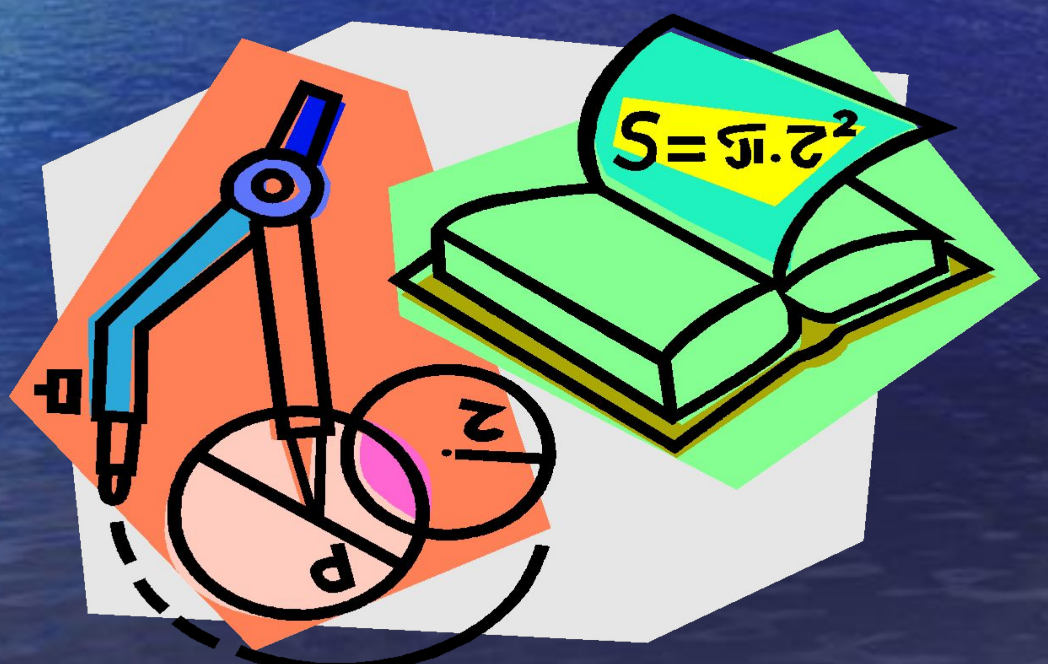
” Построение правильных многоугольников циркулем и линейкой ”



Цель урока

- Создать условия для более глубокого усвоения знаний по теме, высокого уровня обобщения и систематизации знаний.

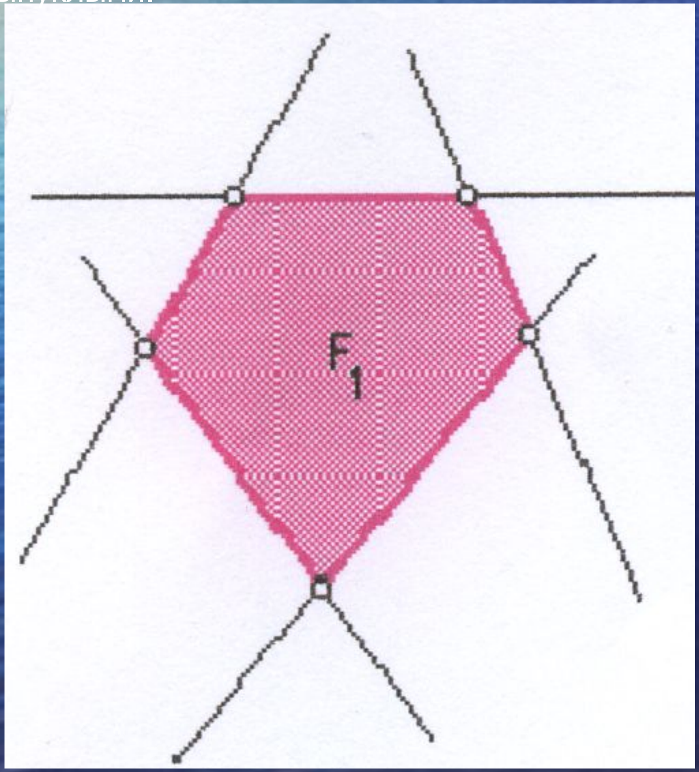
Методические задачи

- Выяснить , всякий ли правильный многоугольник можно построить с помощью циркуля и линейки;
- Повторить способы построения правильных многоугольников и познакомить с новыми способами;
- Познакомить с перспективными технологиями и новыми разработками построения правильных многоугольников;
- Показать применение правильных многоугольников в окружающем нас мире.

Выпуклые и невыпуклые многоугольники

- **Многоугольник- это фигура, составленная из отрезков так, что смежные отрезки не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек.**

- **Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от любой прямой, содержащей его сторону.** На рисунке 1 многоугольник F1 выпуклый, а многоугольник F2 невыпуклый.
- **Многоугольник называется невыпуклым, если прямая, содержащая сторону многоугольника разбивает его на две части.**
  Все треугольники выпуклы, а многоугольники с большим числом сторон могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми.



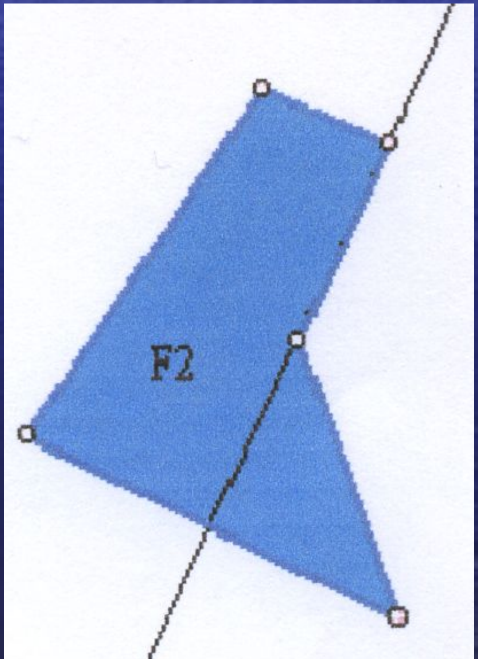


рис. 1

Правильные многоугольники

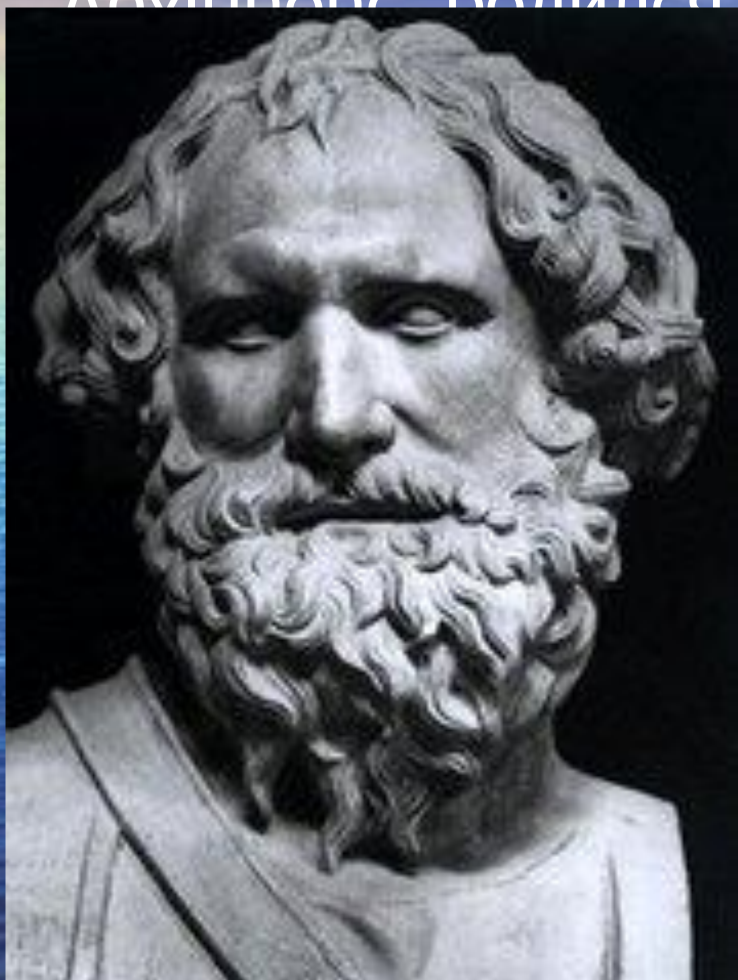
- На рисунке 1 представлены правильный треугольник , шестиугольник и четырех угольник.

рис. 1

Великий математик, механик и инженер древности

Архимед

(греч.(греч. Αρχιμήδης, родился 287 до н. э.(греч. Αρχιμήδης, родился 287 до н. э. - 212 до н. э.)



- Периметр (сумма длин сторон) правильного n-угольника при заданном числе сторон n наиболее близок к длине его описанной окружности среди всех вписанных в нее n-угольников; таким же свойством он обладает и по отношению к вписанной окружности. Поскольку вычисление длины окружности считалось в древности весьма важной задачей, много усилий было затрачено на то, чтобы научиться оценивать периметр вписанной в нее правильного многоугольника при достаточно больших n. Особенно преуспел в этом Архимед.

Евклид

(родился в 330 году до н. э. в небольшом городке Тире, недалеко от Афин).

- Впрочем, правильные многоугольники привлекали внимание древнегреческих учёных задолго до Архимеда. Пифагорейцы, в философии которых числа играли главную роль, придавали очень большое значение задаче о делении окружности на равные части, т. е. о построении правильного вписанного многоугольника. В "Началах" Евклида приводятся построения с помощью циркуля и линейки правильных многоугольников с числом сторон от трёх до шести, а также пятнадцати угольника. Этим последним особенно интересовались: согласно измерениям древних астрономов, угол наклона плоскости эклиптики к экватору равнялся 1/5 полного угла, т.е. 24°(истинное значение чуть меньше -23°27'). Задача о построение правильных многоугольников была полностью решена лишь спустя два тысячелетия.

Основные формулы.

Вычисление угла правильного многоугольника :

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$

Сторона правильного многоугольника :

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

Площадь правильного многоугольника :

$$S = \frac{1}{2}Pr$$

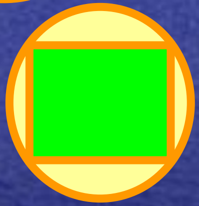
Радиус вписанной окружности :

$$r = R\cos\frac{180^\circ}{n}$$

Применение формул

- Для правильного треугольника $$a_3 = R\sqrt{3}$$

- Для правильного четырехугольника $$a_4 = R\sqrt{2}$$

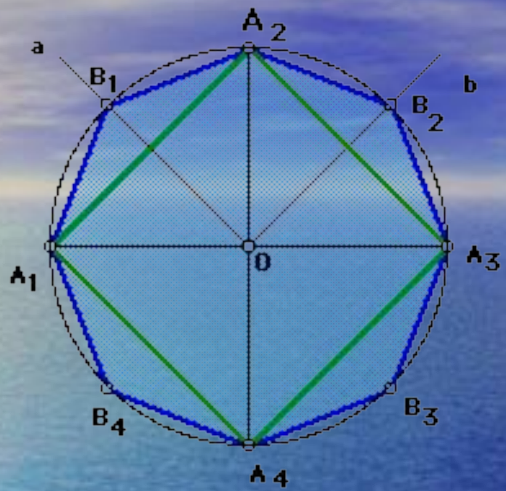


- Для правильного шестиугольника $$a_6 = R$$

Теорема. **Правильные одноимённые многоугольники подобны и стороны их относятся как радиусы или апофемы**.

Следствие. **Периметры правильных одноимённых многоугольников относятся как радиусы или как апофемы**.

Любой ли правильный многоугольник можно построить с помощью циркуля и линейки ?

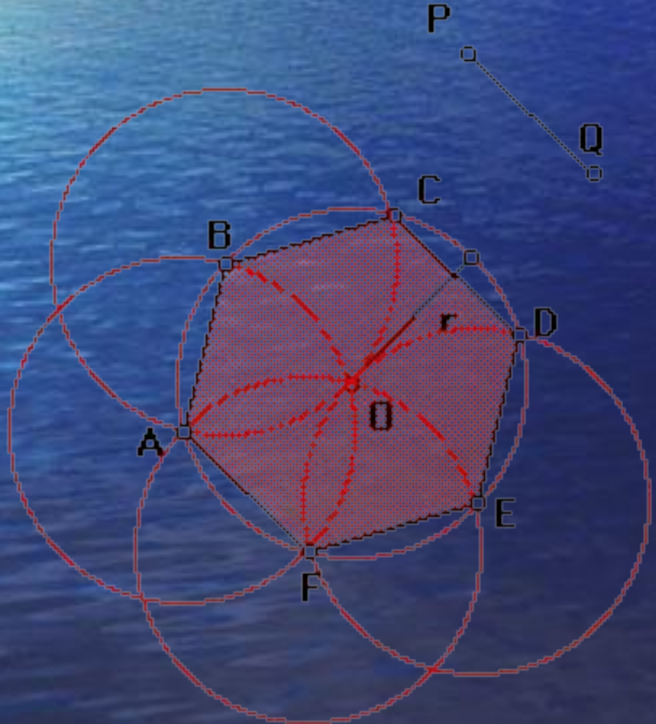


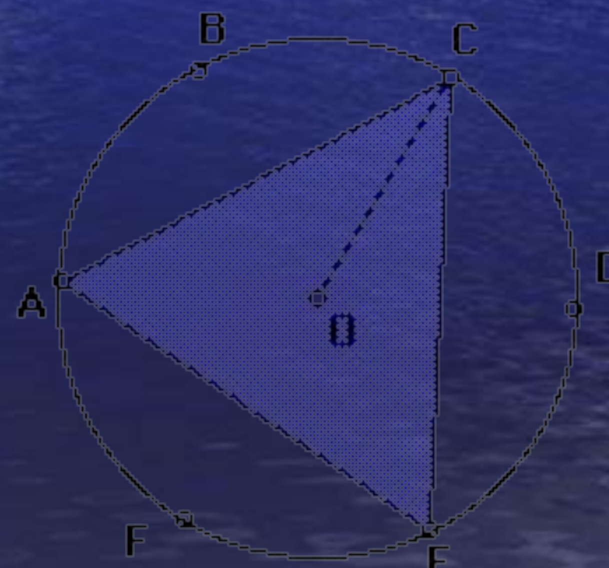
- **Если построен какой-нибудь правильный n-угольник, то с помощью циркуля и линейки можно построить правильный 2n-угольник.**
- Опишем около данного многоугольника A1, A2… An окружность. Для этого построим серединные перпендикуляры a и b к отрезкам A1 A2 и A2 A3 (на рисунке n= 4). Они пересекаются в некоторой точке O. Окружность с центром O радиуса OA1 является описанной около многоугольника A1 A2…An. Построим теперь середины B1, B2, …, Bn соответственно дуг A1 A2, A2A3,…, An A1 следующим образом. Точки B1и B2 получаются как точки пересечения прямых a и b с дугами A1 A2 и A2 A3. Для построения точки B3 проведём окружность с центром A3 радиуса A3 B2. Одна из точек пересечения этой окружности с описанной окружностью есть точка B2, а другая - искомая точка B3. Аналогично строятся точки B4,…, Bn. Соединив каждую из точек B1,B2,…, Bn отрезками с концами соответствующей дуги, получим 2n-угольник A1B1A2B2A3…An Bn, который является правильным в силу теоремы о вписанном в окружность многоугольнике
- На рисунке по данному правильному четырёхугольнику A1A2A3A4 построен правильный восьмиугольник A1B1A2…B4. Итак, если мы можем построить циркулем и линейкой правильный n-угольник, где n - данное натуральное число, то можно построить правильные 2n-угольник, 4n-угольник и, вообще, (2^k*n)-угольник, где k - любое натуральное число.

Построение правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки .

Задача №1. Построение правильного шестиугольника и треугольника.

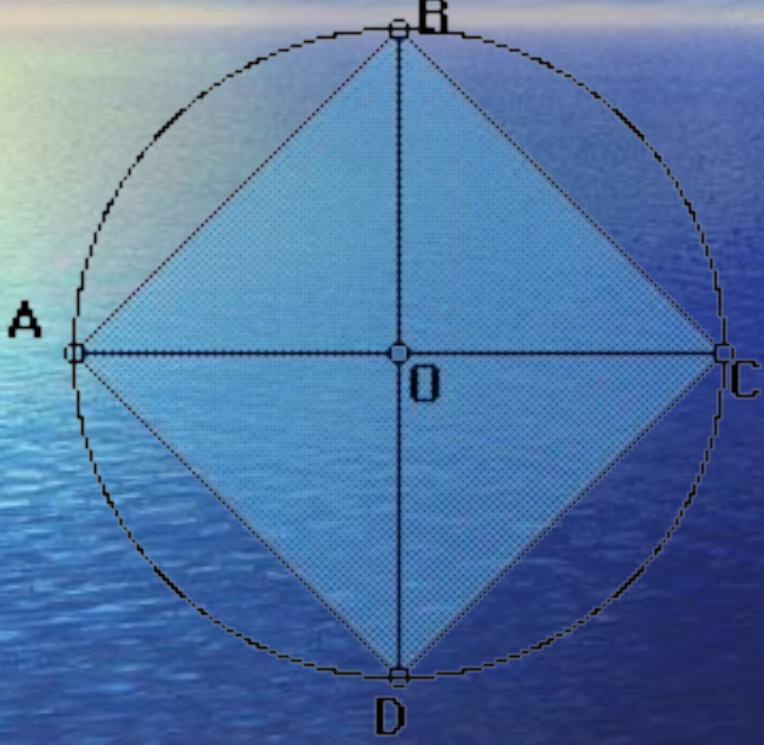
Согласно формуле an= 2R*sin180°/n сторона AB правильного шестиугольника равна радиусу R описанной окружности. Поэтому, если задан произвольный отрезок PQ, то для построения правильного шестиугольника, стороны которого равны PQ, достаточно построить окружность радиуса PQ, взять на ней произвольную точку A и, не меняя раствора циркуля, отметить на этой окружности последовательно точки B, C, D, E, F так, чтобы AB=BC=…=EF=PQ. Проведя затем отрезки AB, BC, CD, DE, EF, FA, получим шестиугольник ABCDEF, который согласно теореме о правильном многоугольнике является правильным, причем его стороны равны отрезку PQ. Для того, чтобы построить правильный треугольник нужно соединить точки данного шестиугольника через одну, значит соединим точки A,C и E. Треугольник ACE- искомый.

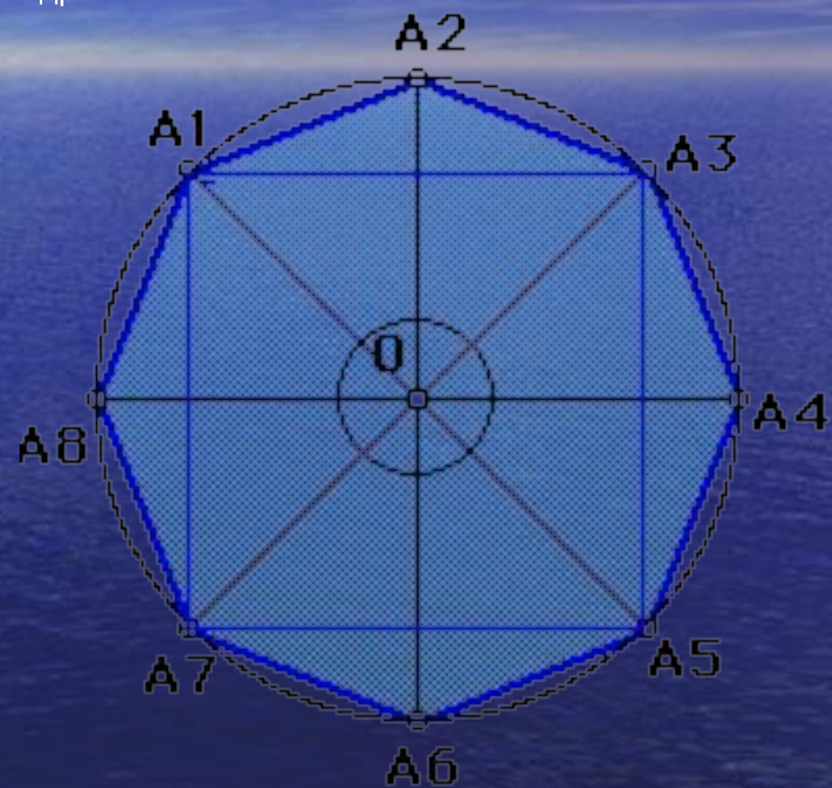




Задача №2. Построение правильного четырехугольника и восьмиугольника.

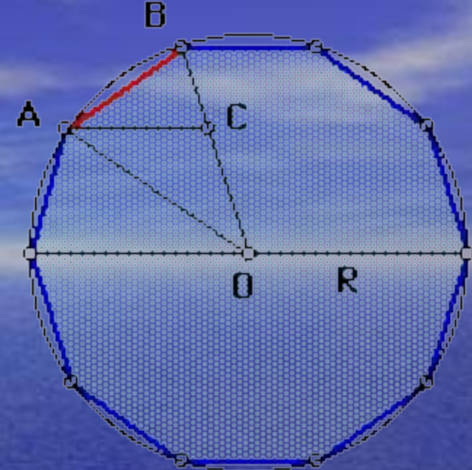
Пусть w-данная окружность с центром в точки O и радиусом R. Через точку O проведем диаметр AC и к этому диаметру проведем серединный перпендикуляр, который пересечет окружность w в двух точках B и D.Теперь последовательно соединим точки A,B,C и D. ABCD-искомый квадрат.





Для того, чтобы построить правильный восьмиугольник нужно сначала построить правильный четырехугольник, например, A1A3A5A7-квадрат, потом построить биссектрисы углов A1OA3, A3OA5, A5OA7, A7OA1, которые пресекут окружность в точках A2, A4, A6, A8 соответственно, затем последовательно соединить точки A1,A2,A3, A4,A5,A6,A7,A8. A1A2...A8-искомый восьмиугольник.

Задача №3. Найти углы правильного десятиугольника и выразить его сторону через радиус R описанной окружности.



Решение. По формуле an=(n-2)/n*180° находим угол a10 правильного десятиугольника:
a10=(10-2)/10*180°= 144°.

Пусть AB- сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R с центром в точке O.
По формуле an= 2R*sin180°/n AB=2R*sin18°. Получим другое выражение для стороны AB. С этой целью рассмотрим треугольник ABO и проведем его биссектрису AC. Так как угол AOB= 360°/10= 36°, то угол OAB= (180°-36°)/2= 72°, угол BAC= 1/2*угол OAB= 1/2*72°= 36°.

Отсюда следует, что треугольник AOB~ треугольнику CAB по двум углам (угол AOB = угол BAC= 36°, угол B -общий). Поэтому AB=AC и AB/OB= BC/AB. Далее, треугольник AOC равнобедренный (угол AOC= угол OAC= 36°), следовательно, AC=OC.

Итак, AB=AC=OC=R-BC, откуда BC=R-AB, и пропорцию AB/OB=BC/AB можно записать в виде AB/R=(R-AB)/AB. Отсюда получаем квадратное уравнение относительно AB:

$AB^2 + R*AB - R^2 = 0$. Решая это уравнение и учитывая, что AB>0, находим AB= $R/2(\sqrt{5}-1)$

(*Замечание.* Сравнивая полученное выражение для AB с равенством AB=2R*sin18°, находим значение sin18°:
$\sin 18° = (\sqrt{5}-1)/4$

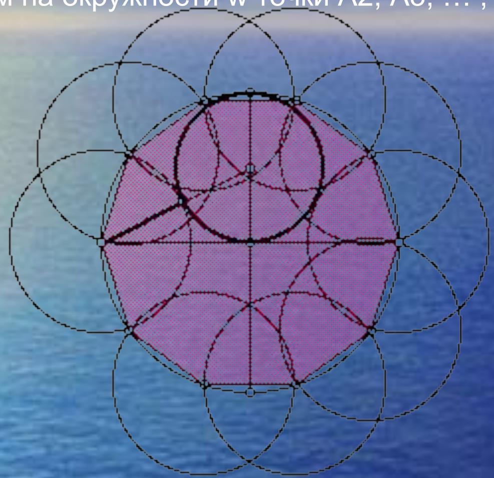
Задача 4. Построение правильного десятиугольника и пятиугольника.

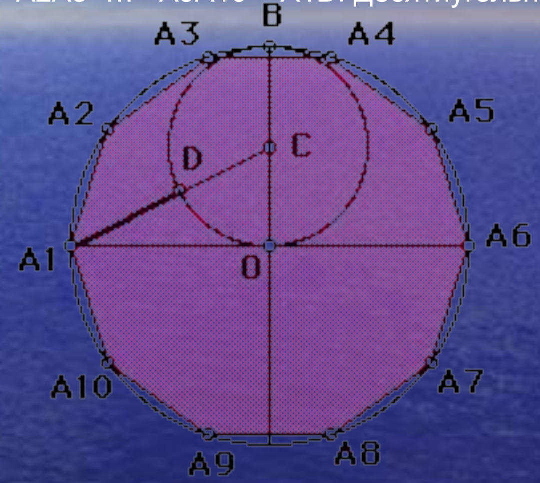
Пусть w- данная окружность радиуса R с центром O. Построим сначала правильный десятиугольник, вписанный в окружность w. Для этого проведем взаимно перпендикулярные радиусы OA1 и OB окружности w и на отрезке OB как на диаметре построим окружность с центром C. Отрезок A1C пересекает эту окружность в некоторой точке D. Докажем, что отрезок A1D равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность w. В самом деле,

$$A_1D=A_1C-R/2,\quad A_1C=\sqrt{A_1O^2+OC^2}=\sqrt{R^2+(R/2)^2}=\sqrt{5R^2/4}=R\sqrt{5}/2$$

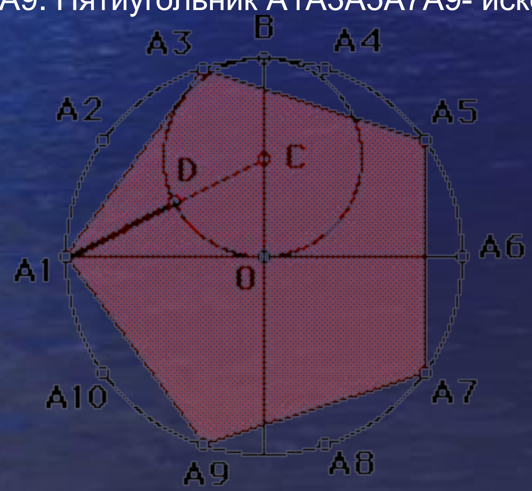
$$A_1D=R\sqrt{5}/2-R/2=R/2(\sqrt{5}-1)$$

Далее отметим на окружности w точки A2, A3, … , A10 так, что A1A2= A2A3=… =A9A10 = A1D. Десятиугольник A1A2…A10- искомый.

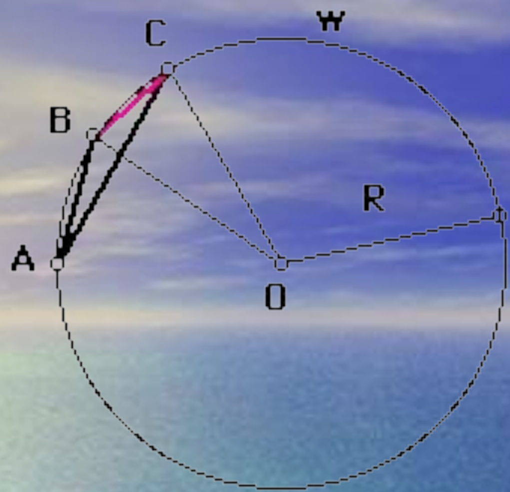




Для того, чтобы построить правильный пятиугольник нужно соединить точки данного десятиугольника через одну, значит соединим точки A1,A3,A5,A7,A9. Пятиугольник A1A3A5A7A9- искомый.

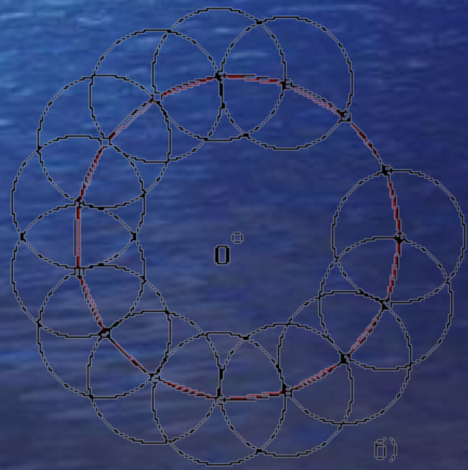


Задача 5. В данную окружность вписать правильный пятнадцатиугольник.

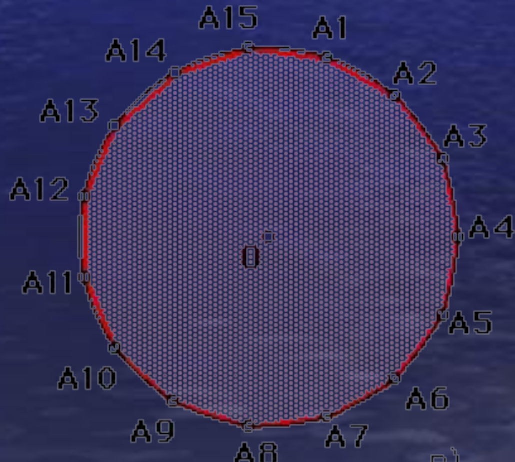


а)

Решение. Пусть w- данная окружность радиуса R с центром O и AB - сторона правильного вписанного в эту окружность десятиугольника, а AC- сторона правильного вписанного шестиугольника, причем точки B и C расположены на окружности так, как показано на рисунке а). Тогда, очевидно, дуга AB=36°, дуга AC=60° , поэтому дуга BC=24° . Следовательно, угол BOC=24°=360°/15°, и, значит, отрезок BC- сторона правильного пятнадцатиугольника, вписанного в окружность w. Так как мы умеем строить циркулем и линейкой отрезки AB=((корень из 5-1)/2)*R и AC=R (рис.б)), то можем построить отрезок BC.
Возьмем далее на окружности w произвольную точку A1 и, пользуясь циркулем, отметим на этой окружности последовательно точки A2, A3,…, A15 так, что A1A2 = A2A3=…= A14A15= BC. Проведя затем отрезки A1A2, A2A3,…, A14A15, A15A1, получим искомый правильный пятнадцатиугольник A1A2…A15 (рис. в)).



б)



в)

А так ли уж важно изучать и знать сведения о правильных многоугольниках? В каких житейских ситуациях можно встретиться с правильными многоугольниками?

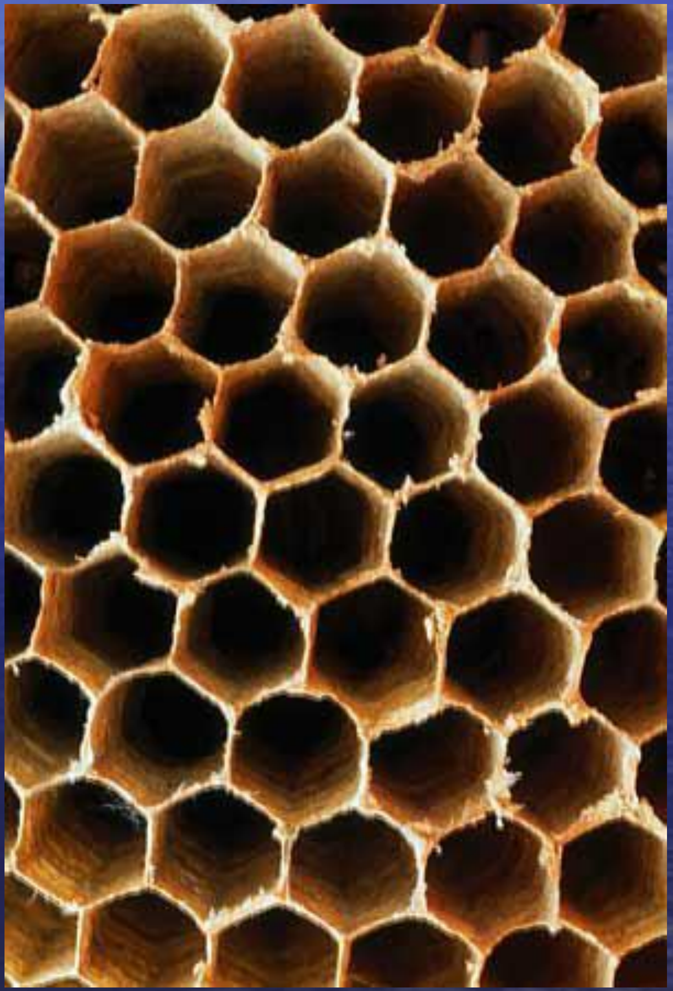
Историческая справка.

В математике паркетом называют «замощение» плоскости повторяющимися фигурами без пропусков и перекрытий. Простейшие паркеты были открыты пифагорейцами около 2500 лет тому назад. Они установили, что вокруг одной точки могут лежать либо шесть правильных многоугольников (3600: 600 = 6), либо четыре квадрата (3600: 900 = 4), либо три правильных шестиугольника (3600: 1200 = 3), так как сумма углов с вершиной этой точки равна 3600. Вы не задумывались вот над таким вопросом: Почему пчелы «выбрали» себе для ячеек на сотах форму правильного шестиугольника?

Пчелы – удивительные творения природы. Свои геометрические способности они проявляют при построении своих сот. Если возьмем равносторонний треугольник, квадрат и правильный шестиугольник одинаковой площади (показываю модели), то периметр шестиугольника будет наименьшим. (Р3 = 45,9 см., Р4 = 40 см., Р6 = 37,8 см.). Строя шестиугольные ячейки пчелы наиболее экономно используют площадь внутри небольшого улья и воск для изготовления ячеек.

Причем пчелиные соты представляют собой не плоский, а пространственный паркет, поскольку заполняют пространство так, что не остается просветов.

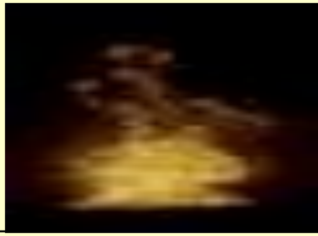
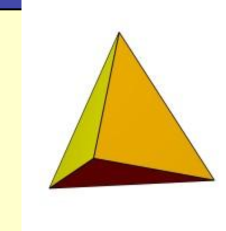
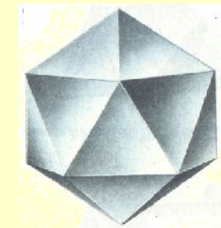
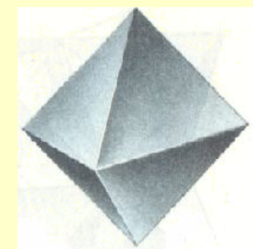
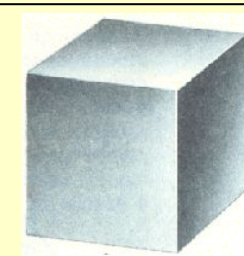
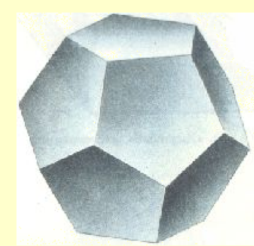
И как не согласиться с мнением пчелы из сказки «Тысяча и одна ночь»: *«Мой дом построен по законам самой строгой архитектуры. Сам Евклид мог бы поучиться, познавая геометрию моих сот».*



Петропавловская крепость

Платоновы тела

- Платоновы тела - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников.
- Существует лишь пять выпуклых правильных многогранников - тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями. Доказательство этого факта известно уже более двух тысяч лет; этим доказательством и изучением пяти правильных тел завершаются "Начала" Евклида.
- Существование только пяти правильных многогранников относили к строению материи и Вселенной. Пифагорейцы, а затем Платон полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: огня, земли, воздуха и воды
- .Согласно их мнению, атомы основных элементов должны иметь форму различных Платоновых тел.

 огонь	тетраэдр 
 вода	икосаэдр 
 воздух	октаэдр 
 земля	гексаэдр 
 вселенная	додекаэдр 

Многогранники в искусстве

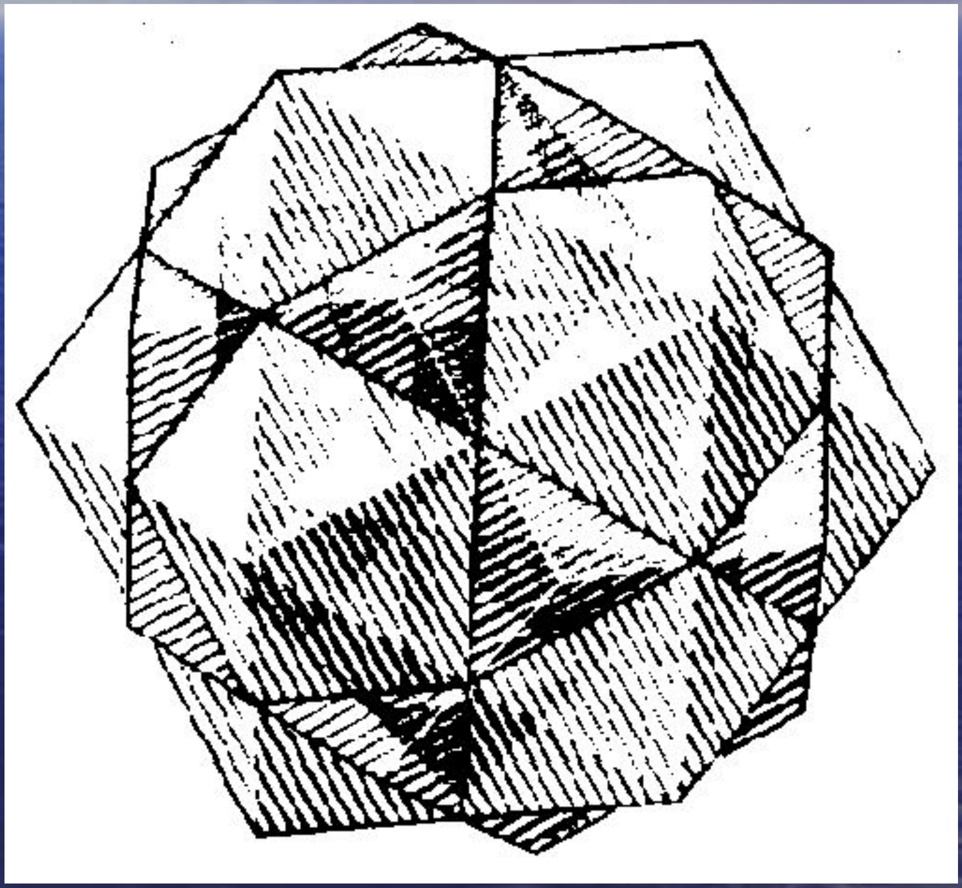
В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы. архитекторы, художники. Леонардо да Винчи (1452 -1519) например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал правильными и полуправильными многогранниками книгу Монаха Луки Пачоли "О божественной пропорции."

Знаменитый художник, увлекавшийся геометрией Альбрехт Дюрер (1471-1528) , в известной гравюре "Меланхолия ".на переднем плане изобразил додекаэдр.

Работы Эшера

Правильные геометрические тела - многогранники - имели особое очарование для Эшера. В его многих работах многогранники являются главной фигурой и в еще большем количестве работ они встречаются в качестве вспомогательных элементов

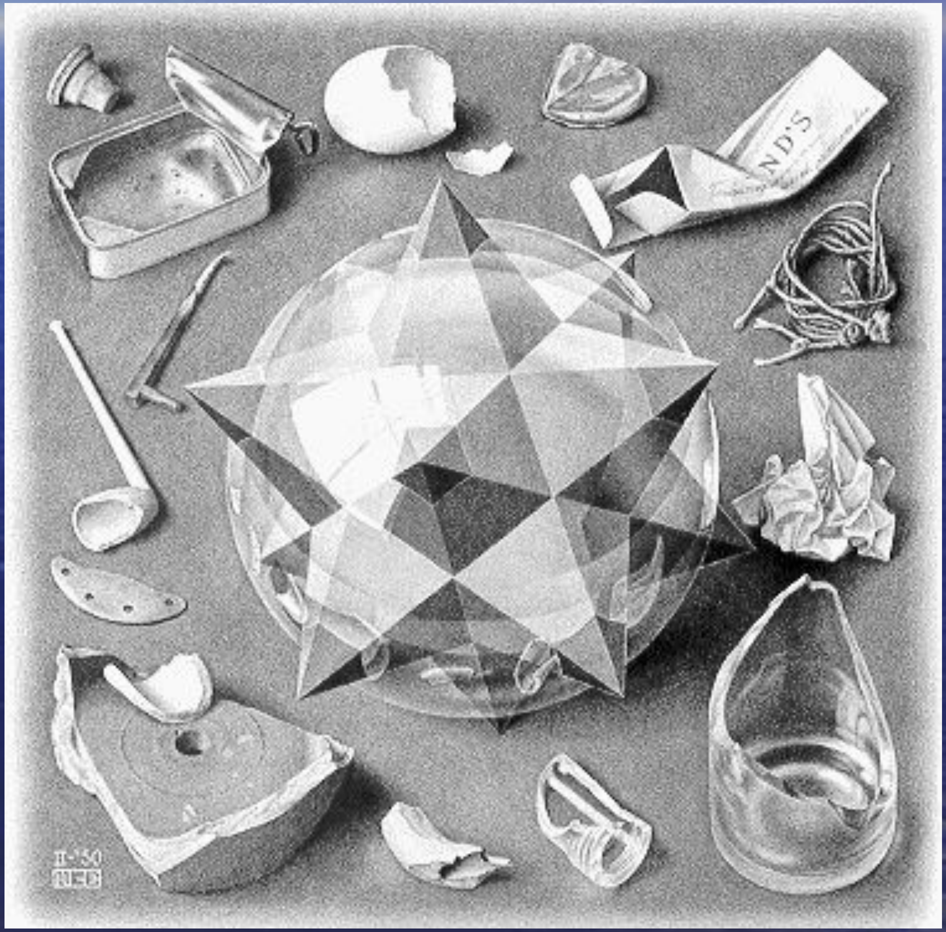
Существует лишь пять правильных многогранников, то есть таких тел, все грани которых состоят из одинаковых правильных многоугольников. Они еще называются телами Платона. Это - тетраэдр, гранями которого являются четыре правильных треугольника, куб с шестью квадратными гранями, октаэдр, имеющий восемь треугольных граней, додекаэдр, гранями которого являются двенадцать правильных пятиугольников, и икосаэдр с двадцатью треугольными гранями. На гравюре "Четыре тела" Эшер изобразил пересечение основных правильных многогранников, расположенных на одной оси симметрии, кроме этого многогранники выглядят полупрозрачными, и сквозь любой из них можно увидеть остальные.



"Порядок и хаос".

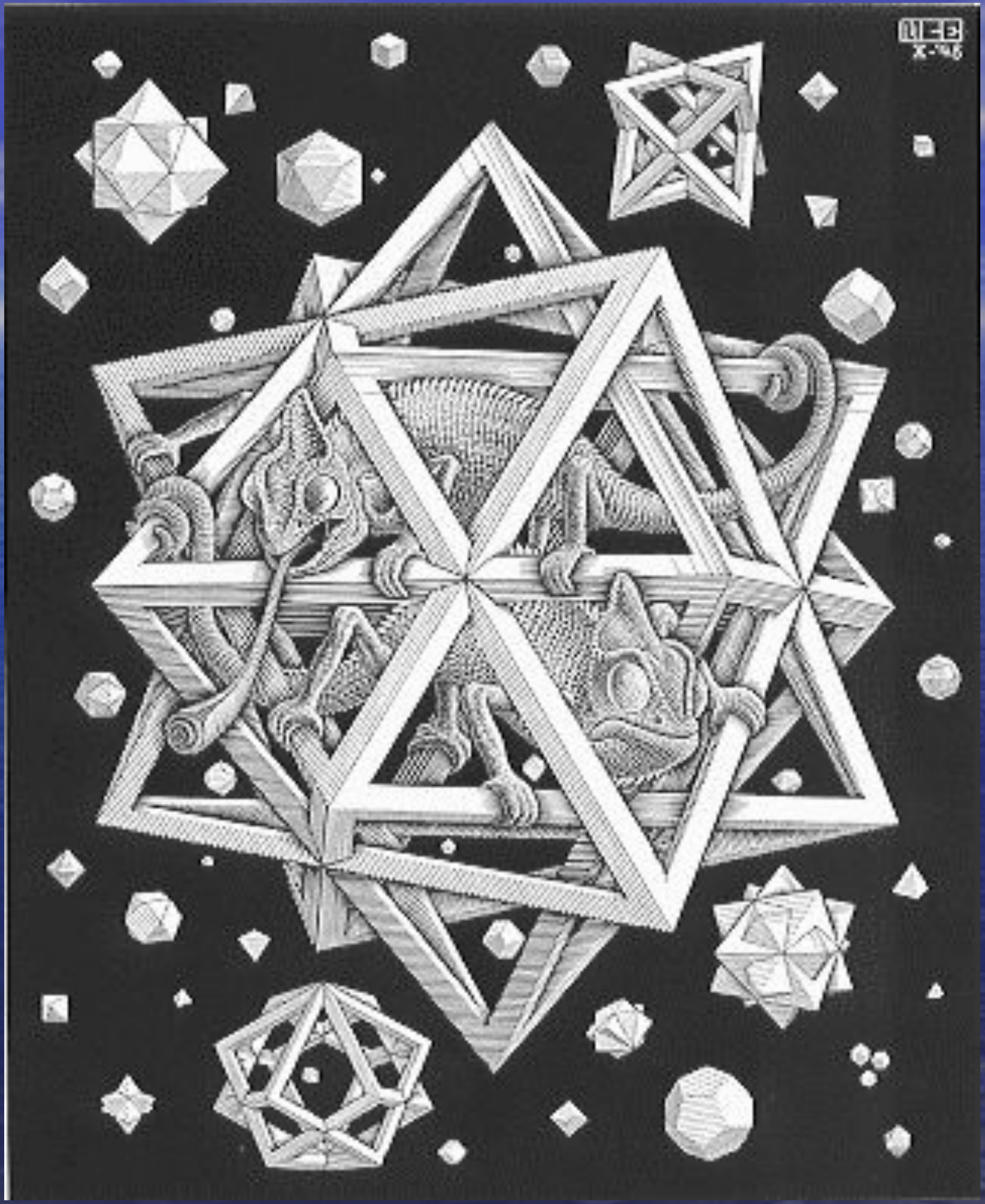
Большое количество различных многогранников может быть получено объединением правильных многогранников, а также превращением многогранника в звезду. Для преобразования многогранника в звезду необходимо заменить каждую его грань пирамидой, основанием которой является грань многогранника. Изящный пример звездчатого додекаэдра можно найти в работе "Порядок и хаос". В данном случае звездчатый многогранник помещен внутрь стеклянной сферы. Аскетичная красота этой конструкции контрастирует с беспорядочно разбросанным по столу мусором.

Заметим также, что анализируя картину можно догадаться о природе источника света для всей композиции - это окно, которое отражается левой верхней части сферы.



Гравюра "Звезды"

Фигуры, полученные объединением правильных многогранников, можно встретить во многих работах Эшера. Наиболее интересной среди них является гравюра "Звезды", на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров. Если бы Эшер изобразил в данной работе лишь различные варианты многогранников, мы никогда бы не узнали о ней. Но он по какой-то причине поместил внутрь центральной фигуры хамелеонов, чтобы затруднить нам восприятие всей фигуры. Таким образом нам необходимо отвлечься от привычного восприятия картины и попытаться взглянуть на нее свежим взором, чтобы представить ее целиком. Этот аспект данной картины является еще одним предметом восхищения математиков творчеством Эшера.



Спасибо за внимание

Дом. Задание: На альбомном листе начертить правильный треугольник, четырехугольник, шестиугольник, восьмиугольник, пятиугольник и десятиугольник.. Сдать во

вторник 26 февраля.