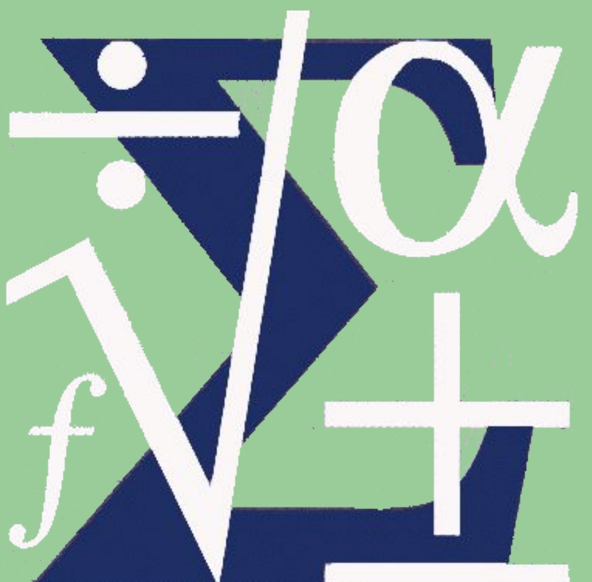
Построение графиков функций, уравнений и соответствий



Элективный курс,
10 класс

Цель элективного курса

- прояснить и дополнить школьный материал, связанный с функциями и построением их графического изображения,

- представить систематизацию функций не по видам, а по методам построения их графиков.

Задачи элективного курса

- знакомство учащихся с методами решения различных по формулировке нестандартных задач, связанных с построениями графиков соответствий;
- привитие навыков употребления функционально-графического метода при решении задач;
- расширение и углубление знаний по математике по программному материалу.

Тематическое планирование

№	Тема занятий	количество часов			Форма проведени	образовательный продукт
		всего	теория	практи		
1	Понятия функции и графика: • зависимость; • график функции; • способы задания функции	2	1	1	лекция	опорный конспект
2	Преобразование графиков: • перенос вдоль оси ординат; • перенос вдоль оси абсцисс; • сжатие (растяжение) вдоль оси ординат; • сжатие (растяжение) вдоль оси абсцисс	4	2	2	лекция, практи-кум, тренинг	опорный конспект, решенные задания
3	Действия над функциями: • сумма (разность) функций; • произведение функций; • частное двух функций; • функции, содержащие операцию взятия модуля	3	1	2	лекция, мастер класс	таблицы, схемы, опорный конспект
4	Дополнительный материал: • функционально-графический подход к решению задач • построения графиков суперпозиций простейших функций	4	2	2	лекция, практи-кум	решенные задания
5	Итоговая диагностика	1	-	1	защита работы, проекта	
	Итого	14	6	8		

Содержание

- Параллельный перенос вдоль оси OY
- Параллельный перенос вдоль оси OX
- Растяжение (сжатие) в k раз вдоль оси OY
- Растяжение (сжатие) в k раз вдоль оси OX
- Симметричное отображение относительно оси OX
- Симметричное отображение относительно оси OY
- Построение графика $y = |f(x)|$
- Построение графика $y = f(|x|)$

Параллельный перенос вдоль оси ординат

$$y = f(x) \longrightarrow y = f(x) + a$$

$$(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0, y_0 + a)$$

Для построения графика функции $y = f(x) + a$ необходимо график функции $y = f(x)$ перенести вдоль оси OY на вектор (0; a)

Содержание

Параллельный перенос вдоль оси абсцисс

$$y = f(x) \longrightarrow y = f(x-a)$$

$$(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0 + a, y_0)$$

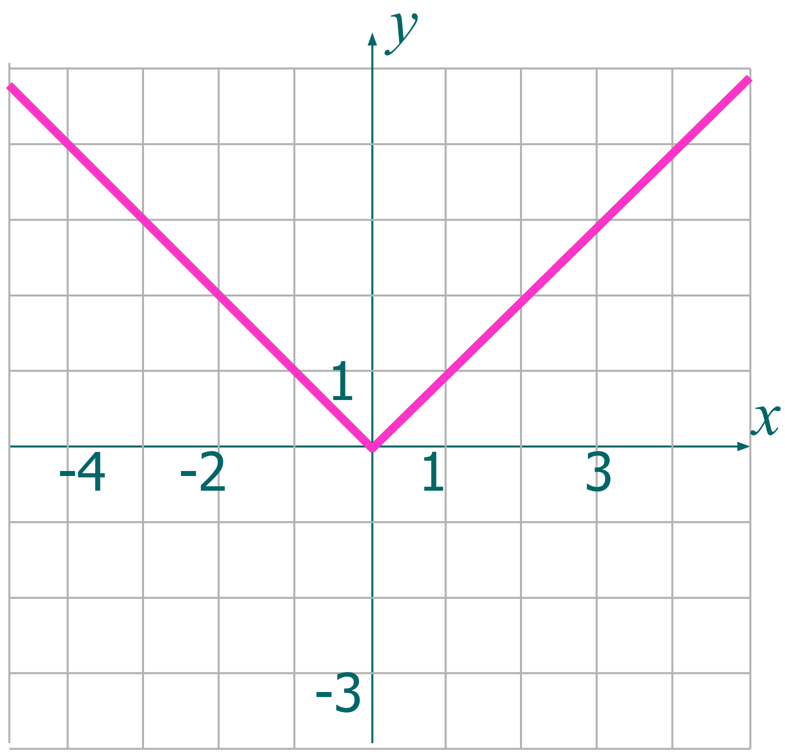
Для построения графика функции $y = f(x-a)$ необходимо график функции $y = f(x)$ перенести вдоль оси ОХ на вектор (a; 0)

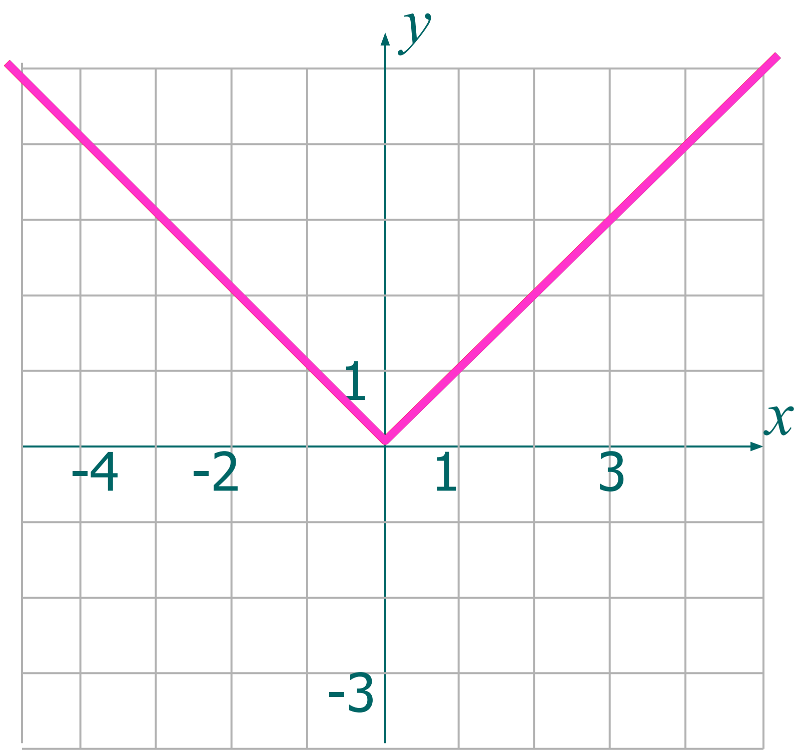
Содержание

Построить график функций, сдвигом вдоль:

а) оси ординат; б) оси абсцисс

$y = |x|$ $y = |x| + 2$ $y = |x| - 3$ $y = |x|$ $y = |x + 2|$ $y = |x - 3|$





Растяжение (сжатие) в k раз вдоль оси ординат

$$y = f(x) \longrightarrow y = k\,f(x), \quad k > 0$$

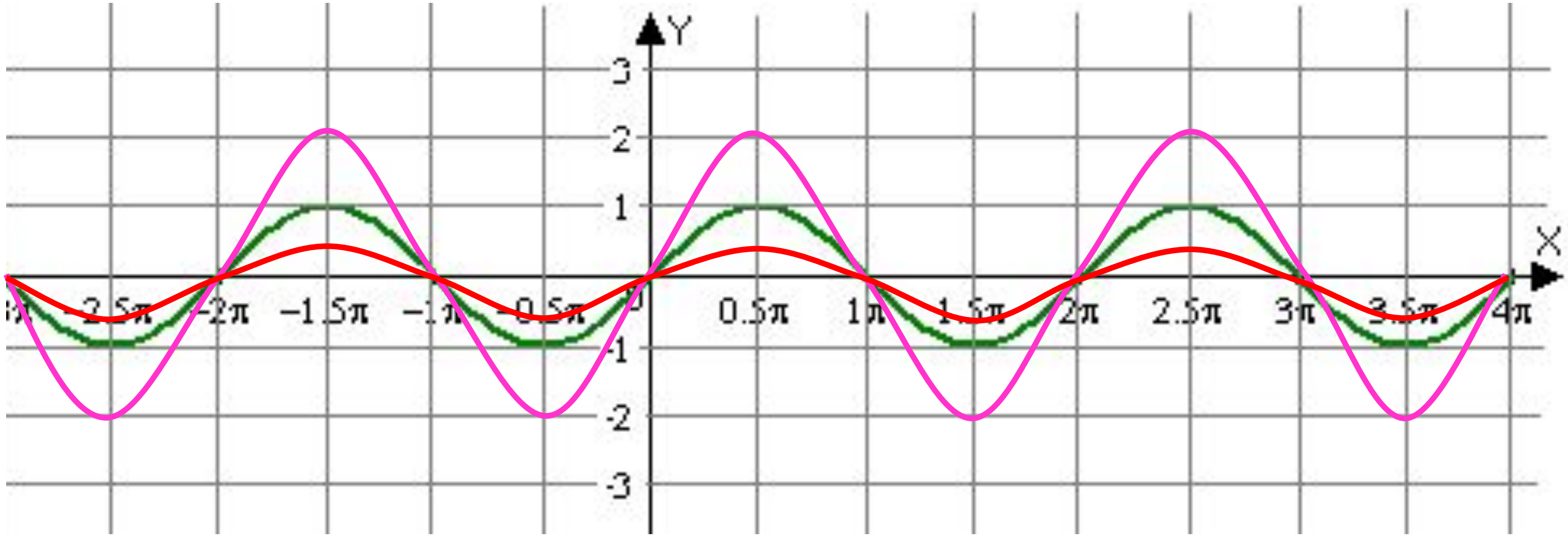
$$(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0, k\,y_0)$$

Для построения графика функции $y = k\,f(x)$ необходимо график функции $y = f(x)$ растянуть в k раз вдоль оси OY для k>1 или сжать в 1/k раз вдоль оси OY для k<1

Содержание

Построить графики функций, сжатием вдоль оси ординат

$y = \sin x$ $\quad y = 2\sin x$ $\quad y = \dfrac{1}{2}\sin x$



Растяжение (сжатие) в k раз вдоль оси абсцисс

$$y = f(x) \longrightarrow y = f(kx), \quad k > 0$$

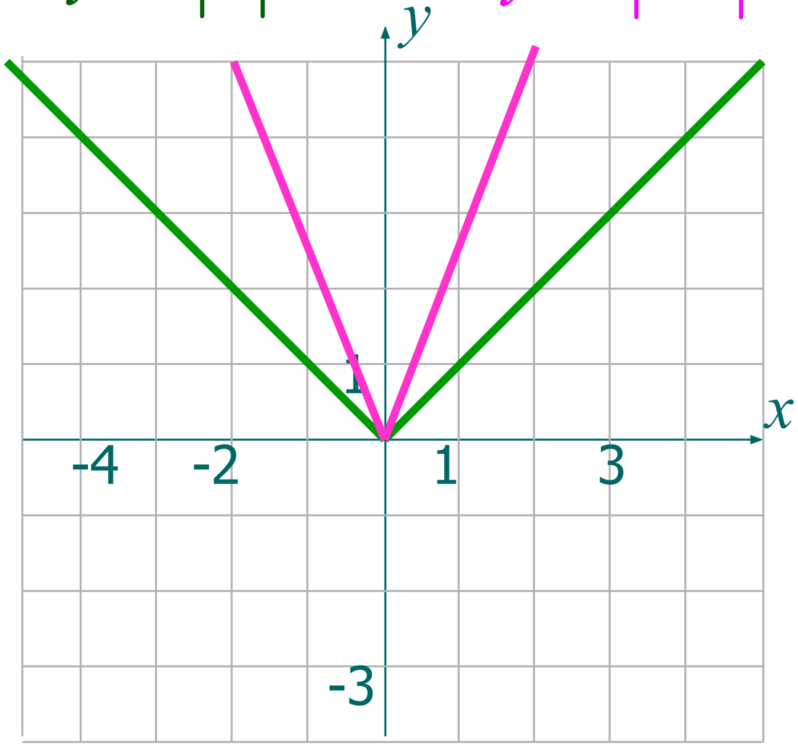
$$(x_0, y_0) \longrightarrow \left(\frac{x_0}{k}, y_0\right)$$

Для построения графика функции $y = f(kx)$ необходимо график функции $y = f(x)$ сжать в k раз вдоль оси OX для k>1 или растянуть в 1/k раз вдоль оси OX для k<1

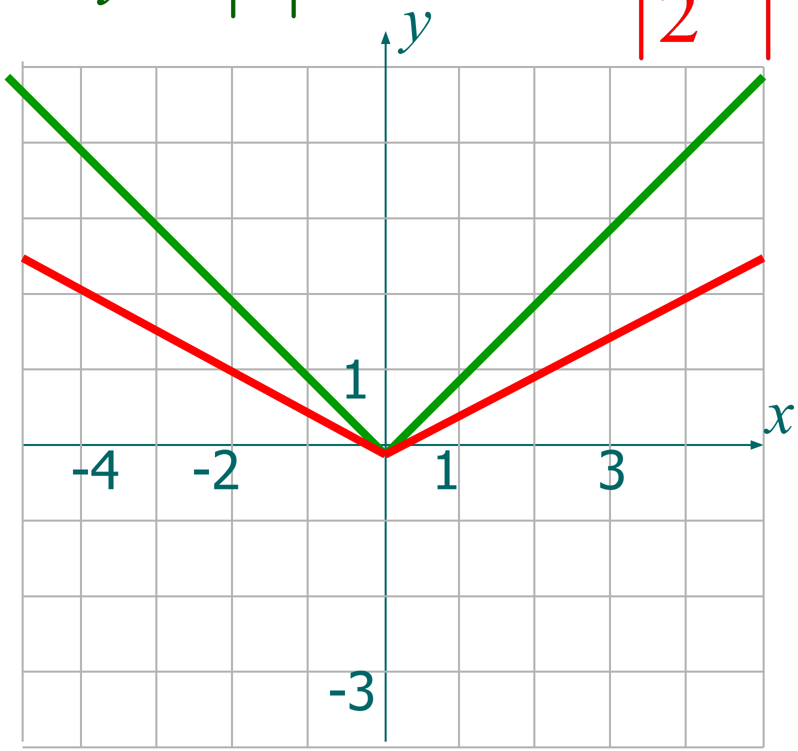
Содержание

Построить графики функций, сжатием вдоль оси абсцисс

$y = |x|$ $\qquad$ $y = |2x|$



$y = |x|$ $\qquad$ $y = \left|\frac{1}{2}x\right|$



Симметричное отображение относительно оси абсцисс

$$y = f(x) \longrightarrow y = -f(x)$$

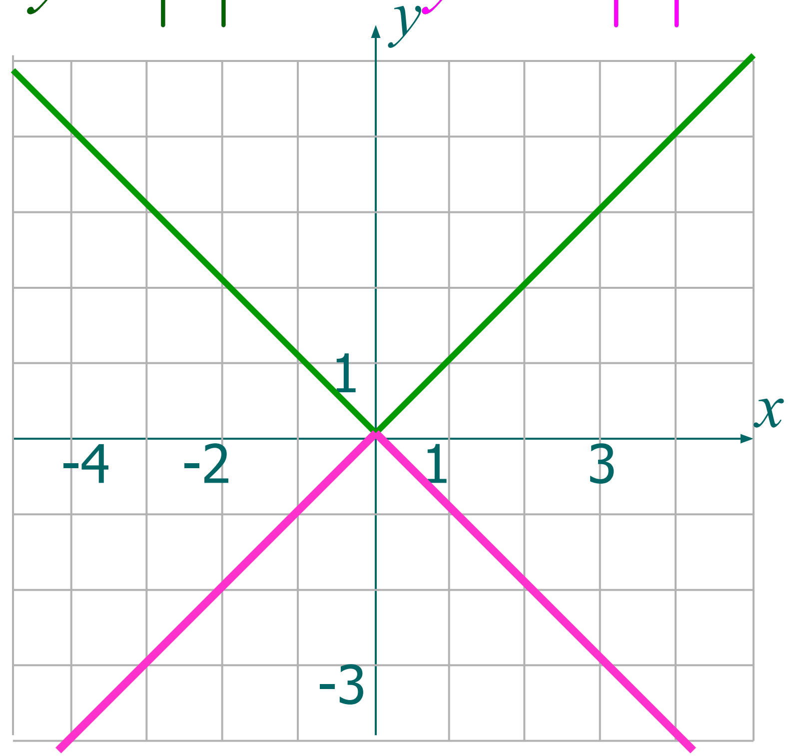
$$(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0, -y_0)$$

Для построения графика функции $y = -f(x)$ необходимо график функции $y = f(x)$ симметрично отобразить относительно оси OX

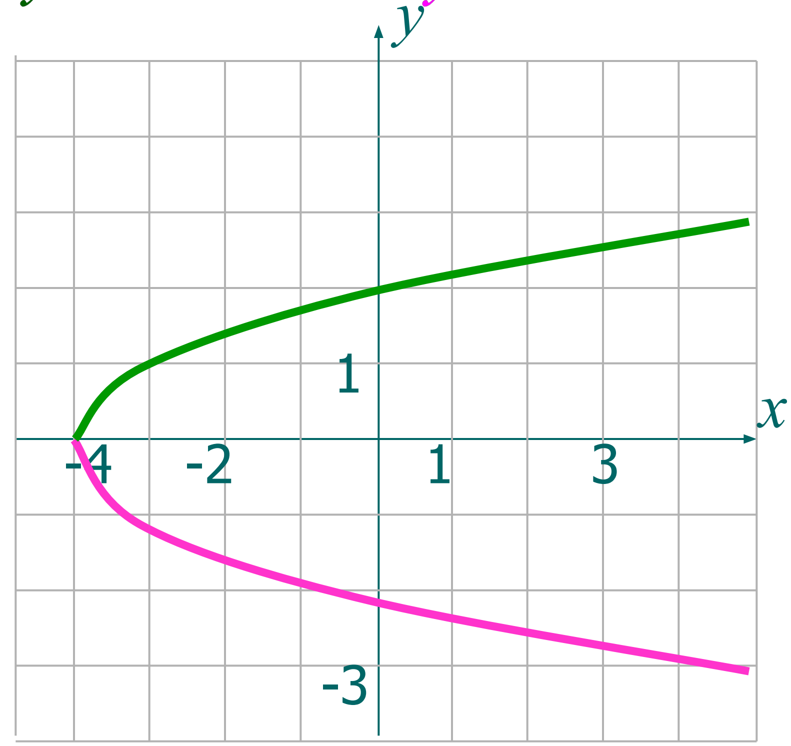
Содержание

Построить графики функций, симметричным отображением вдоль оси абсцисс

$y = |x|$ $y = -|x|$



$y = \sqrt{x-4}$ $y = -\sqrt{x-4}$



Симметричное отображение относительно оси ординат

$$y = f(x) \longrightarrow y = f(-x)$$

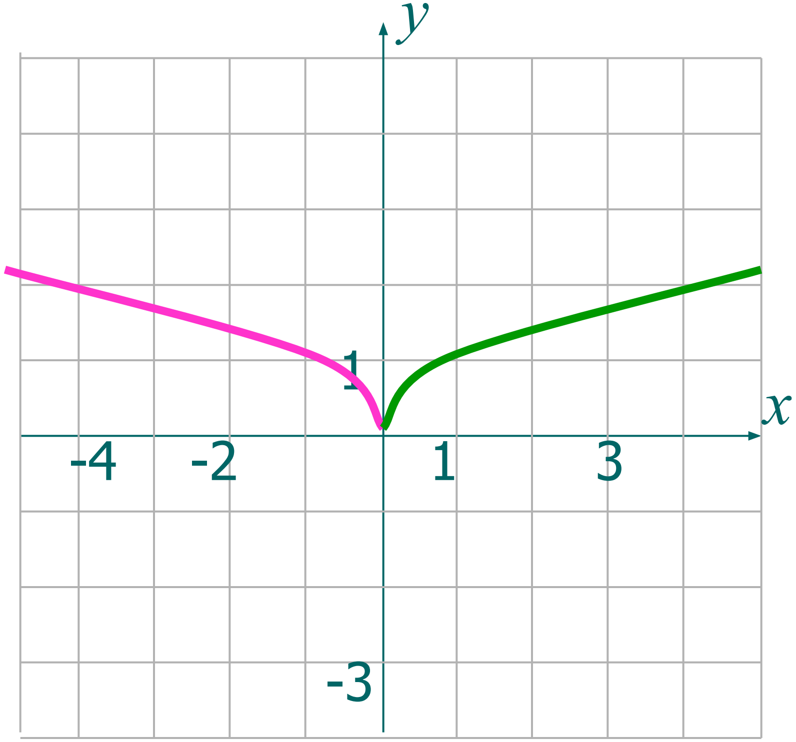
$$(x_0, y_0) \longrightarrow (-x_0, y_0)$$

Для построения графика функции $y = f(-x)$ необходимо график функции $y = f(x)$ симметрично отобразить относительно оси OY

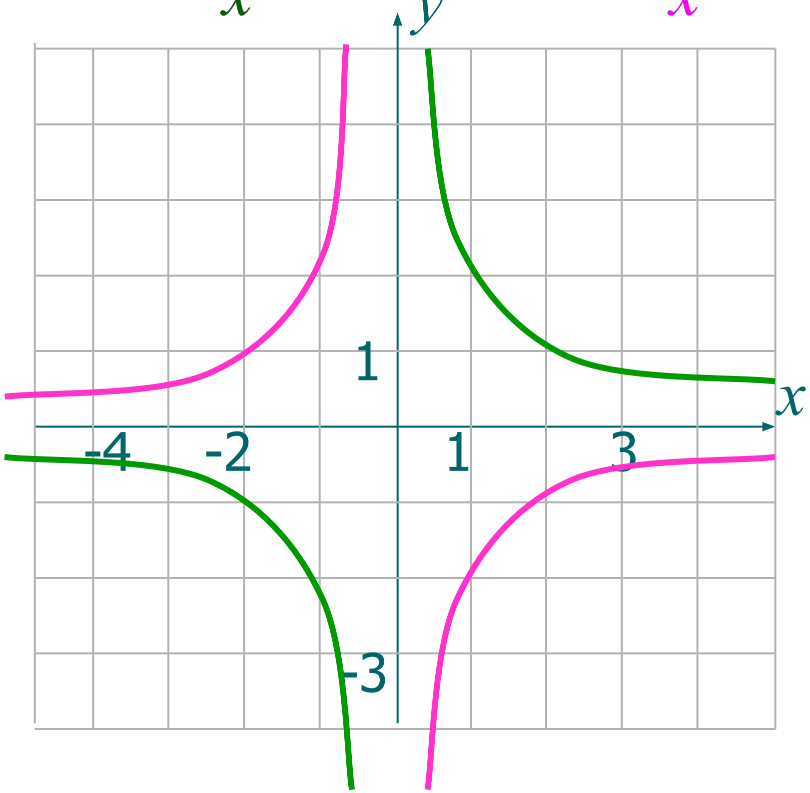
Содержание

Построить графики функций, симметричным отображением вдоль оси ординат

$y = \sqrt{x}$ $\quad y = \sqrt{-x}$



$y = \frac{2}{x}$ $\quad y = -\frac{2}{x}$



Построение графика $y = |f(x)|$

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0; \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

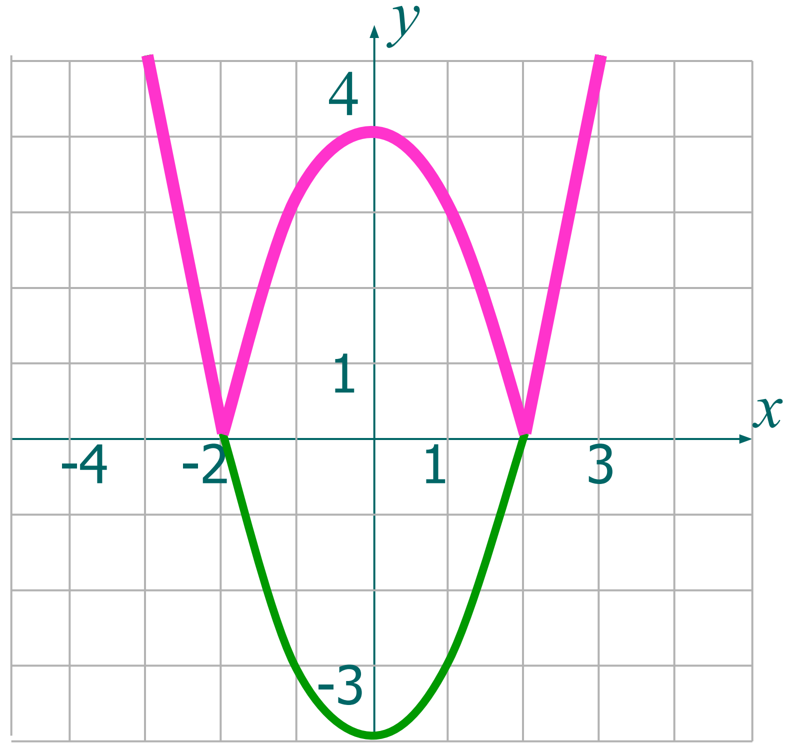
Для построения графика функции $y = |f(x)|$ необходимо часть графика функции $y = f(x)$ лежащую в области $y \geq 0$, оставить неизменной, а часть графика функции $y = f(x)$, лежащую в области $y < 0$, симметрично отобразить относительно оси ОХ

Содержание

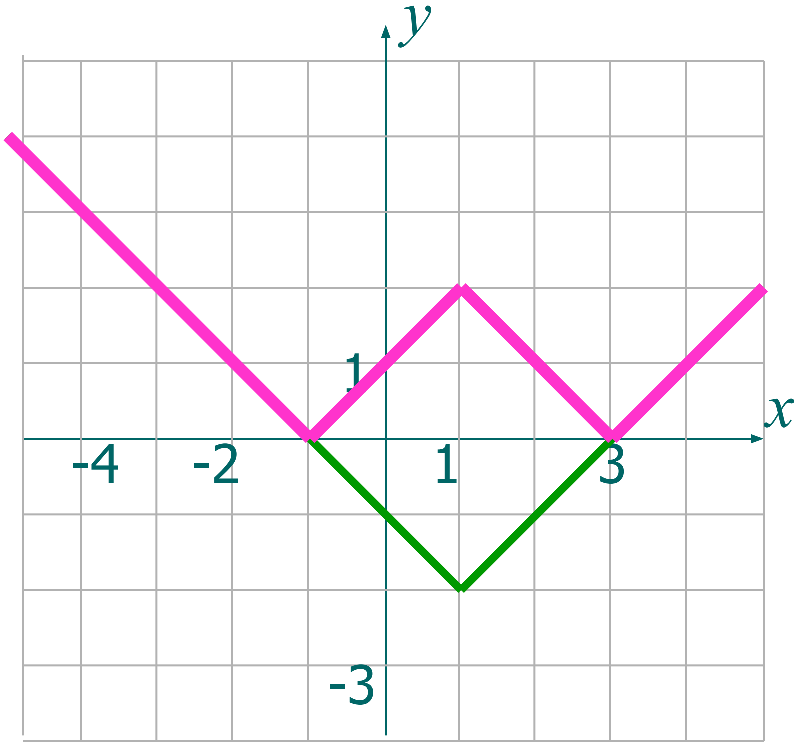
Построить графики функций

$$y = |\, f(x)\, |$$

$y = x^2 - 4;\quad y = \left|x^2 - 4\right|$



$y = |x-1| - 2;\quad y = \left||x-1| - 2\right|$



Построение графика $y = f(|x|)$

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \geq 0; \\ f(-x), \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

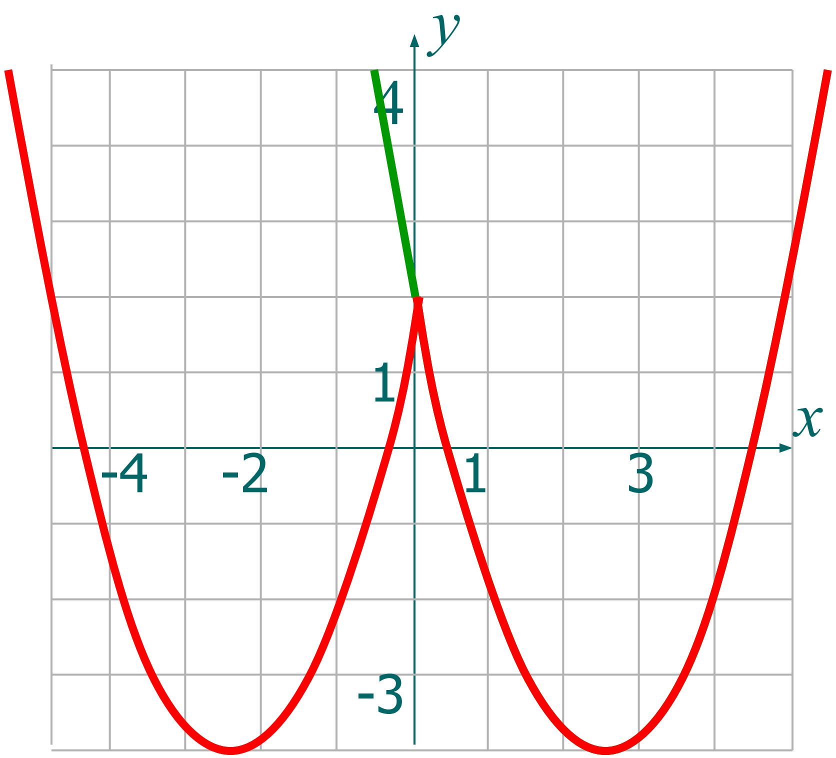
Для построения графика функции $y = f(|x|)$ необходимо часть графика функции $y = f(x)$, лежащую в области $x \geq 0$, оставить неизменной, и её же отобразить симметрично относительно оси OY в область $x < 0$

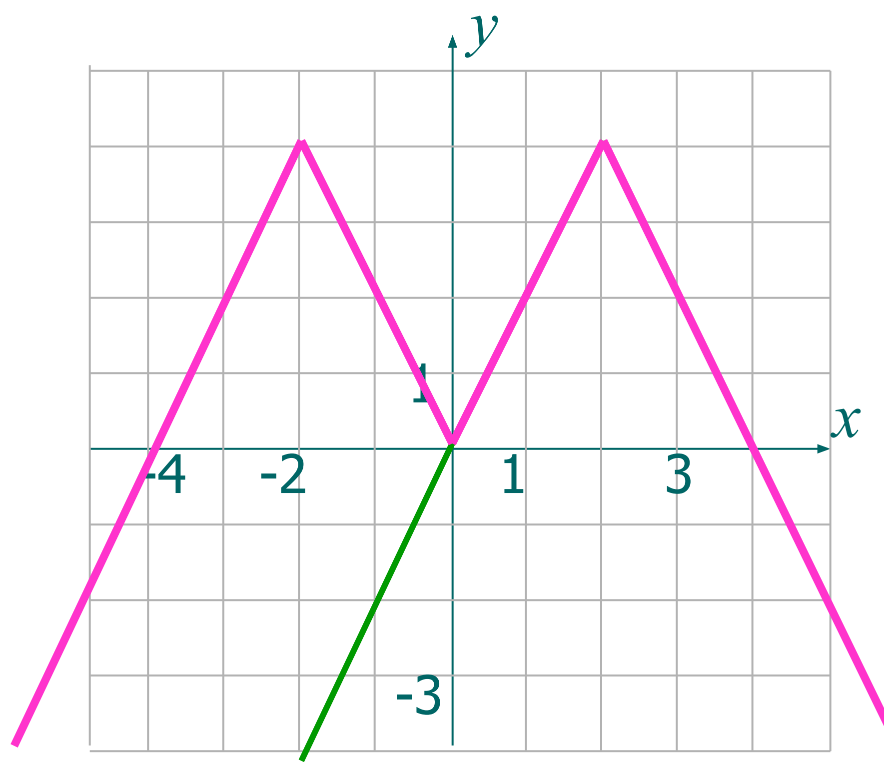
Содержание

Построить графики функций

$$y = f\left(|x|\right)$$

$y = (x - 2,5)^2 - 4;$ $y = \left(|x| - 2,5\right)^2 - 4;$ $y = 4 - 2|x - 2|;$ $y = 4 - 2\left||x| - 2\right|$





МЕТОД СЛОЖЕНИЯ ГРАФИКОВ

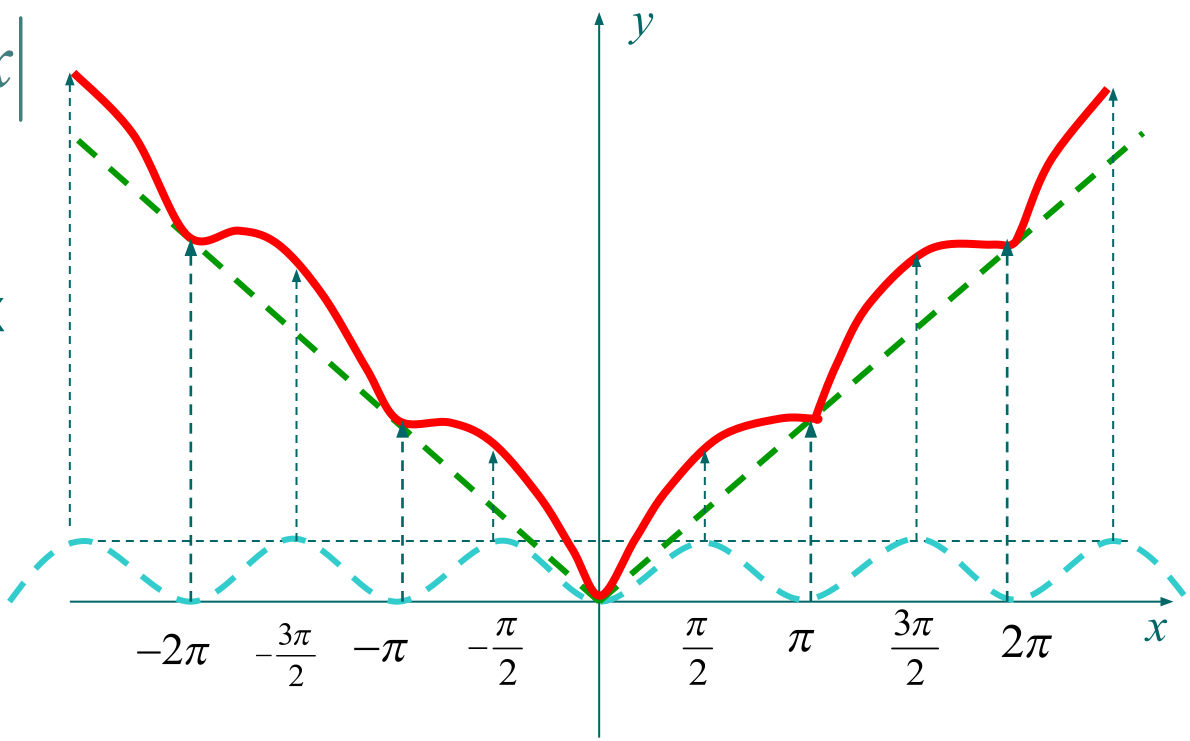
Постройте график функции $y = |x| + |\sin x|$

Решение.

Построим в одной системе координат графики функций

$y = |x|$ и $y = |\sin x|$

Путем сложения соответствующих координат получаем искомый график

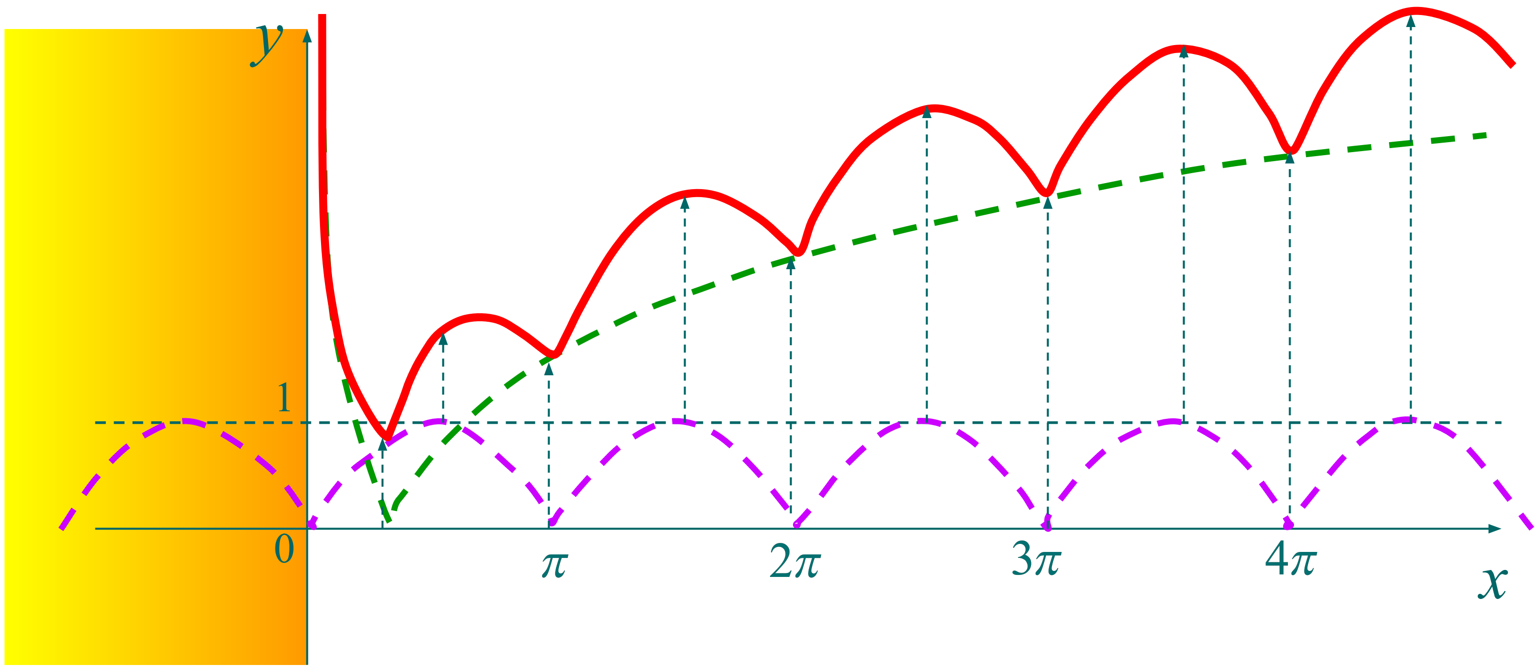


Построить график функции

$$y = |\sin x| + |\log_2 x|$$

Построим пунктиром в одной системе координат графики функции $y = |\sin x|$ и $y = |\log_2 x|$

Путем сложения соответствующих координат получаем искомый график

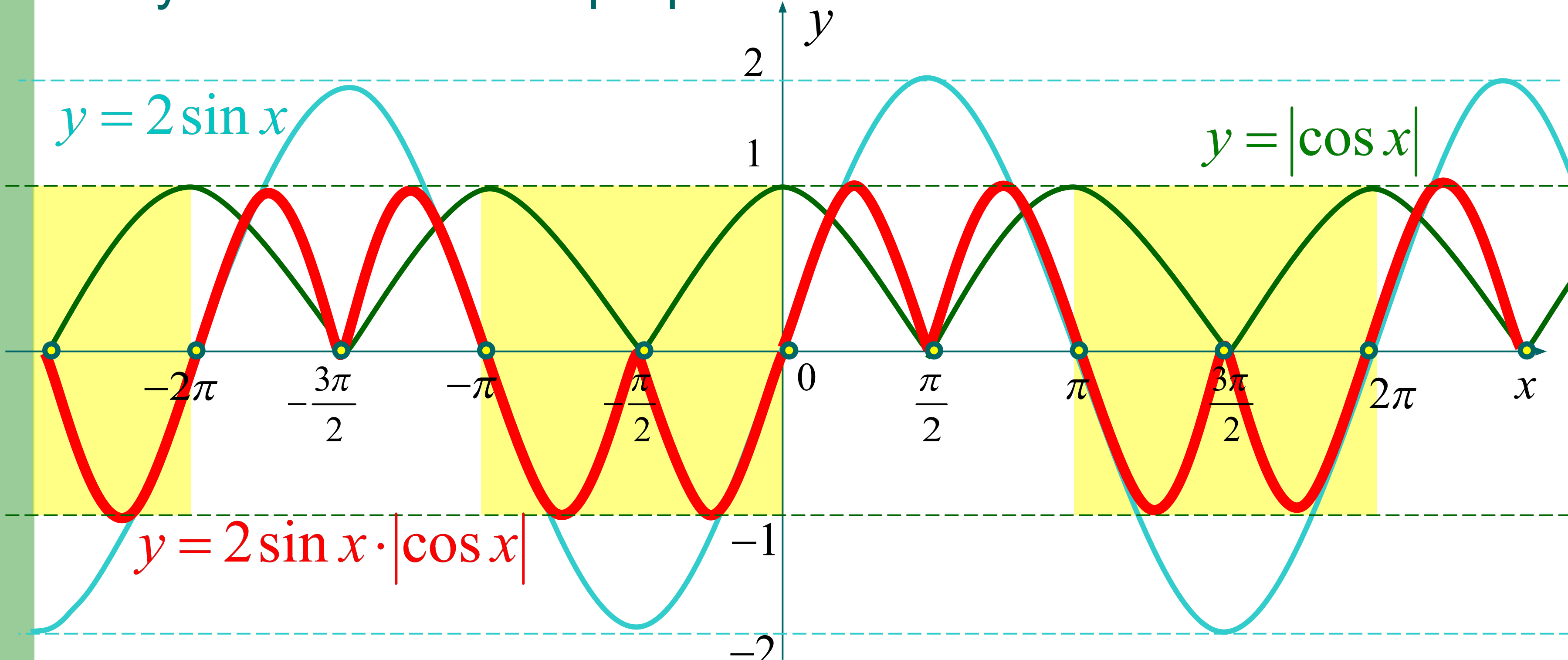


МЕТОД УМНОЖЕНИЯ ГРАФИКОВ

Постройте график функции $y = 2\sin x \cdot |\cos x|$

Построим графики функции $y = |\cos x|$ и $y = 2\sin x$

Путем умножения соответствующих координат получаем искомый график



Множества точек на плоскости.

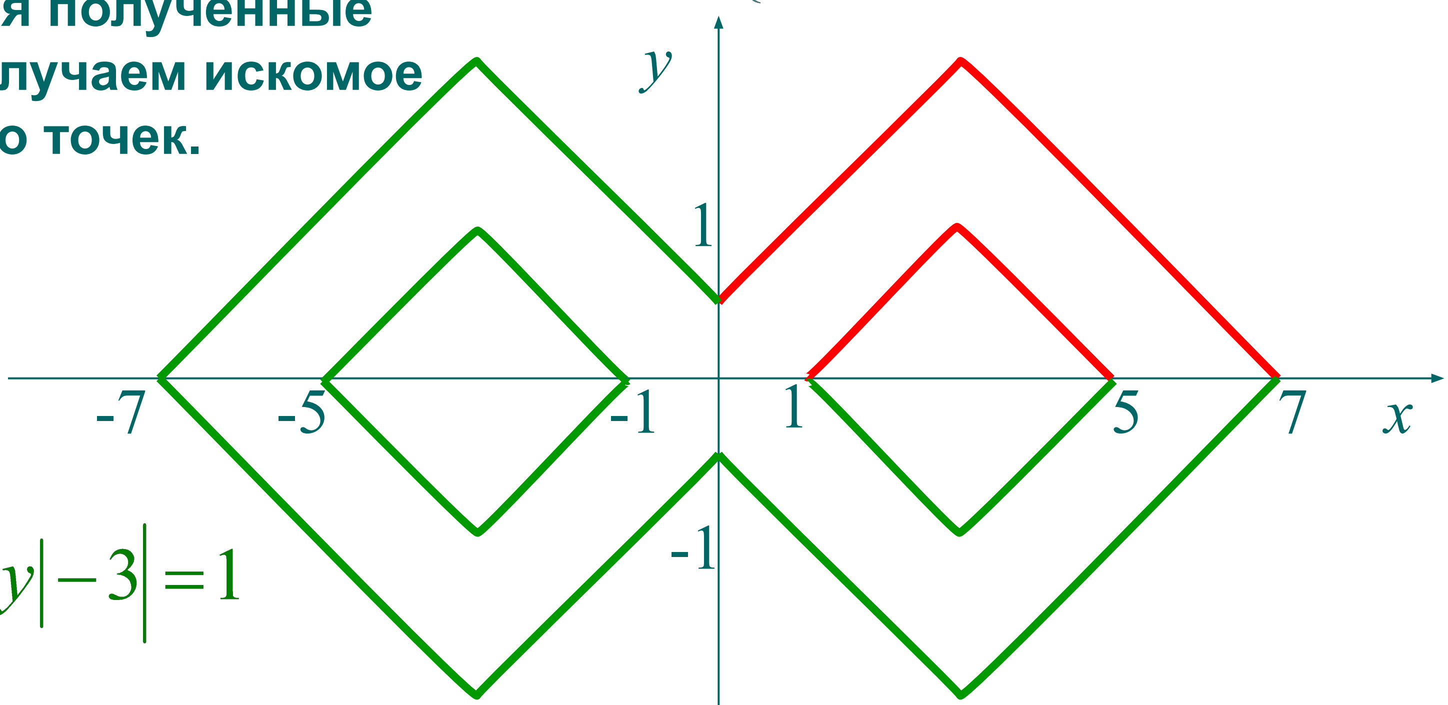
Построить на плоскости множество точек заданных уравнением:

$$\left|\,\big||x|-3\big|+|y|-3\right|=1$$

Заметим, что график симметричен относительно осей координат.

Для I четверти система примет вид: $\begin{cases} y=4-|x-3| \\ y=2-|x-3| \end{cases}$

Отображая полученные линии, получаем искомое множество точек.



$$\left|\,\big||x|-3\big|+|y|-3\right|=1$$

МЕТОД ОБЛАСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Графический прием ← **Ключ решения:** → Свойства функций

Параметр – «равноправная» переменная ⇒ отведем ему координатную ось т. е. задачу с параметром будем рассматривать как функцию $f(x; a) > 0$

Общие признаки задач подходящих под рассматриваемый метод

- В задаче дан один параметр a и одна переменная x
- Они образуют некоторые аналитические выражения $F(x;a)$, $G(x;a)$
- Графики уравнений $F(x;a)=0$, $G(x;a)=0$ строятся несложно

Схема решения:

- 1.Строим графический образ
- 2.Пересекаем полученный график прямыми перпендикулярными параметрической оси
- 3.«Считываем» нужную информацию

Найти все значения *a*, при которых уравнение

$$(a+4x-x^2-1)(a+1-|x-2|)=0$$

имеет ровно три корня?

Данное уравнение равносильно совокупности

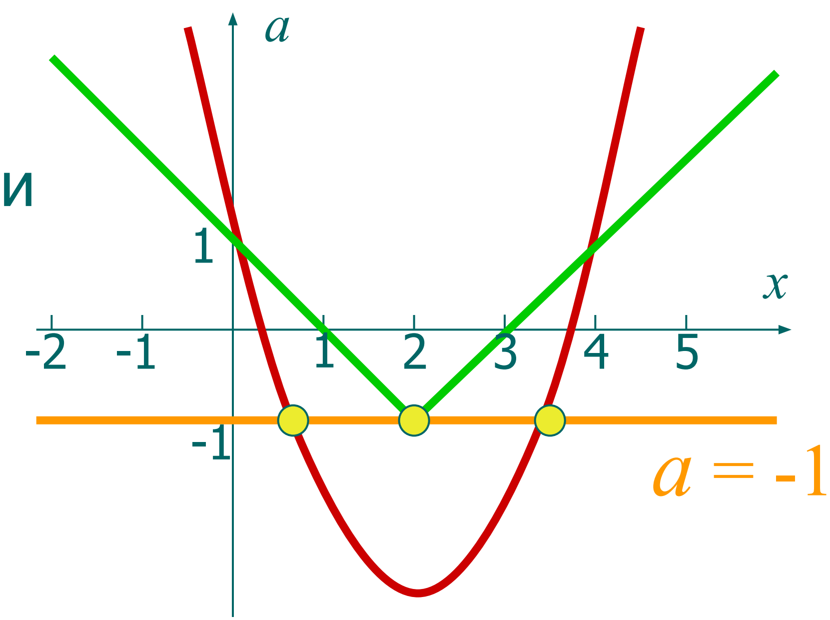
$$\left[\begin{array}{l} a-x^2+4x-1=0 \\ a-|x-2|+1=0 \end{array}\right.$$

Выражая параметр *a*, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} a=x^2-4x+1 \\ a=|x-2|-1 \end{array}\right.$$

График этой совокупности – объединение уголка и параболы.

Прямая $a=-1$ пересекает полученное объединение в трех точках.



Ответ: $a=-1$

Сколько решений имеет уравнение $(a-2x+x^2)(a+1-|x-1|)=0$ в зависимости от значений параметра a?

Данное уравнение равносильно совокупности следующих двух уравнений:
$$\left[\begin{array}{l} a = 2x - x^2 \\ a = |x-1| - 1 \end{array}\right.$$

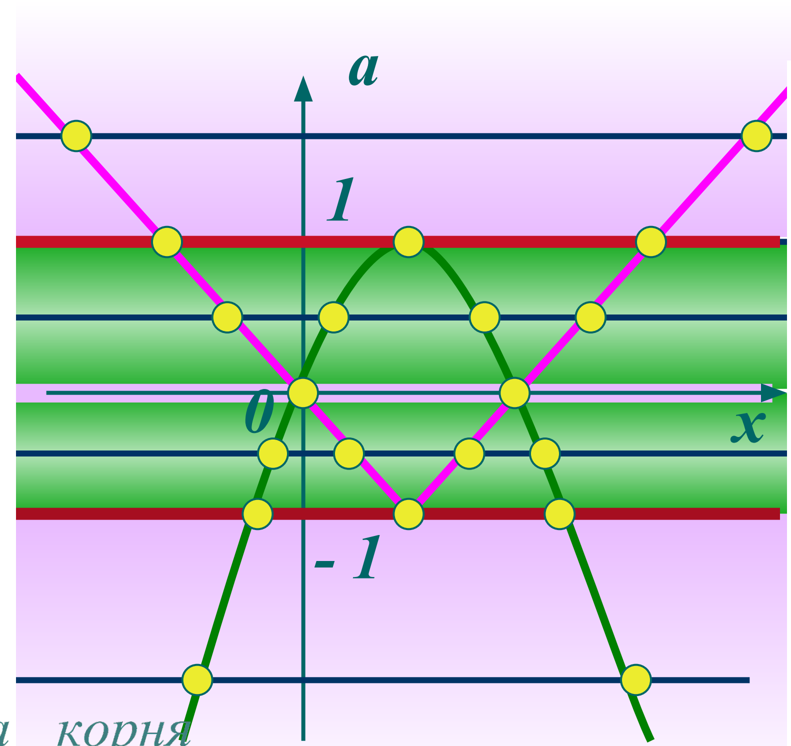


График этой совокупности – объединение уголка и параболы.

По рисунку «считываем» ответ

Ответ:

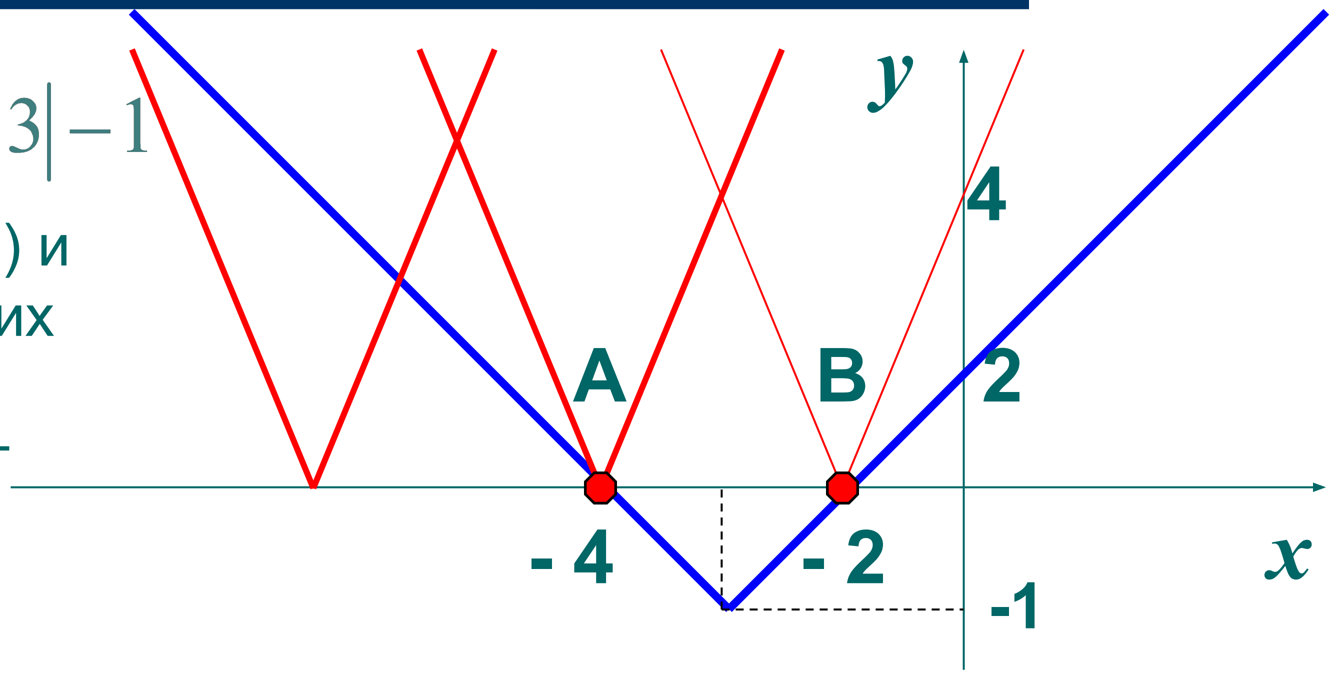
если $a < -1$, $a = 0$ *и* $a > 1$, *то два корня*

если $a = \pm 1$, *то три корня*

если $-1 < a < 0$ *и* $0 < a < 1$, *то четыре корня*

Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $|2x-a|+1=|x+3|$ имеет единственное решение.

$$|2x-a|=|x+3|-1$$



А(-4; 0), В(-2; 0) и координаты этих точек удовлетворяют уравнению $y=|2x-a|$.

$$\left[\begin{array}{l}|-8-a|=0\\|-4-a|=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-8\\a=-4\end{array}\right..$$

Ответ: $a=-8,\ \ a=-4$

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ОБЛАСТЕЙ

(«переход» метода интервалов с прямой на плоскость)

Неравенства с одной переменной

Метод интервалов:

1. ОДЗ
2. Корни
3. Ось
4. Знаки на интервалах
5. Ответ.

Неравенства с двумя переменной

Метод областей:

1. ОДЗ
2. Граничные линии
3. Координатная плоскость
4. Знаки в областях
5. Ответ по рисунку.

На координатной плоскости изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \le 0$

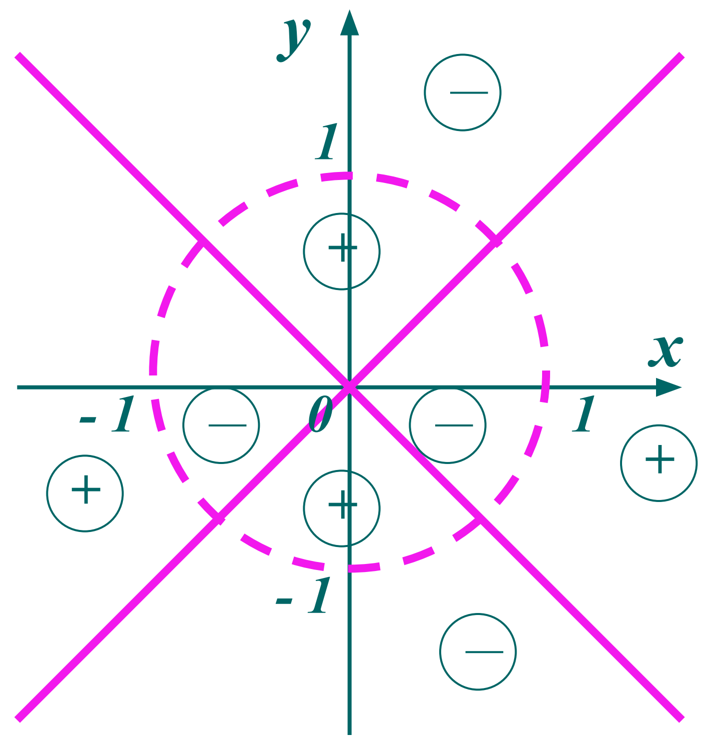
Найдем ОДЗ: $x^2 + y^2 - 1 \ne 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ne 1$

Граничные линии:

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow |y| = |x|$$

$$и \quad x^2 + y^2 = 1$$

Строим граничные линии. Они разбивают плоскость на восемь областей, определяя знаки подстановкой в отдельных точках, получаем решение.



Сколько решений имеет система в зависимости от параметра *а*?

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

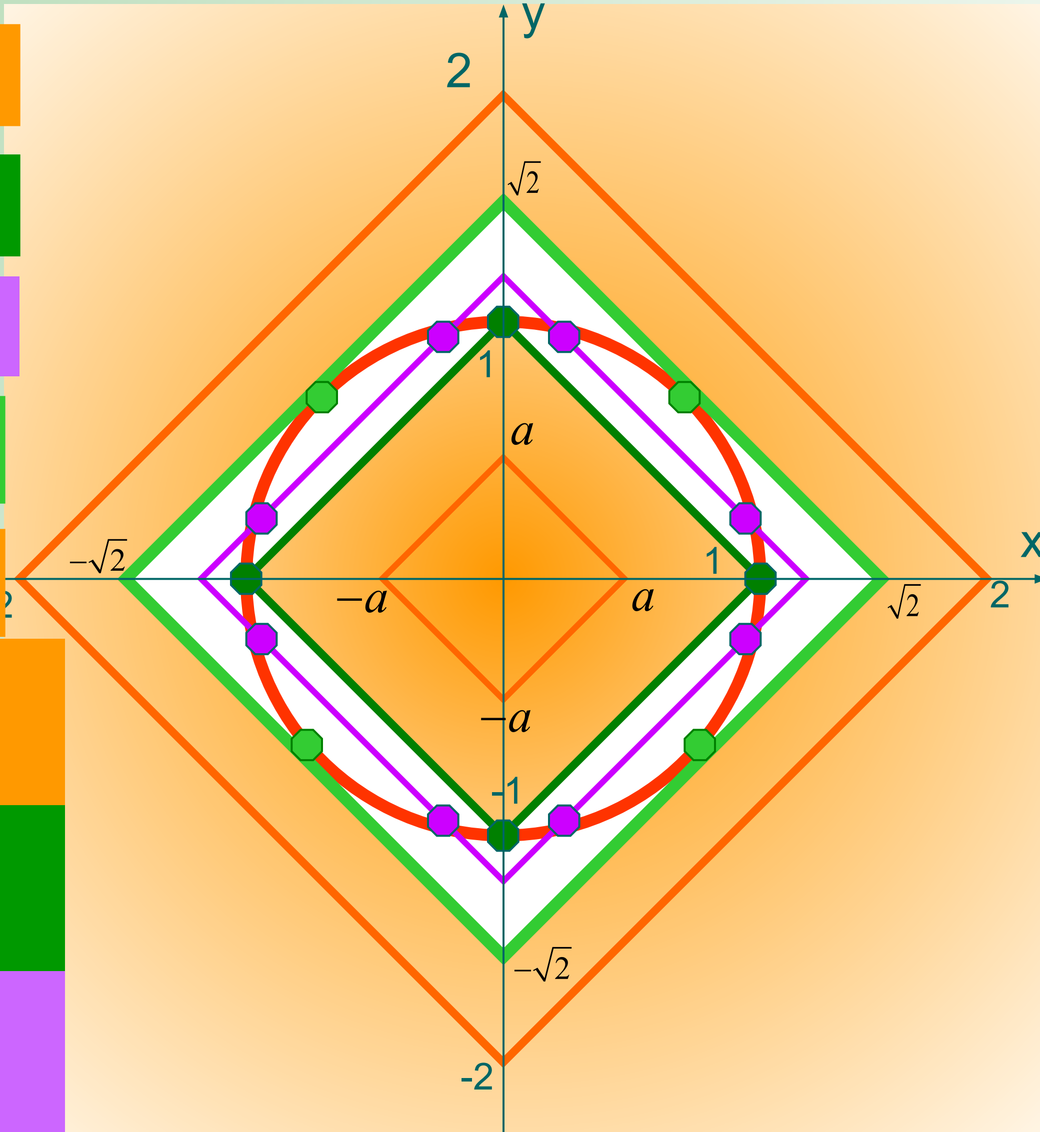
решений нет при $a<1$

4 решения при $a=1$

8 решений при $1<a<\sqrt{2}$

4 решения при $a=\sqrt{2}$

решений нет при $a>\sqrt{2}$



Ответ:

решений нет, если $a<1$ или $a>\sqrt{2}$

4 решения, если $a=1$ или $a=\sqrt{2}$

8 решений, если $1<a<\sqrt{2}$

Найти все значения параметра *p*, при каждом из которых множество решений неравенства $\left(p - x^2\right)\left(p + x - 2\right) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $|x| \le 1$

Применим обобщенный метод областей.

Построим граничные линии

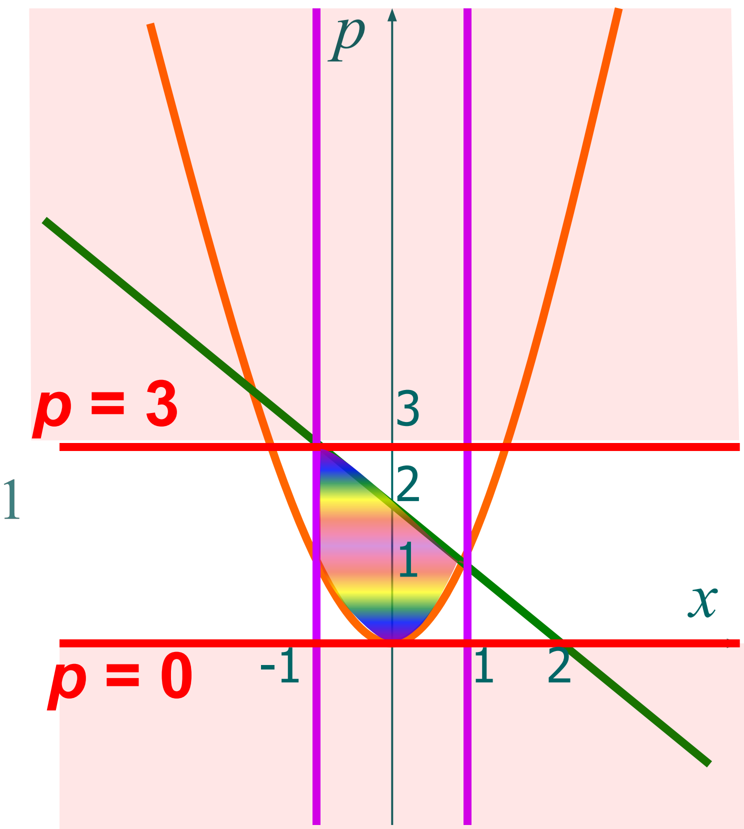
$$p = x^2 \text{ и } \quad p = 2 - x$$

Определим знаки в полученных областях, и получим решение данного неравенства.

Осталось из полученного множества исключить решения неравенства $|x| \le 1$

По рисунку легко считываем ответ

$$p \le 0, \; p \ge 3$$



Ответ: $p \le 0, \; p \ge 3$

При каких положительных значениях параметра *а*, система уравнений имеет ровно четыре решения?

$$\begin{cases} \left|4-|x-2|\right|-|y|=0 \\ x^2+y^2=a^2+4(x-1) \end{cases}$$

Запишем систему в виде: $\left|4-|x-2|\right|=|y|$

решений нет при $a<2\sqrt{2}$.

Построим графики обоих уравнений.

ния:

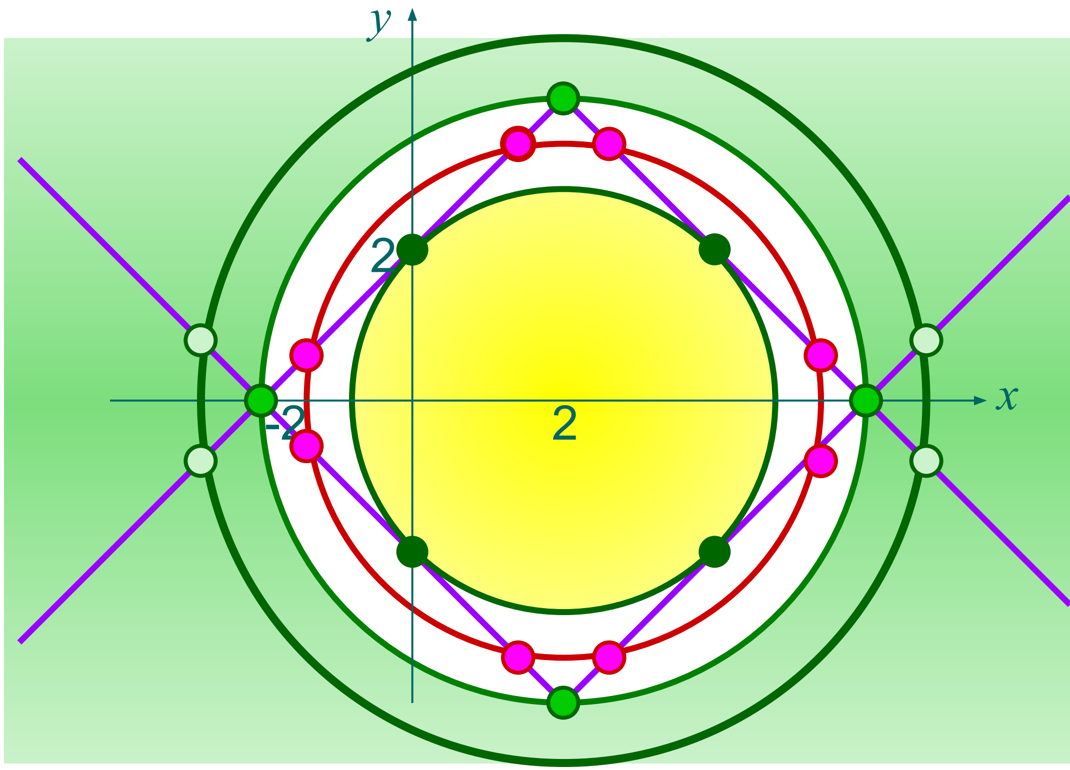
4 решения при $a=2\sqrt{2}$

$y=\left|4-|x-2|\right|$ и симметрично

8 решений при $2\sqrt{2}<a<4.$ си

Второе уравнение задает семейство

4 решения при $a\geq 4$ и



Итак:

при $a<2\sqrt{2}$ решений нет; при $a=2\sqrt{2}$ и $a\geq 4$ система имеет 4 решения; система имеет 8 решений при $2\sqrt{2}<a<4.$

Ответ: $a=2\sqrt{2}$ и $a\geq 4$

Найти все значения параметра a при каждом из которых система

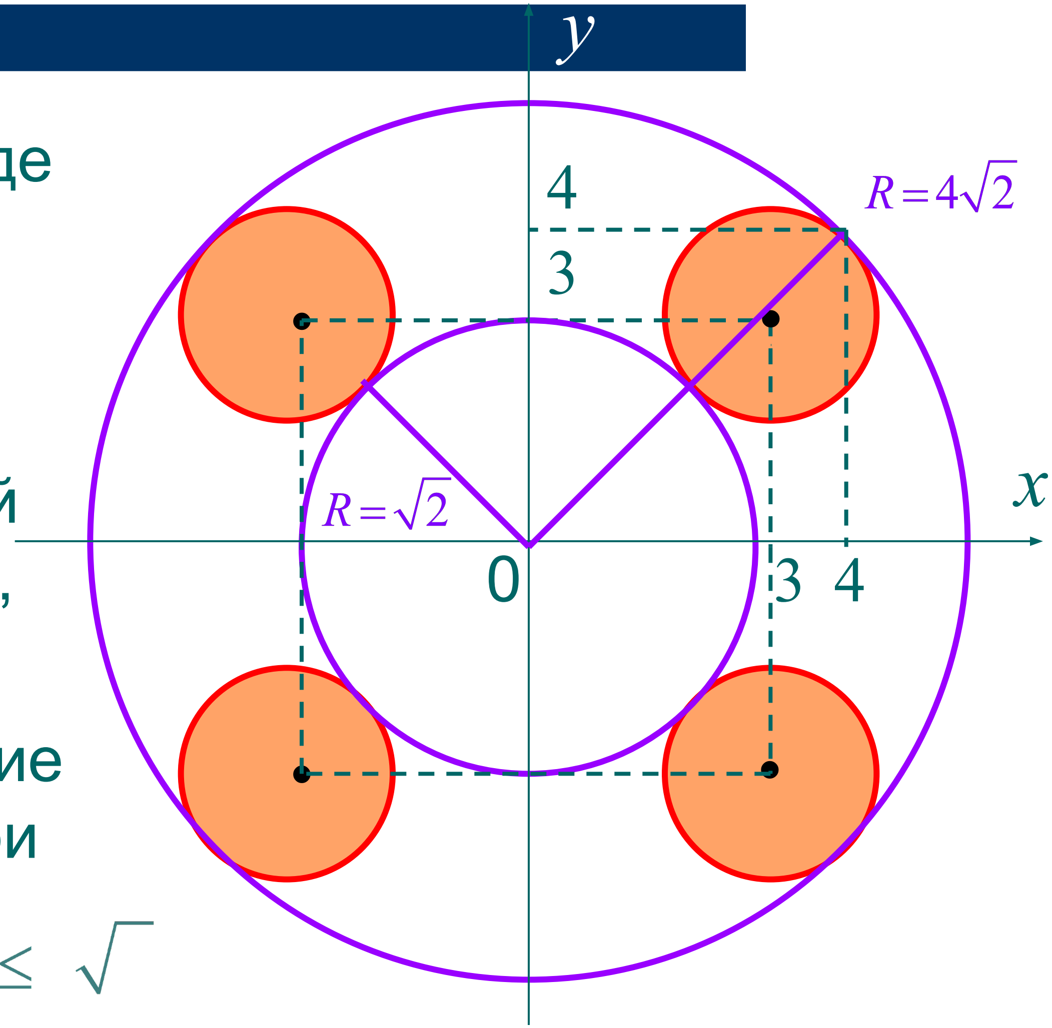
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \le 0 \\ x^2 - a^2 = -y^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \le 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

Построим графический образ соответствий, входящих в систему.



Очевидно, что условие задачи выполняется при

Ответ:

$$-4\sqrt{2} \le a \le -\sqrt{2} \qquad \sqrt{2} \le a \le 4\sqrt{2}$$

Найти сумму целых значений параметра а при которых уравнение <u>имеет три корня</u>

$$\left(a+2x-x^2+19\right)\left(a-3-|x-4|\right)=0$$

Исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} a-x^2+2x+19=0 \\ a-3-|x-4|=0 \end{array}\right.$$

Выражая параметр *а*, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} a=x^2-2x-19 \\ a=|x-4|+3 \end{array}\right.$$

Из рисунка видно, что уравнение имеет три корня в 3 случаях.

1) При $a = 3$, «вершина уголка»;

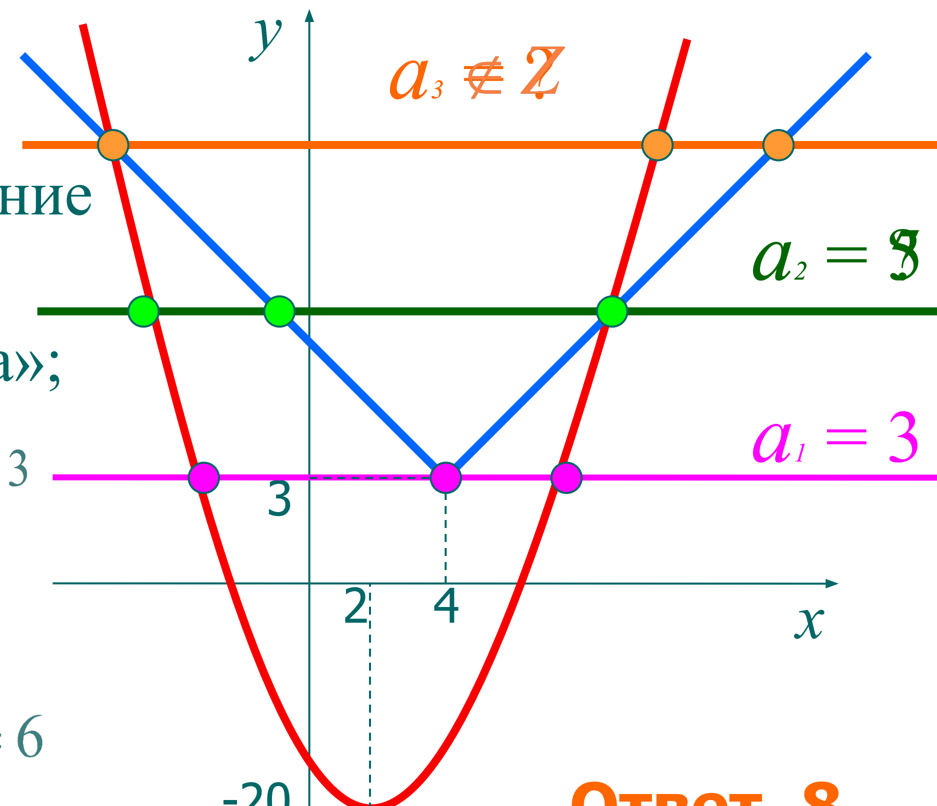
2) При $x < 4$, $x^2-2x-19=-(\quad-4)+3$

$$x^2-x-26=0,\ x_{1,2}\notin Z\Rightarrow\varnothing$$

3) При $x > 4$, $x^2-2x-19=x-4+3,$

$$x^2-3x-18=0,\ x_1=-3(\varnothing),\ x_2=6$$

Тогда $a = 6 - 4+3 = 5$.



Ответ. 8.