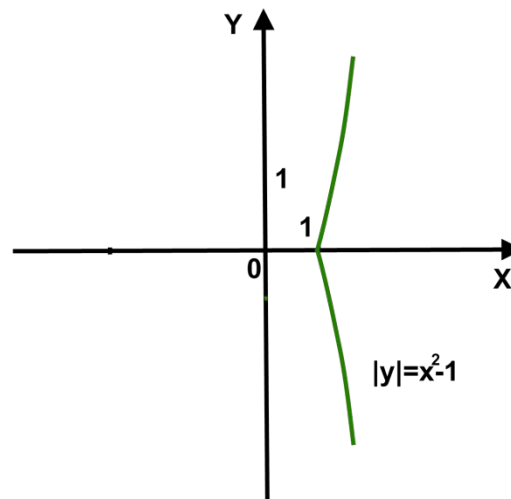


Рис. 8б

## 7. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДА $|Y|=F(|X|)$ И $|Y|=|F(X)|$ .

Для построения графиков функций такого вида нужно построить график функции  $y=f(x)$  и применить операцию модуль сначала для правой части (построить графики функций  $y=f(|x|)$  или  $y=|f(x)|$  соответственно), а потом для левой (применить операцию модуль, как описано в 6 пункте).

## ПРИМЕР 9.

Дан график функции  $y=f(x)$  (рис. 9а). Построить графики функций  $|y|=f(|x|)$  и  $|y|=|f(x)|$ .

*Решение.*

Построение  $|y|=f(|x|)$ : сначала построим график  $y=f(|x|)$  (рис. 9б), потом график функции  $|y|=f(|x|)$  (рис. 9в).

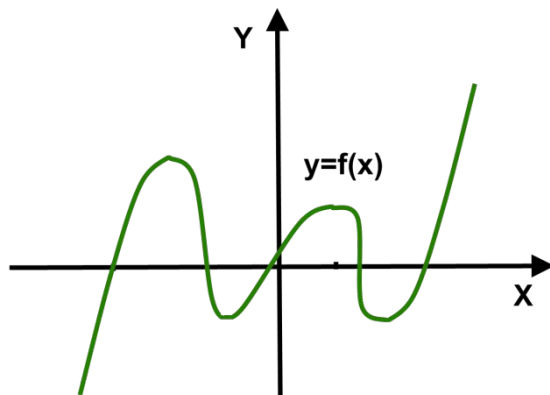


Рис. 9а

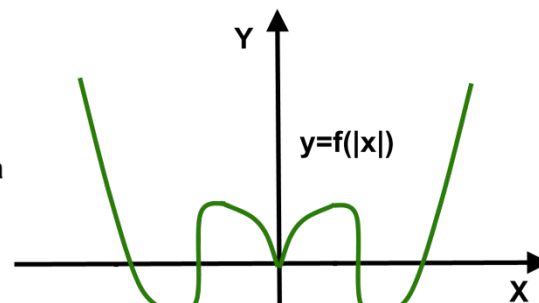


Рис. 9б

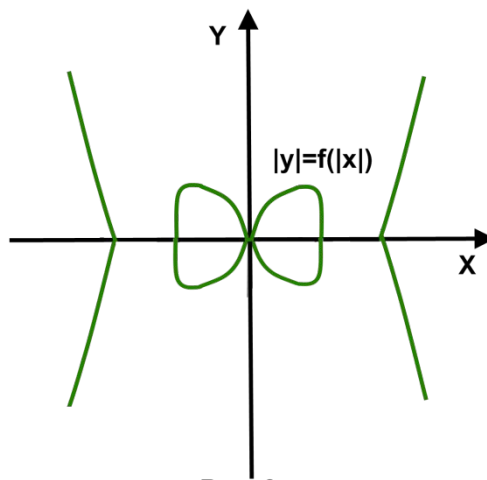


Рис. 9в

*Решение.*  
Построение  
 $|y| = |f(x)|$ : сначала  
построим график  
 $y = |f(x)|$  (рис. 9г),  
ПОТОМ  
 $|y| = |f(x)|$  (рис. 9д).

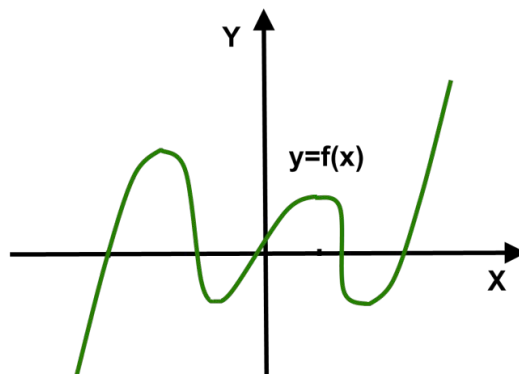


Рис. 9а

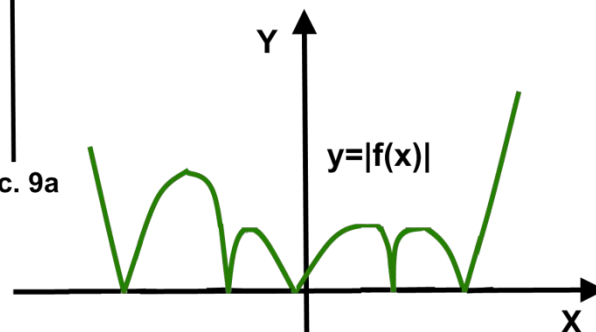


Рис. 9г

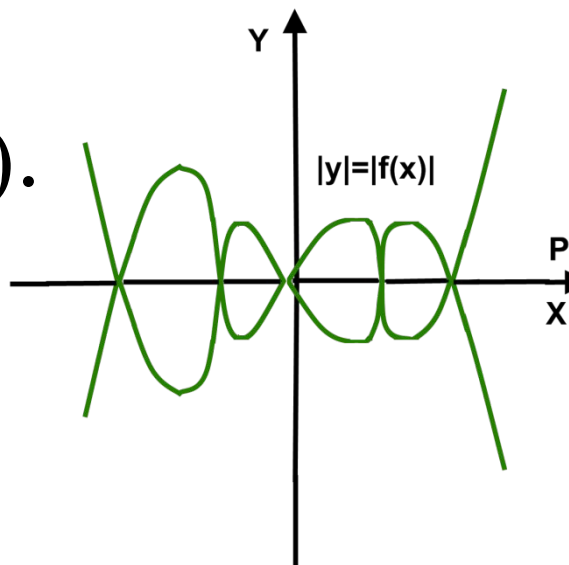


Рис. 9д