

ПОСТРОЕНИЕ
ГРАФИКОВ
ФУНКЦИЙ,
СОДЕРЖАЩИХ
ПЕРЕМЕННУЮ ПОД
ЗНАКОМ МОДУЛЯ

1. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДА $Y = |F(X)|$.

По определению модуля, выражение $y = |f(x)|$ равносильно системе

$$Y = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Значит, для того чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, нужно построить сначала график функции $y = f(x)$, ту часть графика, которая расположена выше оси X , оставить без изменений, а расположенную ниже - отобразить симметрично относительно оси X .

ПРИМЕР 1.

Построить график функции $y = |x - 3|$.

Решение. Сначала построим график функции $y = x - 3$:

При $x = 0$ $y = -3$,

при $x = 3$ $y = 0$ (рис. 1а).

Часть графика, расположенную ниже оси абсцисс, отобразим симметрично относительно оси X , а другую - оставим без изменений. Полученный график - искомый (рис. 1б).

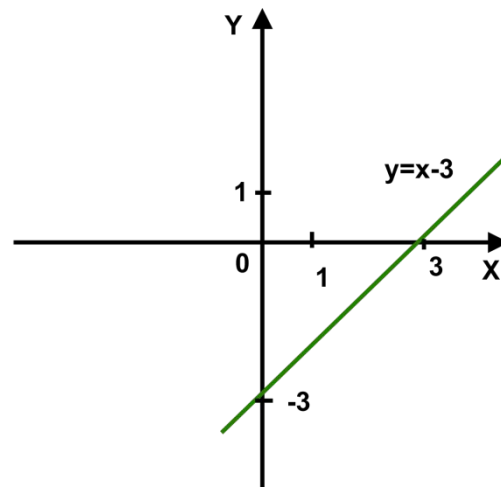


Рис. 1а

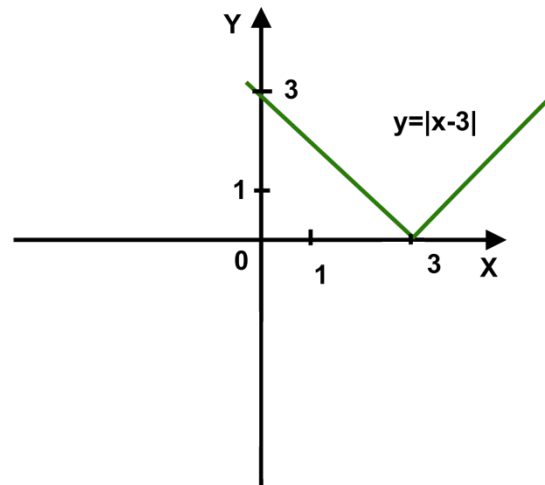


Рис. 1б

Можно поступить иначе. График функции $y = |x - 3|$ представляет собой график функции $y = |x|$ (рис. 1в), перенесенный на 3 единицы вправо по оси X (рис. 1г).

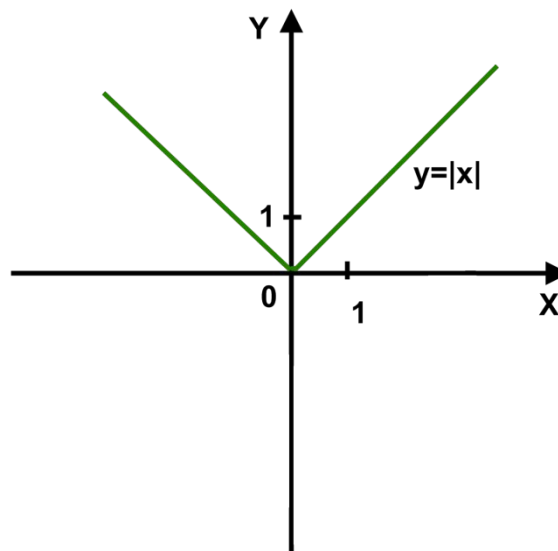


Рис. 1в

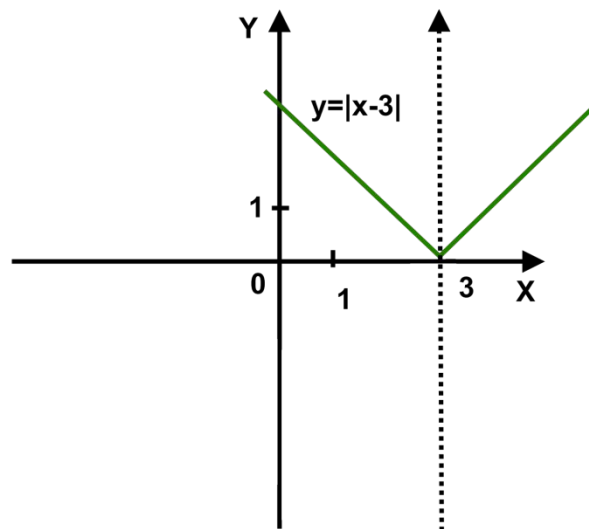


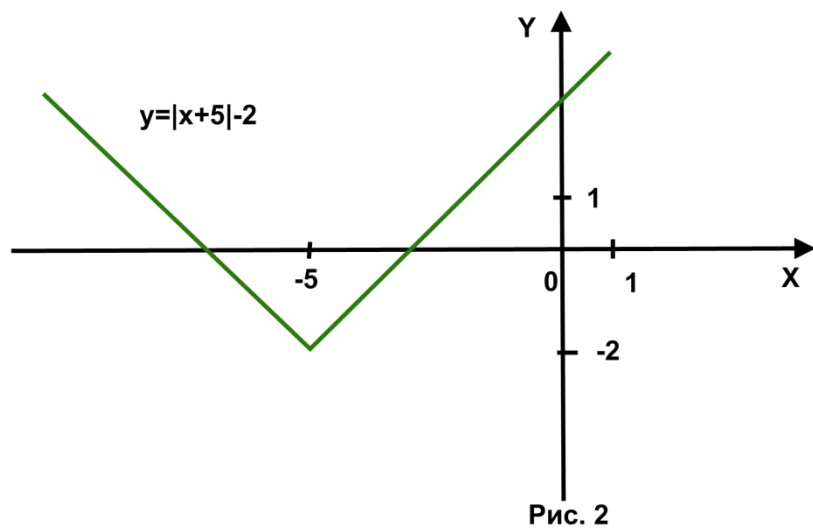
Рис. 1г

Вообще, графики функций вида $y = |x+a| + b$ можно получить из графика функции $y = |x|$ переносом его на a единиц по оси X вправо, если $a < 0$, или влево, если $a > 0$, и на b единиц по оси Y вверх, если $b > 0$, или вниз, если $b < 0$

ПРИМЕР 2.

Потроить график функции $y=|x+5|-2$

Решение. График функции $y=|x+5|-2$ можно получить из графика функции $y=|x|$ путем переноса его на 5 единиц влево по оси X и на 2 единицы вниз по оси Y (рис.2).



2. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ ВИДА $y=f(|x|)$.

По определению модуля, выражение $y=f(|x|)$ равносильно системе

$$y = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Значит, чтобы построить график функции $y=f(|x|)$, нужно сначала построить график функции $y=f(x)$, часть графика, расположенную в правой полуплоскости (правее оси абсцисс) оставить без изменений и отобразить её симметрично оси Y , отбросив часть графика, расположенную в левой полуплоскости.

ПРИМЕР 3.

Построить график функции
 $y=x^2-2|x|-3$.

Решение. По свойству модуля, $x^2=|x|^2$, значит $y=x^2-2|x|-3$ можно представить в виде $y=|x|^2-2|x|-3$. Тогда для того чтобы построить график $y=x^2-2|x|-3$ нужно построить график функции $y=x^2-2x-3$:

$$x_0 = -b/2a = -(-2)/2 = 1,$$
$$y_0 = y(1) = 1 - 2 - 3 = -4,$$

ось параболы $x=1$, её вершина имеет координаты $(1; -4)$,

при $y=0$ $x=3$ или $x=-1$,

при $x=0$ $y=-3$ (рис. 3а).

Теперь оставим без изменений часть графика, расположенную в правой полуплоскости, и отобразим её симметрично относительно оси Y (другую часть графика отбросим) (рис. 3б).

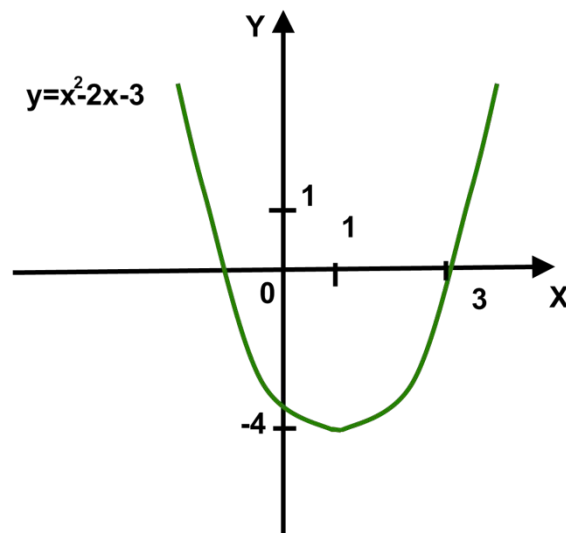


Рис. 3а

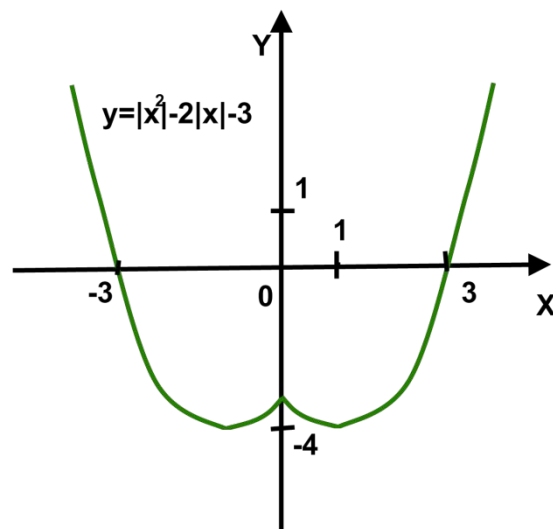


Рис. 3б

3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

ФУНКЦИИ ВИДА

$$Y = |F(X)| + |G(X)|.$$

Для построения графика функций такого вида нужно найти нули каждой функции под знаком модуля и нанести их на координатную прямую. На каждом из полученных промежутков необходимо раскрыть модули по определению, т.е. в зависимости от знака функции под модулем на данном промежутке. Затем нужно построить каждую из полученных функций y на их области определения; полученный график - искомый.

ПРИМЕР 4.

Построить график функции $y = |x-1| - |x+3|$.

Решение. Найдем нули функций под модулем: $f(x) = x-1=0$, если $x=1$; $g(x) = x+3$, если $x=-3$. Нанесём их на координатную прямую, они разобьют ее на три промежутка (рис.4а). На каждом из них раскроем модули, получим:

$$y = \begin{cases} 1-x+x+3, & \text{если } x < -3, \\ 1-x-x-3, & \text{если } -3 \leq x < 1, \\ x-1-x-3, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 4, & \text{если } x < -3, \\ -2x-2, & \text{если } -3 \leq x < 1, \\ -4, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

Построим график функции y (рис.4б)

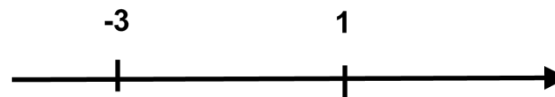


Рис. 4а

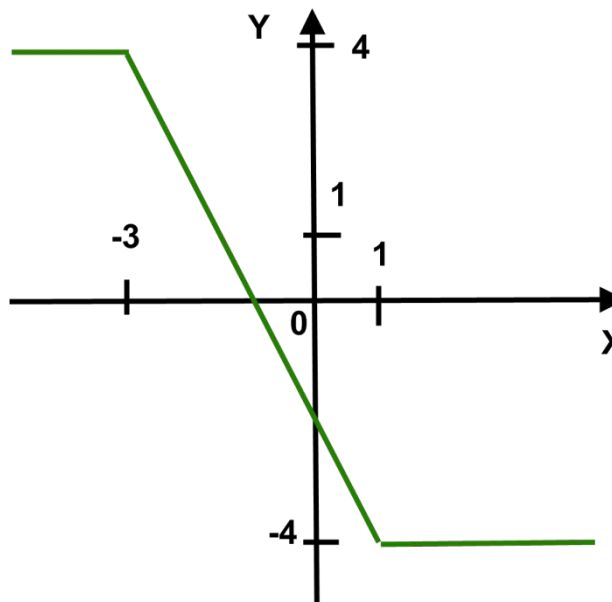


Рис. 4б

4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

ФУНКЦИИ ВИДА

$$Y = || | f(x) | + A | + B |.$$

Для построения графика такой функции необходимо сначала построить график функции внутреннего модуля ($y = |f(x)|$), потом преобразовать его в график $y = ||f(x) + a|$, затем - в график $y = || |f(x) + a| + b|$, т.е. последовательно раскрывать модули, начиная с внутреннего.

ПРИМЕР 5.

Построить график функции $y = ||x-1|-2|$.

Решение. Построение графика проведем в три шага:

1. Построим график функции $y = |x-1|$. Его можно получить из графика функции $y = |x|$ параллельным переносом по оси x на 1 единицу вправо (рис. 5а).

2. Построим график функции $y = |x-1|-2$ (рис. 5б).

3. Построим график функции $y = ||x-1|-2|$ (рис. 5в).

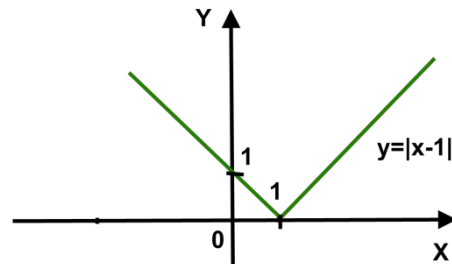


Рис. 5а

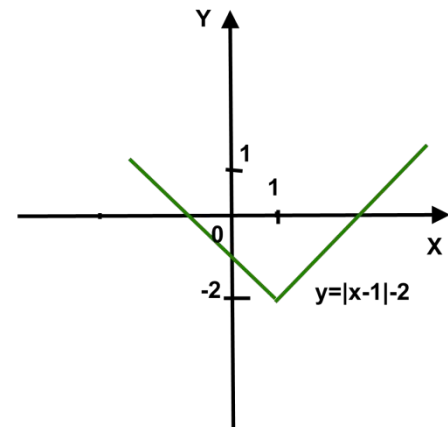


Рис. 5б

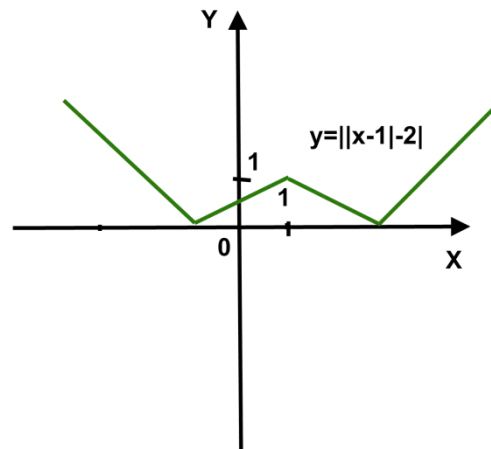


Рис. 5в

5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ ВИДА $y=g(x)|f(x)|$.

5.1. Если $g(x)=a$, то $y=a|f(x)|$.
Тогда график функции $y=a|f(x)|$
можно получить из графика
функции $y=|f(x)|$

его сжатием в a раз к оси y , если
 $a>1$;

его растяжением в $1/a$ раз к оси
 y , если $1<a<0$;

симметрией относительно оси x ,
если $a<0$.

ПРИМЕР 6.

Построить график функции $y = -2|x+1|$

Решение. Построение проведем в 3 шага:

1. Сначала построим график функции $y = |x+1|$ (рис. 6а).

2. Построим график функции $y = 2|x+1|$ - сжатие графика $y = |x+1|$ в 2 раза к оси y (рис. 6б).

3. Построим график функции $y = -2|x+1|$ - симметрия предыдущего графика относительно оси x (рис. 6в).

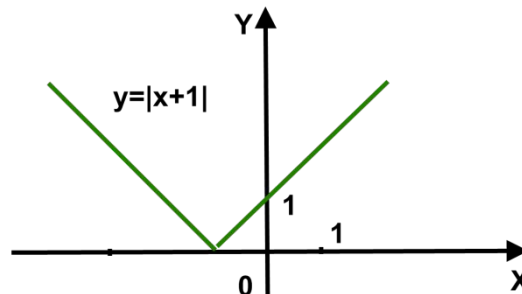


Рис. 6а

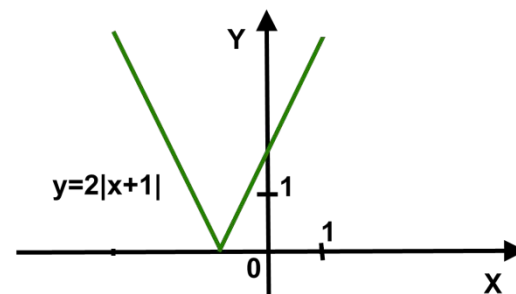


Рис. 6б

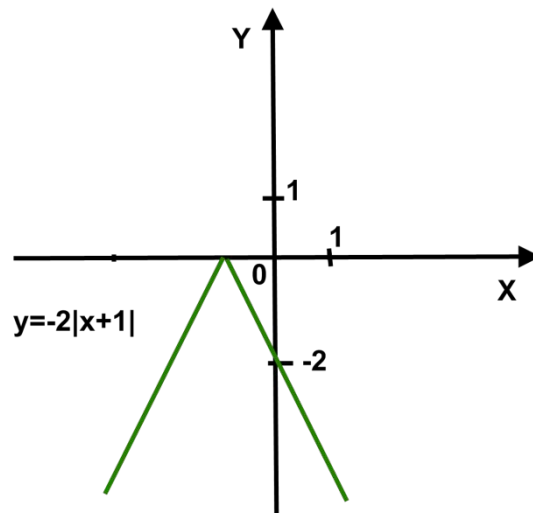


Рис. 6в

5.2. Если $g(x) \neq a$, то находим нули функции под модулем и наносим их на координатную прямую. Раскрываем модуль на получившихся промежутках по определению и перемножаем функции.

ПРИМЕР 7.

Построить график функции $y = |x|(x+2)$.

Решение. Нуль функции $f(x) = |x|$ $x=0$ делит координатную прямую на два промежутка - $(-\infty; 0)$ и $[0; +\infty)$; на каждом из них раскроем модуль:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{если } x \geq 0, \\ -(x^2 + 2x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Построим график функции y . (рис.7)

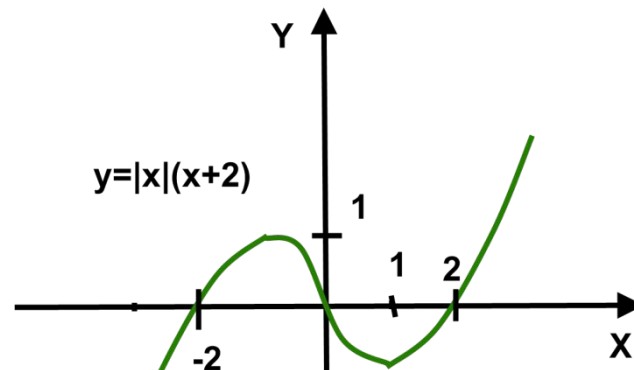


Рис. 7

6. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ ВИДА $|y|=f(x)$.

По определению модуля, выражение $|y|=f(x)$ равносильно системе

$$f(x) = \begin{cases} y, & \text{если } y \geq 0, \\ -y, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Значит, чтобы построить график функции $|y|=f(x)$, необходимо сначала построить график функции $y=f(x)$, его часть, расположенную выше оси X , оставить без изменений и, отбросив часть, расположенную ниже оси X , отобразить симметрично относительно оси X .

ПРИМЕР 8.

Построить график функции $|y|=x^2-1$.

Решение. Сначала построим график $y=x^2-1$ (рис. 8а).

Часть графика, расположенную выше оси X , без изменений и отобразим её симметрично относительно оси x (другую часть графика уберём). (рис. 8б)

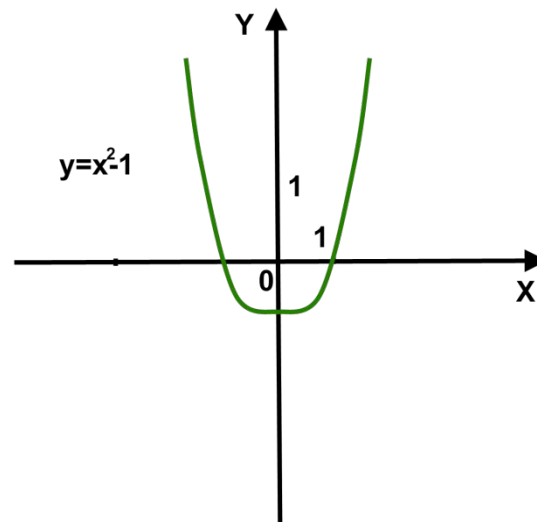


Рис. 8а

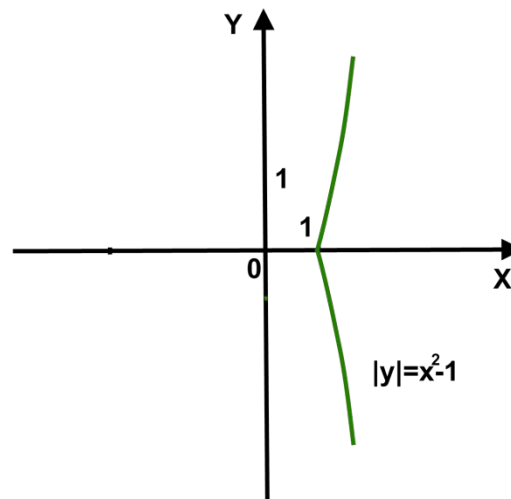


Рис. 8б

7. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДА $|Y|=F(|X|)$ И $|Y|=|F(X)|$.

Для построения графиков функций такого вида нужно построить график функции $y=f(x)$ и применить операцию модуль сначала для правой части (построить графики функций $y=f(|x|)$ или $y=|f(x)|$ соответственно), а потом для левой (применить операцию модуль, как описано в 6 пункте).

ПРИМЕР 9.

Дан график функции $y=f(x)$ (рис. 9а). Построить графики функций $|y|=f(|x|)$ и $|y|=|f(x)|$.

Решение.

Построение $|y|=f(|x|)$: сначала построим график $y=f(|x|)$ (рис. 9б), потом график функции $|y|=f(|x|)$ (рис. 9в).

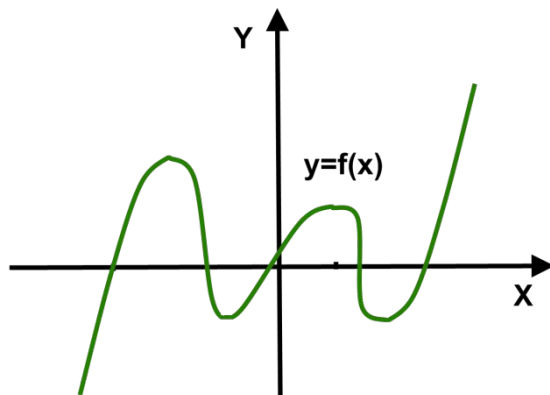


Рис. 9а

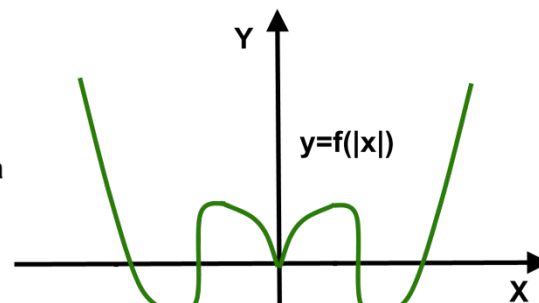


Рис. 9б

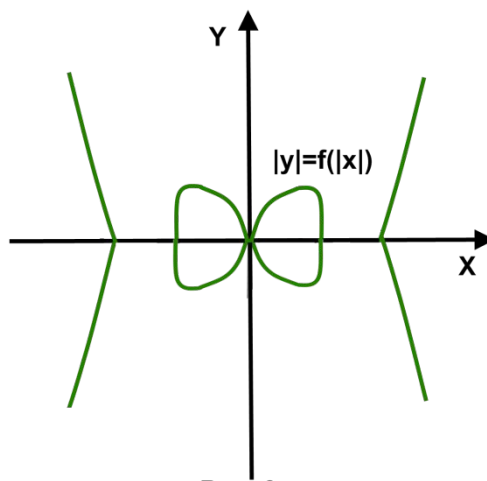


Рис. 9в

Решение.
Построение
 $|y| = |f(x)|$: сначала
построим график
 $y = |f(x)|$ (рис. 9г),
ПОТОМ
 $|y| = |f(x)|$ (рис. 9д).

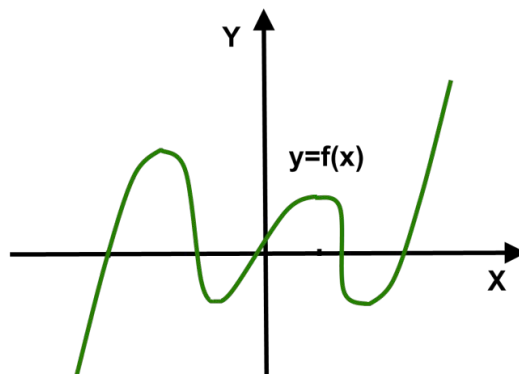


Рис. 9а

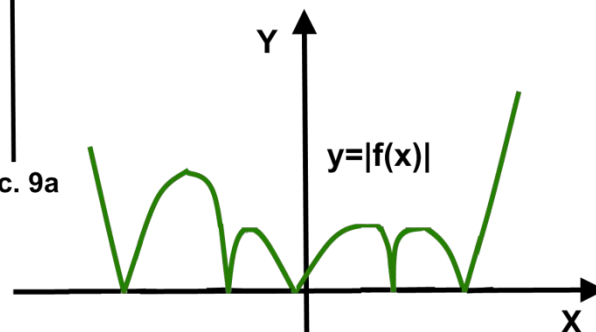


Рис. 9г

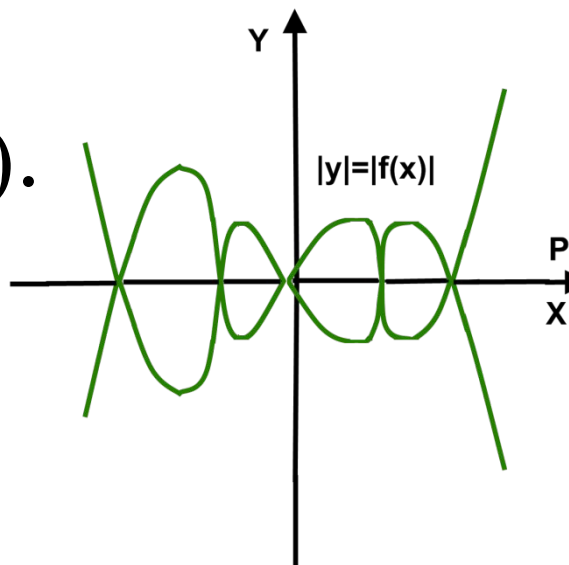


Рис. 9д