ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

1. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДА Y=|F(X)|.

По определению модуля, выражение y=|f(x)| равносильно системе

$$Y=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x)<0. \end{cases}$$

Значит, для того чтобы построить график функции y=|f(x)|, нужно построить сначала график функции y=f(x), ту часть графика, которая расположена выше оси X, оставить без изменений, а расположенную ниже - отобразить симметрично относительно оси X.

ПРИМЕР 1.

Построить график функции $y=|x-3|$.

Решение. Сначала построим график функции $y=x-3$:

При х=о у=-3,

при $x=3$ $y=0$(рис.1а).

Часть графика, расположенную ниже оси абсцисс, отобразим симметрично относительно оси X, а другую - оставим без изменений. Полученный график -искомый (рис.1б).

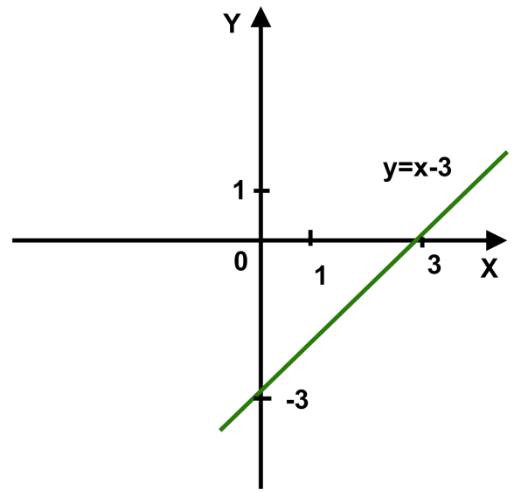

Рис. 1а

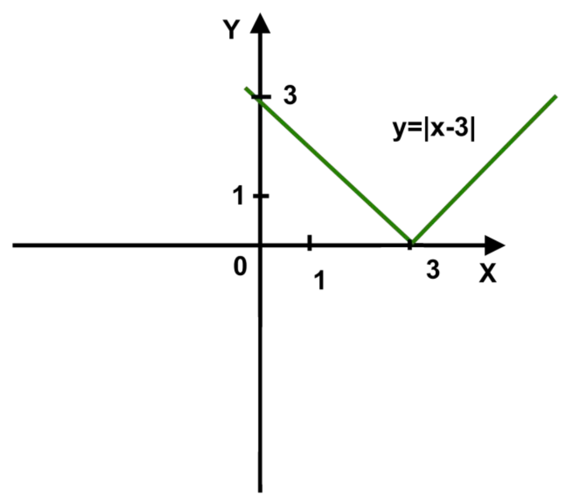

Рис. 1б

Можно поступить иначе. График функции y=|x-3| представляет собой график функции y=|x|(рис.1в), перенесенный на 3 единицы вправо по оси X(рис.1г).

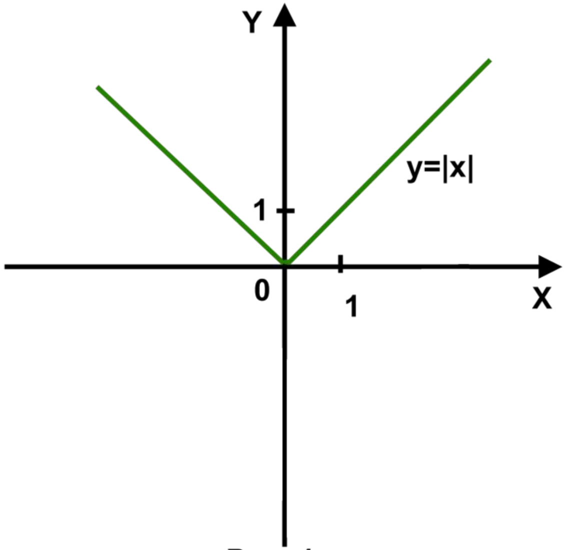

Рис. 1в

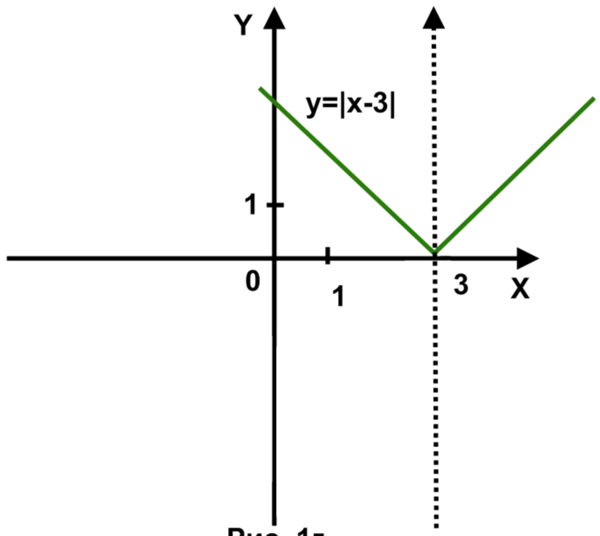

Рис. 1г

Вообще, графики функций вида $y=|x+a|+b$ можно получить из графика функции $y=|x|$ переносом его на a единиц по оси X вправо, если $a<0$, или влево, если $a>0$, и на b единиц по оси У вверх, если $b>0$, или вниз, если $b<0$

ПРИМЕР 2.

Потроить график функции у=|х+5|-2

Решение.График функции у=|х+5|-2 можно получить из графика функции у=|х| путем переноса его на 5 единиц влево по оси Х и на 2 единицы вниз по оси У (рис.2).

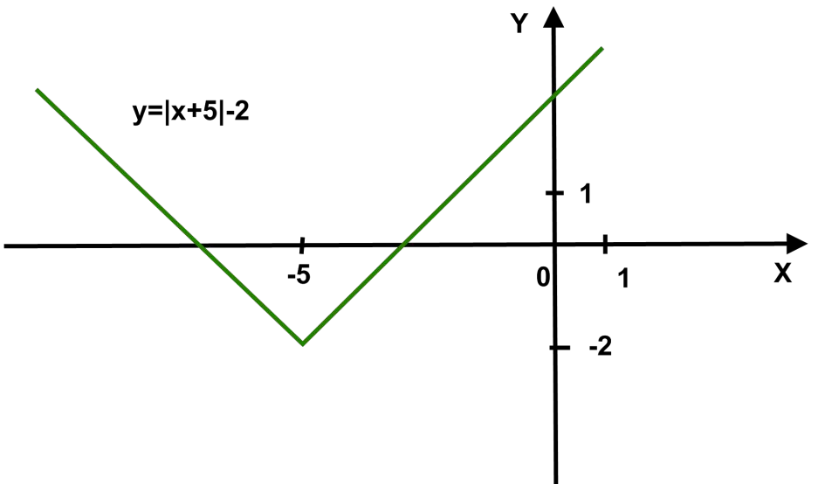

Рис. 2

2. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ ВИДА Y=F(|X|).

По определению модуля, выражение y=f(|x|) равносильно системе

$$y=\begin{cases} f(x), \text{ если } x\geq 0, \\ f(-x), \text{ если } x<0. \end{cases}$$

Значит, чтобы построить график функции y=f(|x|), нужно сначала построить график функции y=f(|x|), часть графика, расположенную в правой полуплоскости (правее оси абсцисс) оставить без изменений и отобразить её симметрично оси У, отбросив часть графика, расположенную в левой полуплоскости.

ПРИМЕР 3.

Построить график функции

$y=x^2-2|x|-3$.

Решение. По свойству модуля, $x^2=|x|^2$, значит $y=x^2-2|x|-3$ можно представить в виде $y=|x|^2-2|x|-3$. Тогда для того чтобы построить график $y=x^2-2|x|-3$ нужно построить график функции $y=x^2-2x-3$:

$x_0=-b/2a=-(-2)/2=1$, $y_0=y(1)=1-2-3=-4$,

ось параболы $x=1$, её вершина имеет координаты $(1;-4)$,

при $y=0$ $x=3$ или $x=-1$,

при $x=0$ $y=-3$(рис.3а).

Теперь оставим без изменений часть графика, расположенную в правой полуплоскости, и отобразим её симметрично относительно оси У (другую часть графика отбросим)(рис.3б).

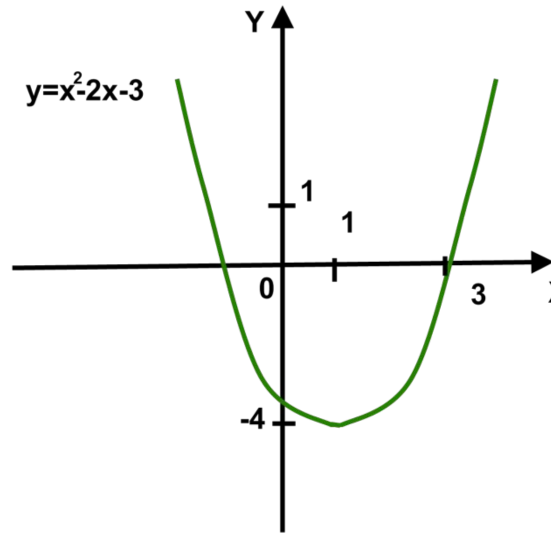

Рис. 3а

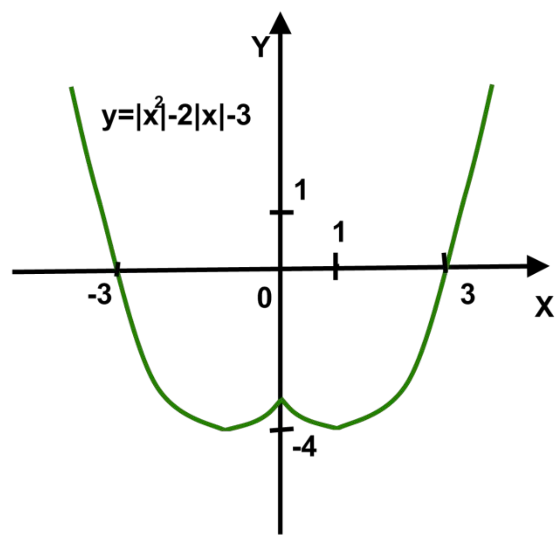

Рис. 3б

3. Построение графика функции вида y=|f(x)|+|g(x)|.

Для построения графика функций такого вида нужно найти нули каждой функции под знаком модуля и нанести их на координатную прямую. На каждом из полученных промежутков необходимо раскрыть модули по определению, т.е. в зависимости от знака функции под модулем на данном промежутке. Затем нужно построить каждую из полученных функций y на их области определения; полученный график - искомый.

ПРИМЕР 4.

Построить график функции y=|x-1|-|x+3|.

Решение. Найдем нули функций под модулем: f(x)=x-1=0, если x=1; g(x)=x+3, если x=-3. Нанесём их на координатную прямую, они разобьют ее на три промежутка (рис.4а). На каждом из них раскроем модули, получим:

$$y=\begin{cases} 1-x+x+3, \text{ если } x<-3, \\ 1-x-x-3, \text{ если } -3\le x<1, \\ x-1-x-3, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$$

$$У=\begin{cases} 4, \text{ если } x<-3, \\ -2x-2, \text{ если } -3\le x<1, \\ -4, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$$

Построим график функции у (рис.4б)

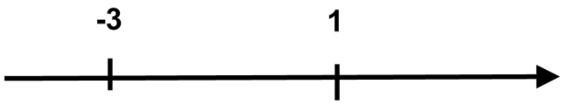

Рис. 4а

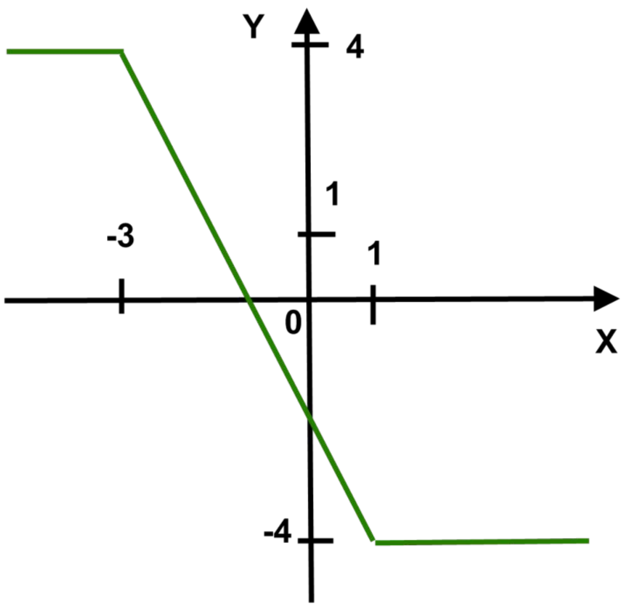

Рис. 4б

4.Построение графика функции вида y=|||f(x)|+a|+b|.

Для построения графика такой функции необходимо сначала построить график функции внутреннего модуля($y=|f(x)|$), потом преобразовать его в график $y=||f(x)|+a|$, затем - в график $y=|||f(x)|+a|+b|$, т.е. последовательно раскрывать модули, начиная с внутреннего.

ПРИМЕР 5.

Построить график функции y=||x-1|-2|.

Решение. Построение графика проведем в три шага:

1.Построим график функции y=|x-1|. Его можно получить из графика функции y=|x| параллельным переносом по оси x на 1 единицу вправо(рис.5а).

2.Построим график функции y=|x-1|-2(рис.5б).

3.Построим график функции y=||x-1|-2|(рис.5в).

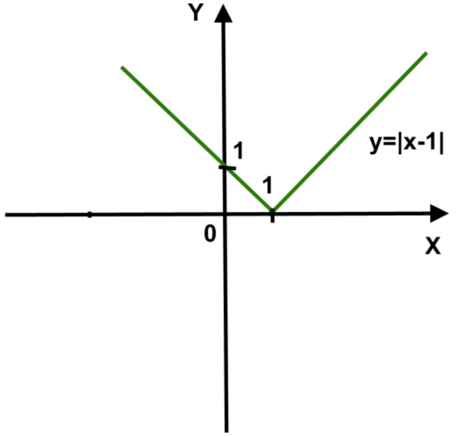

Рис. 5а

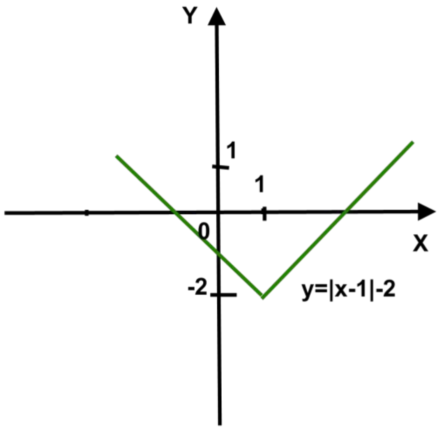

Рис. 5б

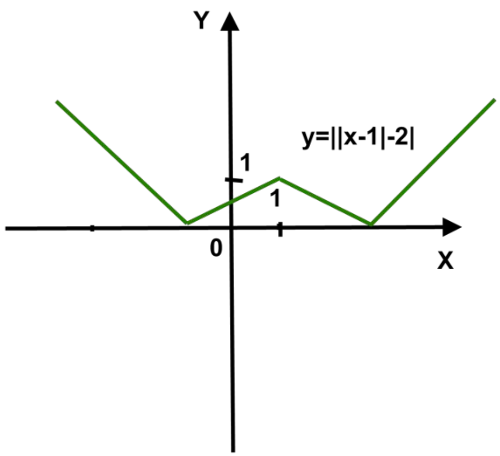

Рис. 5в

5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ ВИДА Y=G(X)|F(X)|.

5.1.Если $g(X)=a$, то $y=a|f(x)|$. Тогда график функции $y=a|f(x)|$ можно получить из графика функции $y=|f(x)|$

его сжатием в a раз к оси y, если $a>1$;

его растяжением в 1/a раз к оси y, если $1<a<0$;

симметрией относительно оси x, если $a<0$.

ПРИМЕР 6.

Построить график функции y=-2|x+1|

Решение. Построение проведем в 3 шага:

1.Сначала построим график функции y=|x+1|(рис.6а).

2.Построим график функции y=2|x+1| - сжатие графика y=|x+1| в 2 раза к оси y(рис.6б).

3.Построим график функции y=-2|x+1| - симметрия предыдущего графика относительно оси x(рис.6в).

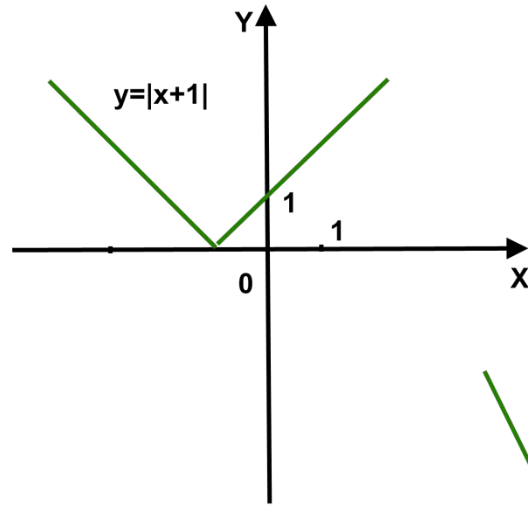

Рис. 6а

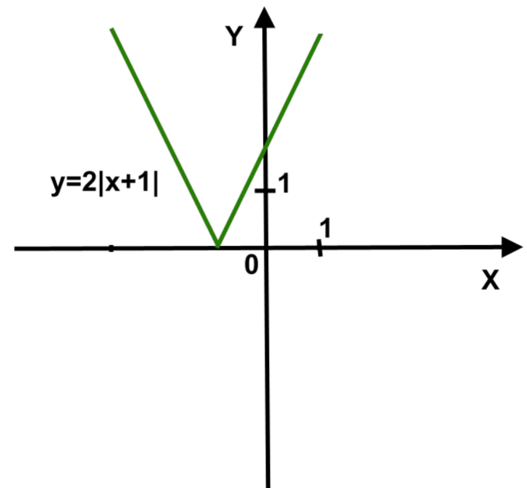

Рис. 6б

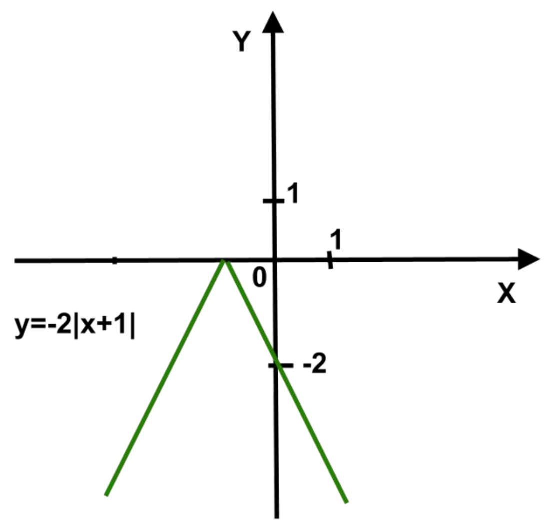

Рис. 6в

5.2.Если $g(x) \neq a$, то находим нули функции под модулем и наносим их на координатную прямую. Раскрываем модуль на получившихся промежутках по определению и перемножаем функции.

Пример 7.

Построить график функции y=|x|(x+2).

Решение. Нуль функции f(x)=|x| x=0 делит координатную прямую на два промежутка - (-∝;0) и [0;+∝); на каждом из них раскроем модуль:

$$y=\begin{cases} x^2+2x, & \text{если } x\geq 0,\\ -(x^2+2x), & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Построим график функции y.(рис.7)

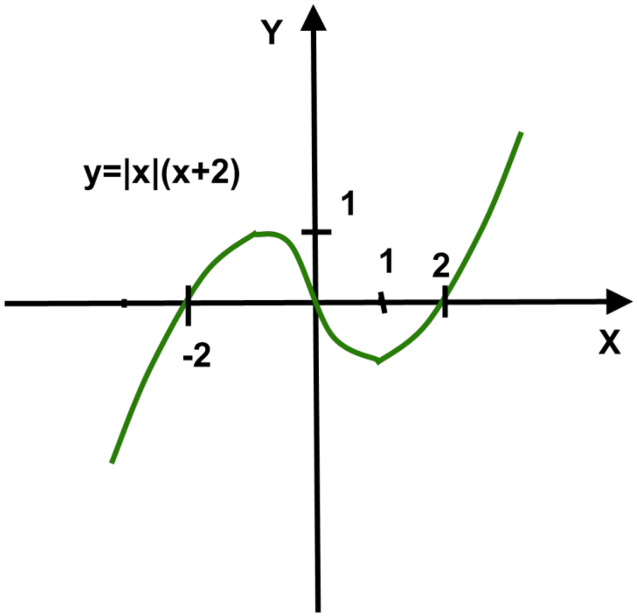

Рис. 7

6. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ ВИДА |Y|=F(X).

По определению модуля, выражение $|y|=f(x)$ равносильно системе

$$f(x)=\begin{cases} y, & \text{если } y\geq 0, \\ -y, & \text{если } y<0. \end{cases}$$

Значит, чтобы построить график функции $|y|=f(x)$, необходимо сначала построить график функции $y=f(x)$, его часть, расположенную выше оси X, оставить без изменений и , отбросив часть, расположенную ниже оси X, отобразить симметрично относительно оси X.

ПРИМЕР 8.

Построить график функции $|y|=x^2-1$.

Решение. Сначала построим график $y=x^2-1$ (рис.8а).

Часть графика, расположенную выше оси X, без изменений и отобразим её симметрично относительно оси x (другую часть графика уберём). (рис.8б)

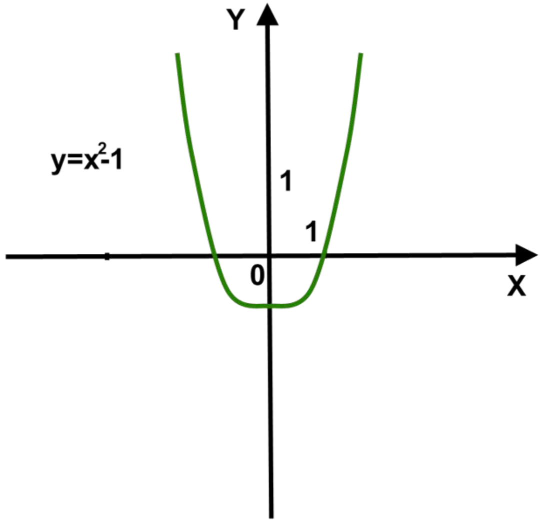

Рис. 8а

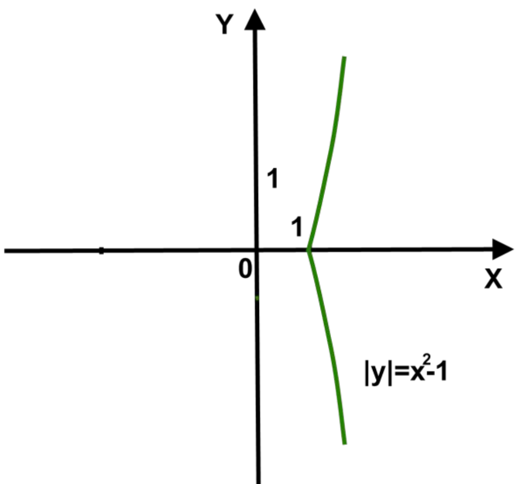

Рис. 8б

7. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ВИДА |Y|=F(|X|) И |Y|=|F(X)|.

Для построения графиков функций такого вида нужно построить график функции y=f(x) и применить операцию модуль сначала для правой части (построить графики функций y=f(|x|) или y=|f(x)| соответственно), а потом для левой (применить операцию модуль, как описано в 6 пункте.

ПРИМЕР 9.

Дан график функции y=f(x)(рис.9а). Построить графики функций |y|=f(|x|) и |y|=|f(x)|.

Решение. Построение |y|=f(|x|): сначала построим график y=f(|x|)(рис.9б), потом график функции |y|=f(|x|)(рис.9в).

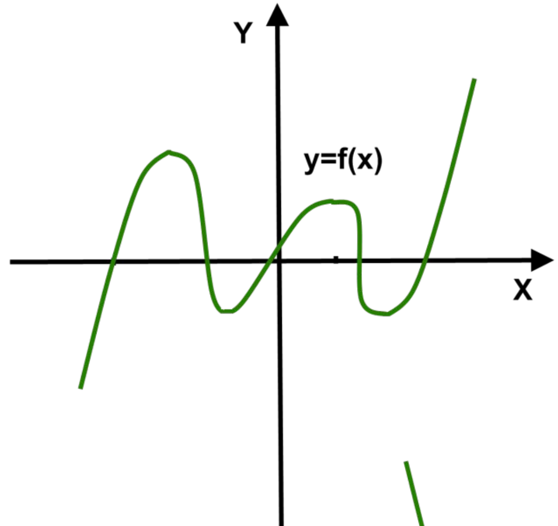

Рис. 9а

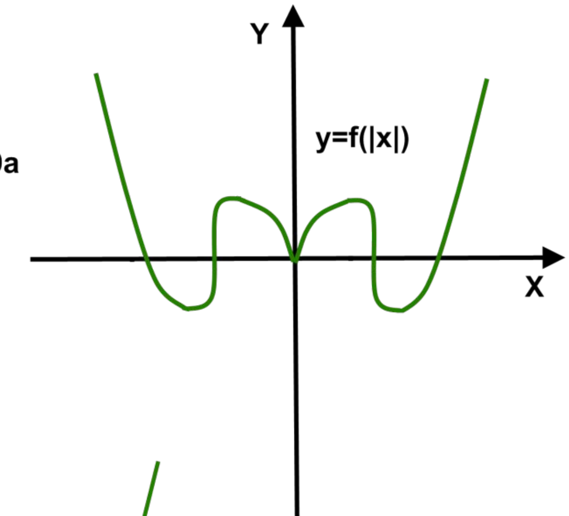

Рис. 9б

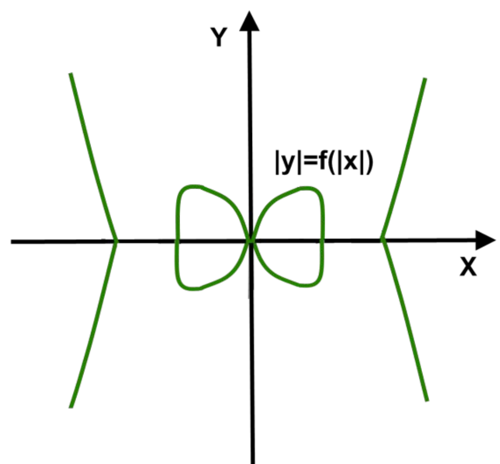

Рис. 9в

Решение. Построение |y|=|f(x)|: сначала построим график y=|f(x)|(рис.9г), потом |y|=|f(x)|(рис.9д).