Построение некоторых типов нелинейных моделей

Нелинейные модели

Линейные модели двух типов:

- линейные по переменным
- линейные по параметрам

Примеры.

1. Линейная модель множественной регрессии:

$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + u$$

Является линейной как по переменным, так и по параметрам

2. Производственная функция Кобба-Дугласа:

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{(1-a_1)}$$

Является нелинейной как по переменным, так и параметру a_1

Основные типы нелинейных моделей

1.Обобщенная модель нелинейная по переменным

$$Y = a_0 + a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X) + \ldots + a_k f_k \qquad (1)$$

2. Степенные функции

$$Y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \qquad (2)$$

3. Показательные функции

$$Y = a_0 e^{a_1 x_1} e^{a_2 x_2} = e^{(a_1 x_1 + a_2 x_2)} \qquad (3)$$

Обобщенная модель нелинейная по переменным

$$Y = a_0 + a_1 f_1(X) + a_2 f_2(X) + \ldots + a_k f_k + u \qquad (1.1)$$

Линеаризация обобщенной нелинейной модели

1. Вводятся новые переменные:

$$z_1 = f_1(X); \quad z_2 = f_2(X) \ldots; z_k = f_k(X)$$

2. Подставляя новые переменные в модель (1), получим модель линейную по переменным z:

$$Y = a_0 + a_1 z_1(X) + a_2 z_2(X) + \ldots + a_k z_k(X) + u \qquad (1.2)$$

3. После оценки параметров модели делается обратный переход к модели (1.1)

Обобщенная модель нелинейная по переменным

Примеры.

1. Полиномиальные модели:

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_k x^k + u \qquad (1.3)$$

Новые переменные:

$$z_1 = x; \quad z_2 = x^2; \quad z_3 = x^3; \quad \ldots \quad ; z_k = x^k$$

После перехода к новым переменным получается линейная модель множественной регрессии:

$$Y = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_k z_k + u$$

Оценка и анализ проводится уже известными методами

Обобщенная модель нелинейная по переменным

1. Полиномиальные модели:

Параболические модели широко применяются

- при моделировании средних и предельных издержек в зависимости от объема выпуска продукции

- при моделировании зависимости прибыли предприятия от расходов на рекламу

Кубические модели

– при моделировании общих издержек в зависимости от объема выпуска продукции

Обобщенная модель нелинейная по переменным

2. Модели гиперболического типа

$$Y = a_0 + a_1 \frac{1}{X} + u \qquad (1.4)$$

Новая переменная: $z = \frac{1}{X}$

В результате подстановки получим уравнение парной регрессии в виде:

$$Y = a_0 + a_1 z + u$$

Обобщенная модель нелинейная по переменным

Модели параболического вида нашли применение при моделировании:

- зависимости спроса от цен

- зависимости спроса от дохода (кривые Энгеля)

- спрос на предметы роскоши от дохода (функции Торнквиста)

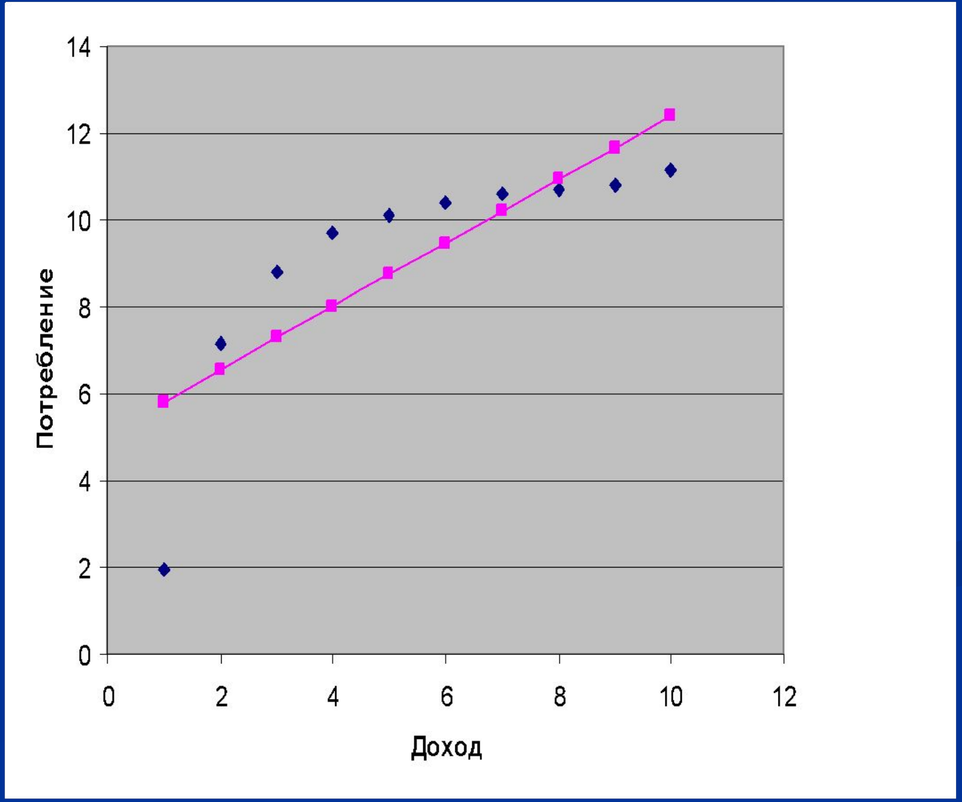
- уровня относительного изменения заработной платы в зависимости от относительного изменения уровня безработицы (кривая Филлипса)

Пример построения функции Энгеля

Се-мья	Потребление в фунтах (Y)	Доход в (тыс$)	(Z)
1	1,93	1	1,000
2	7,13	2	0,500
3	8,78	3	0,333
4	9,69	4	0,250
5	10,09	5	0,200
6	10,42	6	0,167
7	10,62	7	0,143
8	10,71	8	0,125
9	10,79	9	0,111
10	11,13	10	0,100

1. Построение линейной модели парной регрессии

$$\tilde{Y} = 5.09 + 0.73x \qquad R^2 = 0.64$$
$$(1.23) \quad (0.2) \qquad \sigma_u = 1.79$$



Пример построения функции Энгеля

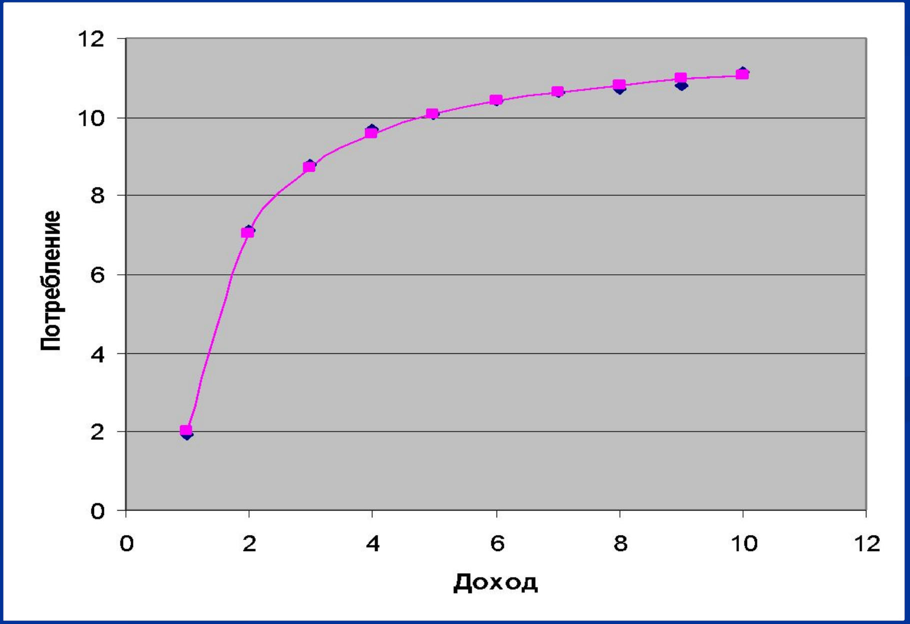
Се-мья	Потребление в фунтах (Y)	Доход в (тыс $)	(Z)
1	1,93	1	1,000
2	7,13	2	0,500
3	8,78	3	0,333
4	9,69	4	0,250
5	10,09	5	0,200
6	10,42	6	0,167
7	10,62	7	0,143
8	10,71	8	0,125
9	10,79	9	0,111
10	11,13	10	0,100

2. Построение гиперболической модели

$$Y = 12.08 - 10.08z \qquad R^2 = 0.9989$$

$$(0.04) \quad (0.12)$$

$$Y = 12.08 - \frac{10.08}{x}$$



Пример построения функции Энгеля

Меняется экономический смысл параметров модели:

-Линейная модель a_0 – минимально необходимое потребление, a_1 – предельное потребление

- Гиперболическая модель: a_0 – максимальное потребление, a_1 – экономической интерпретации не имеет

Предельное потребление равно:

$$\frac{dY}{dx} = -a_1 \frac{1}{x^2}$$

Эластичность:

$$\varepsilon = \frac{dY}{dx}\frac{x}{Y} = -\frac{a_1}{a_0 x + a_1}$$

Пример временного ряда

3. Временные ряды (динамические модели)

Например вида:

$$Y = a_0 + a_1 f(t) + a_2 sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + a_3 sin\left(\frac{2\pi}{2T}t\right) + a_3 sin\left(\frac{2\pi}{3T}t\right) + u$$

где f(t) – функция временного тренда

T – период внутри которого производится моделирование

Степенные модели

Степенная модель нелинейна по параметрам

$$Y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} (1+u) \quad (2.1)$$

1. Метод линеаризации – логарифмирование с последующим введением новых переменных:

$$log(Y) = log(a_0) + a_1 log(x_1) + a_2 log(x_2) + log(1+u) \quad (2.2)$$

2. Вводятся новые переменные и параметры:

$$Y^* = log(Y) \quad z_1 = log(x_1) \quad z_2 = log(x_2) \quad \varepsilon = log(1+u) \quad b_0 = log(a_0) \quad b_1 = a_1 \quad b_2 = a_2$$

В новых переменных исходное уравнение принимает вид уравнения множественной регрессии:

$$Y^* = b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + \varepsilon \quad (2.3)$$

Степенные модели

3. Оцениваются параметры b_0, b_1, b_2 – методом наименьших квадратов и проверяются гипотезы о выполнении предпосылок теоремы Гаусса-Маркова для модели (2.3)

4. Осуществляется возврат к исходной модели (2.1):

$$a_0 = e^{b_0} \qquad a_1 = b_1 \qquad a_2 = b_2$$

В частном случае, когда в модели присутствует одна экзогенная переменная модель называют двойной логарифмической

Экономическая интерпретация параметров двойной логарифмической модели

Двойная логарифмическая модель:

$$Y = a_0 x^{a_1} \qquad (2.4)$$

Дифференцируем (2.4) по x

$$\frac{dY}{dx} = a_0 a_1 x^{(a_1 - 1)} = a_0 a_1 x^{(a_1 - 1)} \frac{x}{x} = a_1 \frac{Y}{x}$$

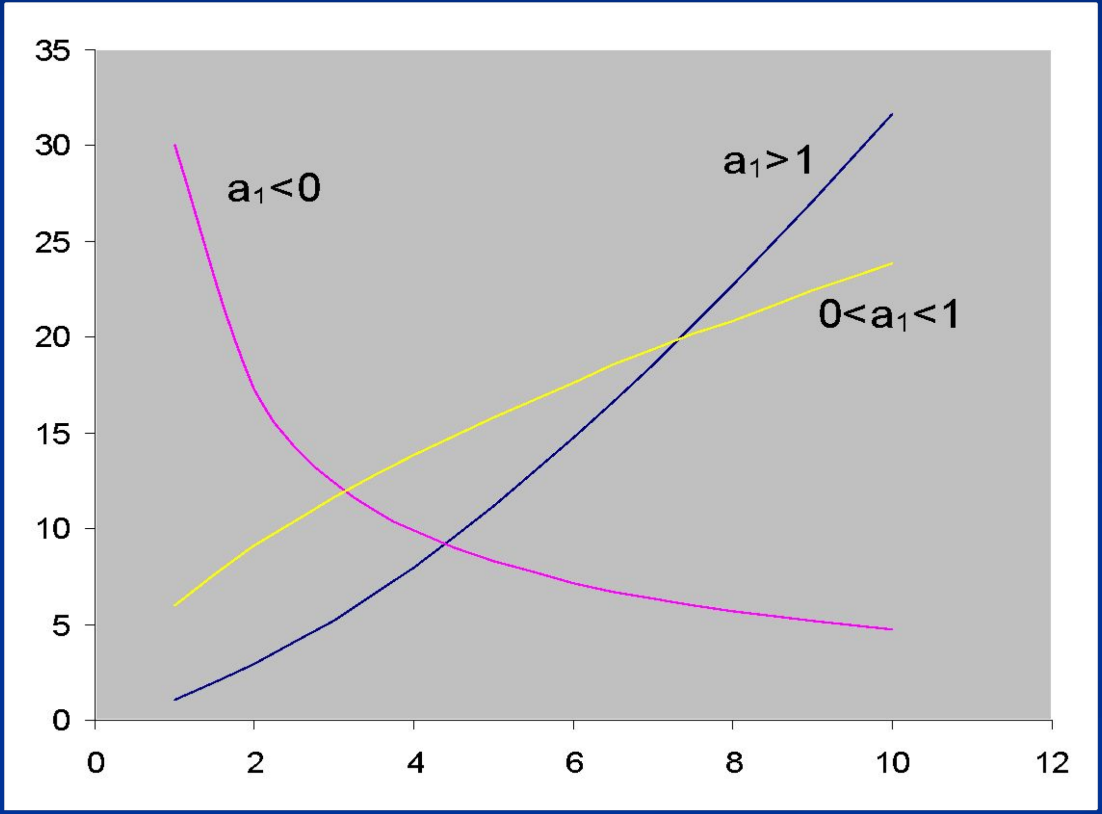
Откуда получаем, что:

$$a_1 = \frac{dY}{dx} \frac{x}{Y}$$

Параметр a_1 имеет смысл эластичности переменной Y по переменной x

Степенные модели

Виды кривых, описываемых с помощью степенных моделей



Степенные модели применяются при моделировании объектов с постоянной эластичностью

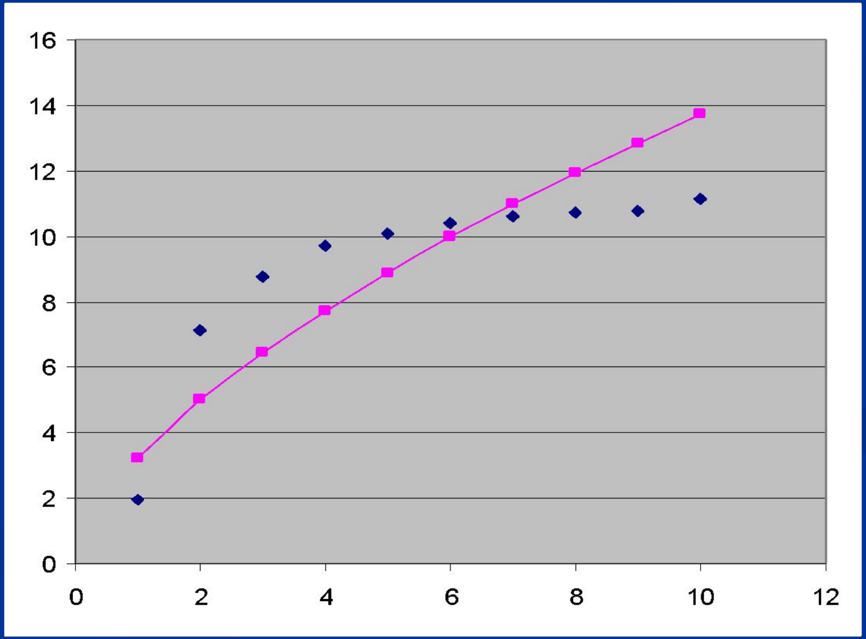
Пример применения степенной модели

Потреб ление в Фунтах (Y)	Доход в (тыс $) (X)	Z= ln(x)	Y*= ln(Y)
1,93	1	0,000	0,658
7,13	2	0,693	1,964
8,78	3	1,099	2,172
9,69	4	1,386	2,271
10,09	5	1,609	2,312
10,42	6	1,792	2,344
10,62	7	1,946	2,363
10,71	8	2,079	2,371
10,79	9	2,197	2,379
11,13	10	2,303	2,410

Модель:

$$Y^* = 1.76 + 0,627\, ln(z) + \varepsilon \qquad R^2 = 0.747$$

$$Y = 3.24\, X^{0.627}(u) \qquad \sigma_\varepsilon = 0.28$$



Показательные функции в моделях

Показательная (экспоненциальная) Модель

$$Y = a_0 e^{a_1 X}(1+u) \qquad (3.1)$$

1. Метод линеаризации - логарифмирование

$$ln(Y) = ln(a_0) + a_1 X + ln(1+u) \qquad (3.2)$$

2. Введение новых переменных и параметров:

$$Y^* = ln(Y) \quad b_0 = ln(a_0) \quad b_1 = a_1 \quad \varepsilon = ln(1+u)$$

3. Оценка линейной регрессионной модели

$$Y^* = b_0 + b_1 X + \varepsilon$$

4. Обратный переход к исходной модели (3.1)

Показательные функции в моделях

Экономическая интерпретация коэффициентов модели

Дифференцируем уравнение (3.1) по X

$$\frac{dY}{dx} = a_0 e^{a_1 x} a_1 = a_1 Y$$

Экономический смысл коэффициента a_1 в модели (3.1) – темп роста переменной Y

Коэффициент a_0 – начальное значение переменной Y

Показательные функции находят применение при моделировании процессов с постоянным темпом роста

Полулогарифмические модели

Экспоненциальную модель (3.1) в виде (3.2) называют также полулогарифмической.

К полуэкспоненциальным относят также модель вида:

$$Y = a_0 + a_1 ln(x) + \varepsilon \qquad (3.3)$$

С помощью моделей вида (3.3) описывают процессы, обладающие свойством насыщения. Например, кривые Энгеля для товаров повседневного спроса.

Кинематические функции Перла-Рида

Вид функции:

$$Y = a_0 e^{a_1 x} x^{a_2} (1+u) \qquad (4.1)$$

1. Способ линеаризации - логарифмирование

$$ln(Y) = ln(a_0) + a_1 x + a_2 ln(x) + ln(1+u) \qquad (4.2)$$

2. Вод новых переменных

$$Y^* = ln(Y) \quad a^*{}_0 = ln(a_0) \quad z_1 = x \quad z_2 = ln(x) \quad \varepsilon = ln(1+u)$$

3. Переход к модели множественной регрессии в новых переменных

$$Y^* = a_0^* + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \varepsilon \qquad (4.3)$$

Сложная экспоненциальная модель

Общий вид модели

$$Y = e^{\sum\left(a_i f_i(x)\right)}(1+u) \qquad (5.1)$$

Линеаризация в два этапв:

1. Логарфмирование

$$ln(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(X) + ln(1+u) \qquad (5.2)$$

После введения переменной Y*=ln(Y), получится модель типа (1.1)