Курс высшей математики

УГТУ-УПИ
2004г.

Лекция 9

Поверхности второго порядка.

1. Основные понятия.

2. Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям.

1. Основные понятия.

Уравнением поверхности называется уравнение с тремя переменными

$$F(x,y,z) = 0, \qquad (1)$$

которому удовлетворяют координаты каждой точки, принадлежащей поверхности, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей поверхности.

Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность , уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$\mathbf{Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0, \quad (2)}$$

где не все коэффициенты при слагаемых второго порядка **(A,B,C,D,E,F)** равны одновременно нулю.

Т

Всякое уравнение (2), задающее невырожденную поверхность , путем преобразования координат можно привести к **каноническому виду** (при котором в уравнении поверхности отсутствуют слагаемые,содержащие смешанные произведения координат **xy, xz, yz**).

2. Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям.

Основным методом исследования формы поверхности по её уравнению является **метод сечений**, когда о форме поверхности судят по форме кривых, которые получаются при пересечении данной поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям :

$$x = const;\quad y = const;\quad z = const.$$

2.1 Эллипсоид.

Эллипсоидом называется поверхность второго порядка с каноническим уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ЭЛИПСОИДА МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ.

I. При $z = 0$ в сечении получим эллипс с полуосями $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\Gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

или

$$\Gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

В случае, когда $z = h$ в сечении получается тоже эллипс, но с полуосями $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{b}_1$:

$$\Gamma: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

или

$$\Gamma: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^{\;2}} + \dfrac{y^2}{b_1^{\;2}} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

здесь $a_1 = a \cdot \sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}; \; b_1 = b \cdot \sqrt{1 - \dfrac{h^2}{c^2}}.$

Если $0 < h < c$, то Г – *эллипс* с полуосями

$$a_1 = a \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} < a; \; b_1 = b \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} < b$$

если $h = c$, Г – *точка* с координатами $(0,0,c)$.

Если $h > c$, подкоренное выражение становится меньше нуля и исследуемая поверхность не имеет общих точек с рассматриваемой плоскостью.

Переменная Z содержится в уравнении во второй степени , значит плоскость $z = 0$ является ***плоскостью симметрии*** эллипсоида.

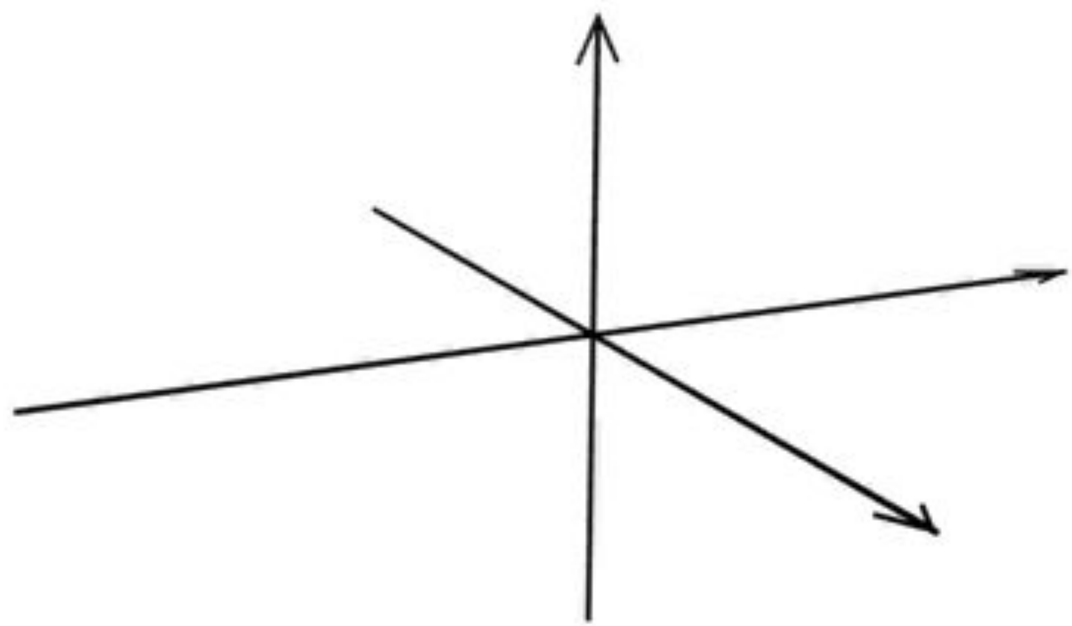
Точно также рассматриваются сечения эллипсоида другими плоскостями:

II. $x = const$

III. $y = const$

Выполненное исследование завершается построением чертежа:

Эллипсоид



2.2 Гиперболоиды.

2.2.1 Однополостный гиперболоид.

Однополостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка с каноническим уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

Исследование формы однополостного гиперболоида методом сечений.

I. Линия пересечения гиперболоида и плоскости $z = 0$ задается системой уравнений,

$$\Gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

определяющей ***эллипс*** с полуосями ***a*** и ***b***.

В сечении плоскостью $z = h$ имеем кривую

$$\Gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1{}^2} + \dfrac{y^2}{b_1{}^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

являющуюся также ***эллипсом*** с полуосями

$$a_1 = a \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}; \qquad b_1 = b \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$

II. Рассмотрим сечение поверхности плоскостью $x = 0.$

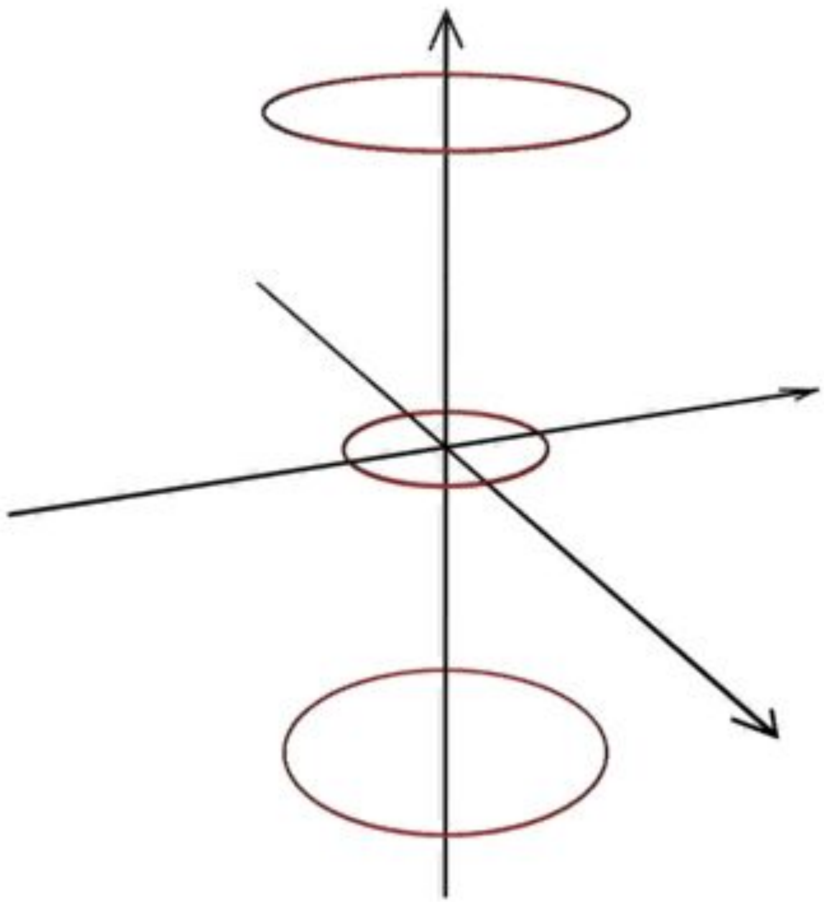
Уравнение линии пересечения

$$\Rightarrow \quad \Gamma: \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

задаёт ***гиперболу***, пересекающую ось OY.

III. Сечение плоскостью $y = 0$ задаёт ***гиперболу***, пересекающую ось OX.

Однополостный гиперболоид



2.2.2 ***Двухполостный гиперболоид.***

Двухполостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка с каноническим уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ДВУХПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ.

I. В сечении плоскостью $z = h$ имеем кривую

$$\Gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

где

$$a_1 = a \cdot \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}; \quad b_1 = b \cdot \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

Если $h > c$, Г – ***эллипс*** с полуосями $a_1,\ b_1$.

Если $h = c$, Г – точка (0,0,c).

Если $-c < h < c$ - нет точек пересечения.

II. Сечение плоскостью $x = 0$

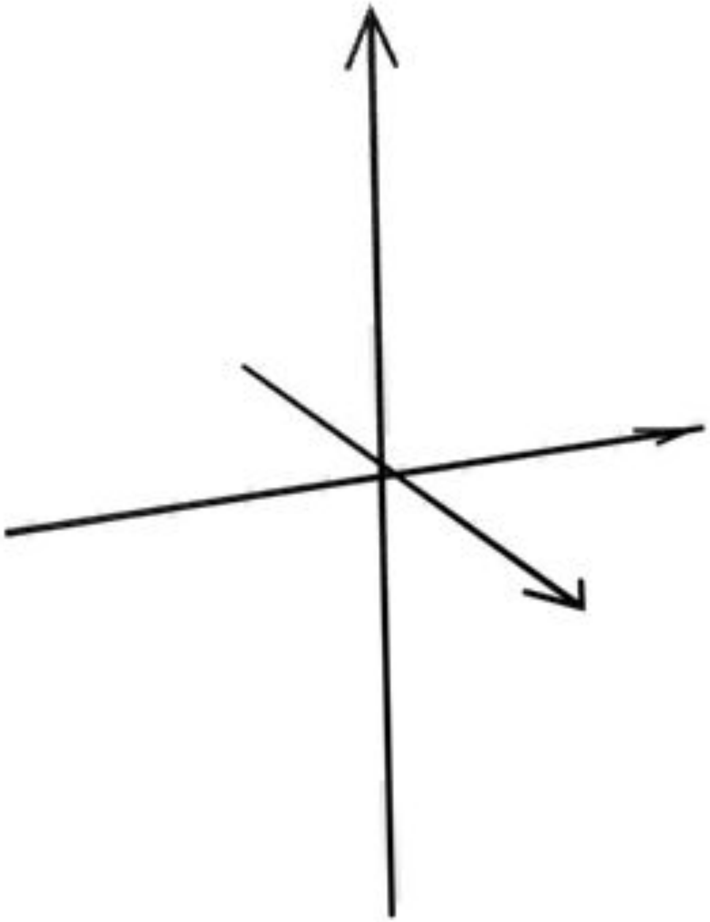
$$\Gamma : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0 \end{cases}$$

задает ***гиперболу***, пересекающую ось OZ.

III. Сечение плоскостью $y = 0$ также задает ***гиперболу***, пересекающую ось OZ.

Итоговый чертеж представлен на рисунке:

Двуполостный гиперболоид

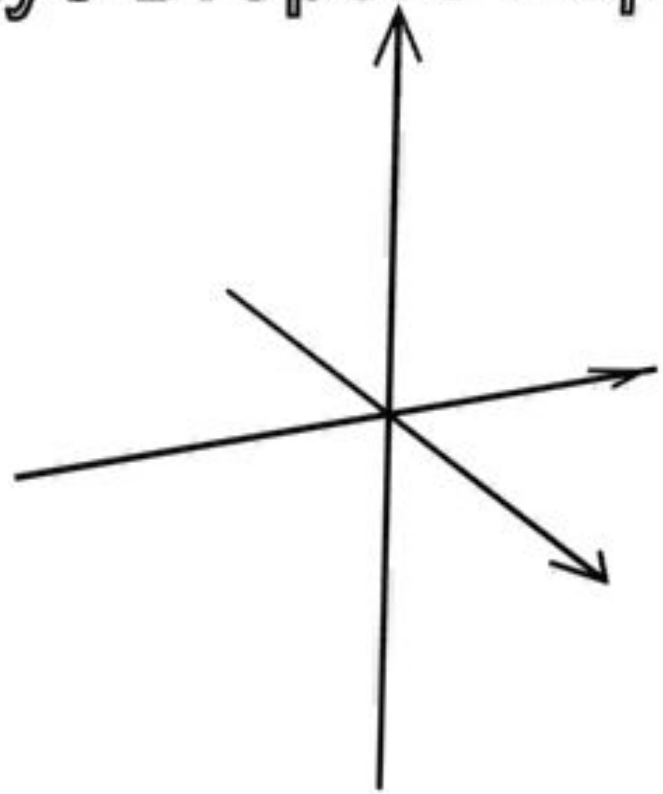


2.3 Конус.

Конусом второго порядка называется поверхность с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.}$$

Конус второго порядка



Замечание

Осью конуса, заданного рассматриваемым каноническим уравнением, является ось OZ.

Продольные сечения являются ***прямыми линиями****, поперечные сечения –* ***эллипсы***.

Если $a = b$, конус становится фигурой вращения.

2.4 Параболоиды.

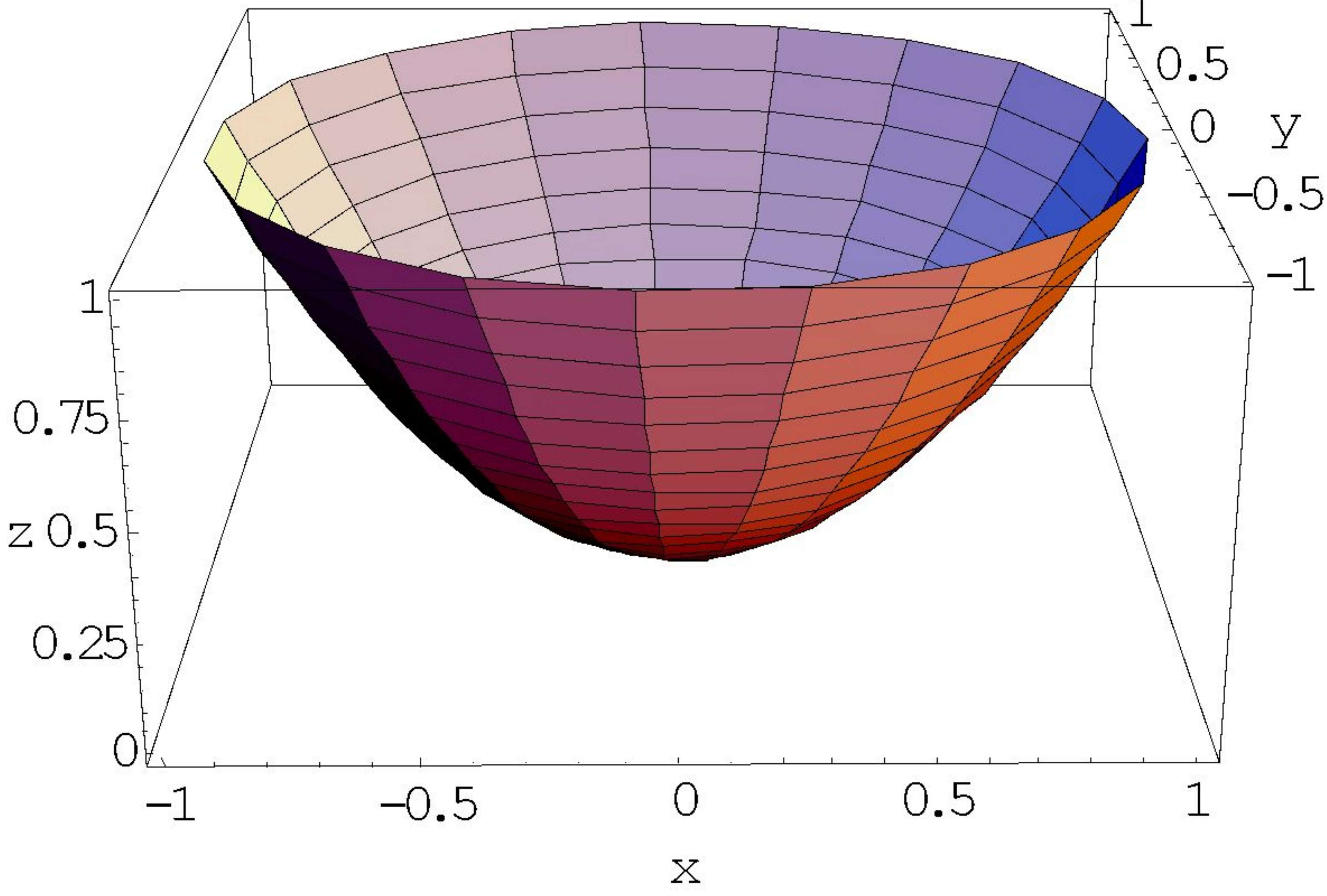
2.4.1 Эллиптический параболоид.

Эллиптическим параболоидом называется поверхность с каноническим уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z}$$

Его форма показана на рисунке:

Эллиптический параболоид



2.4.2 **Гиперболический параболоид.**

Гиперболическим параболоидом называется поверхность с каноническим уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z}$$

Исследование формы гиперболического параболоида методом сечений.

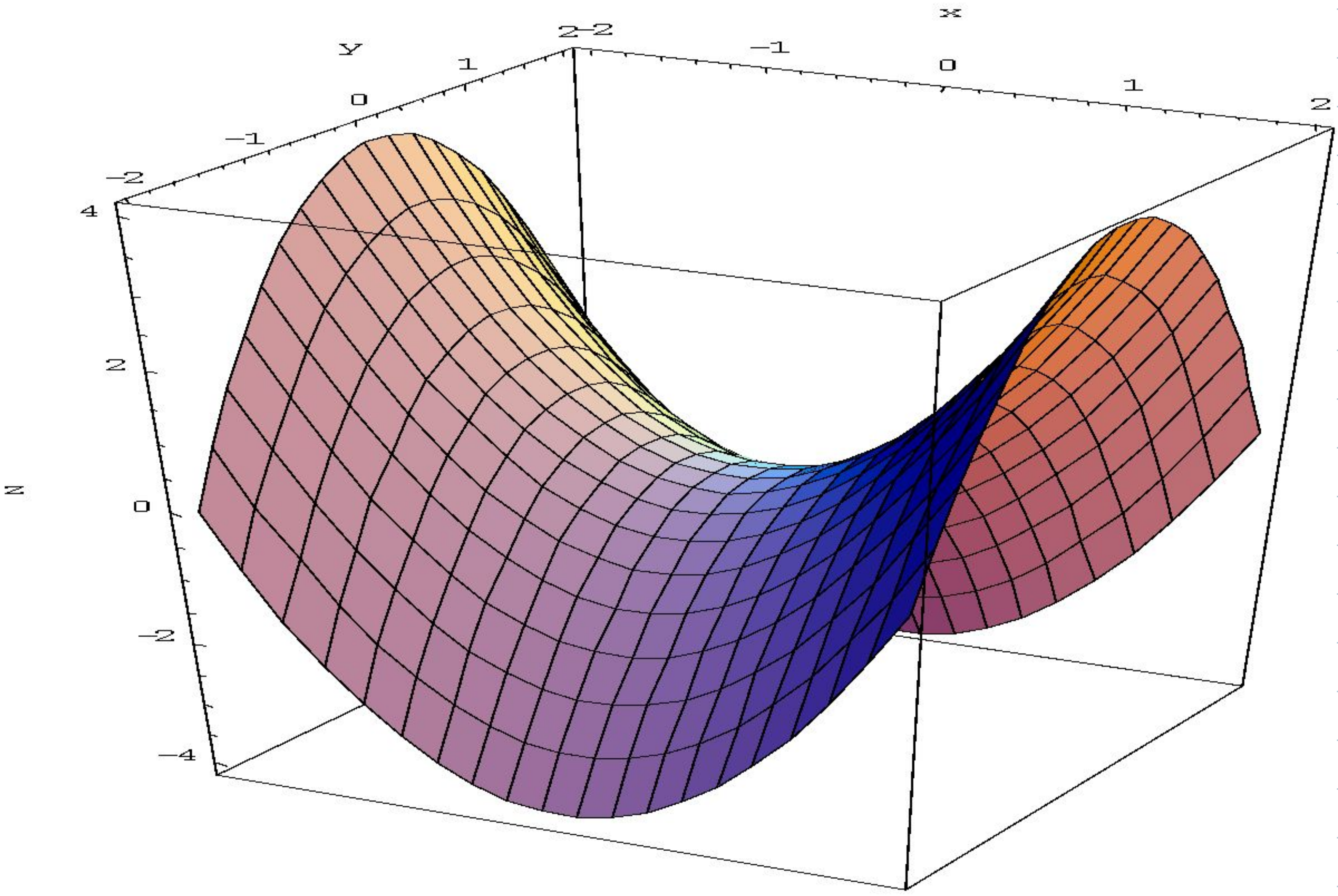
I. В сечении плоскостями $z = h,\ \ h > 0\ (h < 0)$ получаются ***гиперболы***.

II. В сечении плоскостями $x = h,\ h > 0$ ***параболы***.

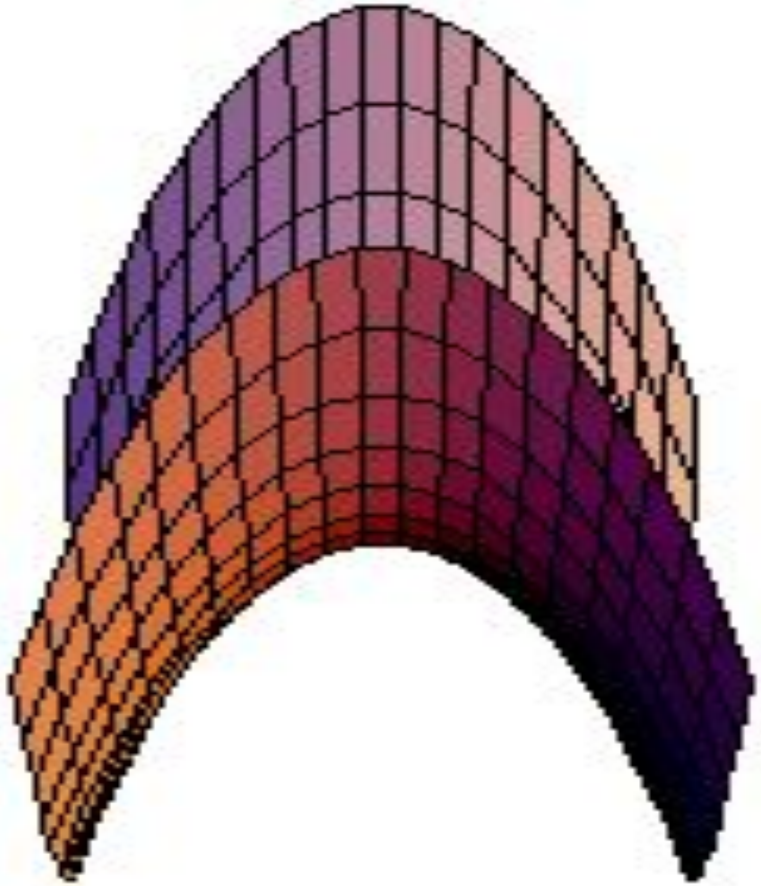
III. В сечении плоскостями $y = h,\ h > 0$ ***параболы***.

Отсюда и название исследуемой поверхности, форма которой представлена на рисунке:

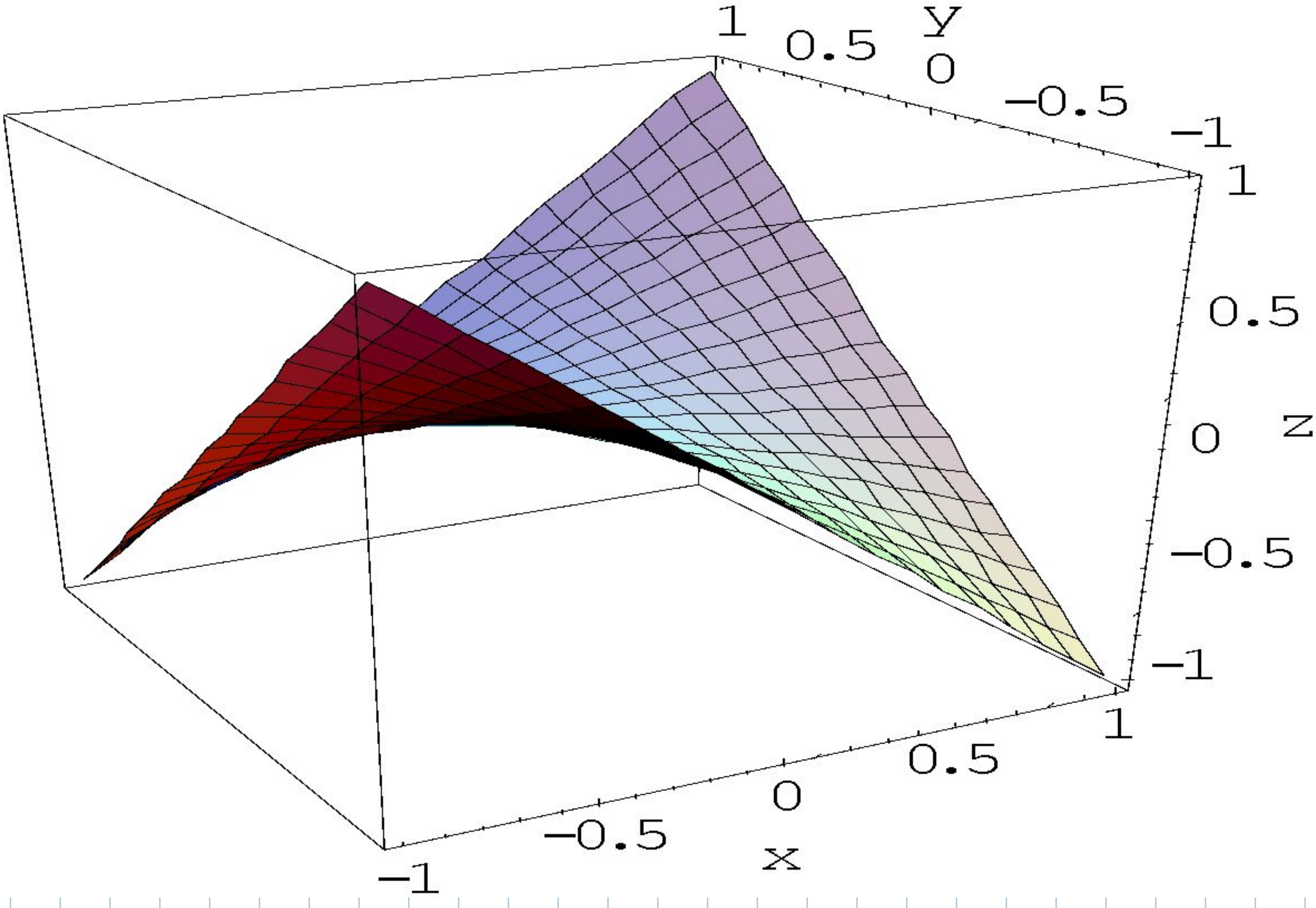
Гиперболический параболоид



Гиперболический параболоид



Гиперболический параболоид $z = xy$



2.5 Цилиндры второго порядка .

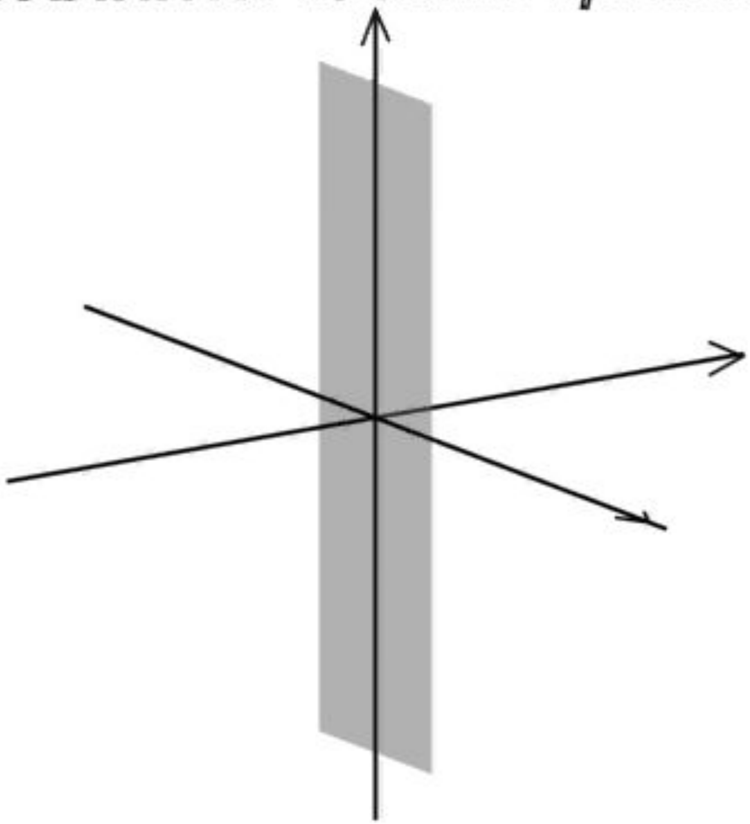
2.5.1 ***Эллиптический цилиндр***.

Эллиптический цилиндр задается каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Осью цилиндра является координатная ось *OZ*, *поперечные сечения* – эллипсы.

Эллиптический цилиндр



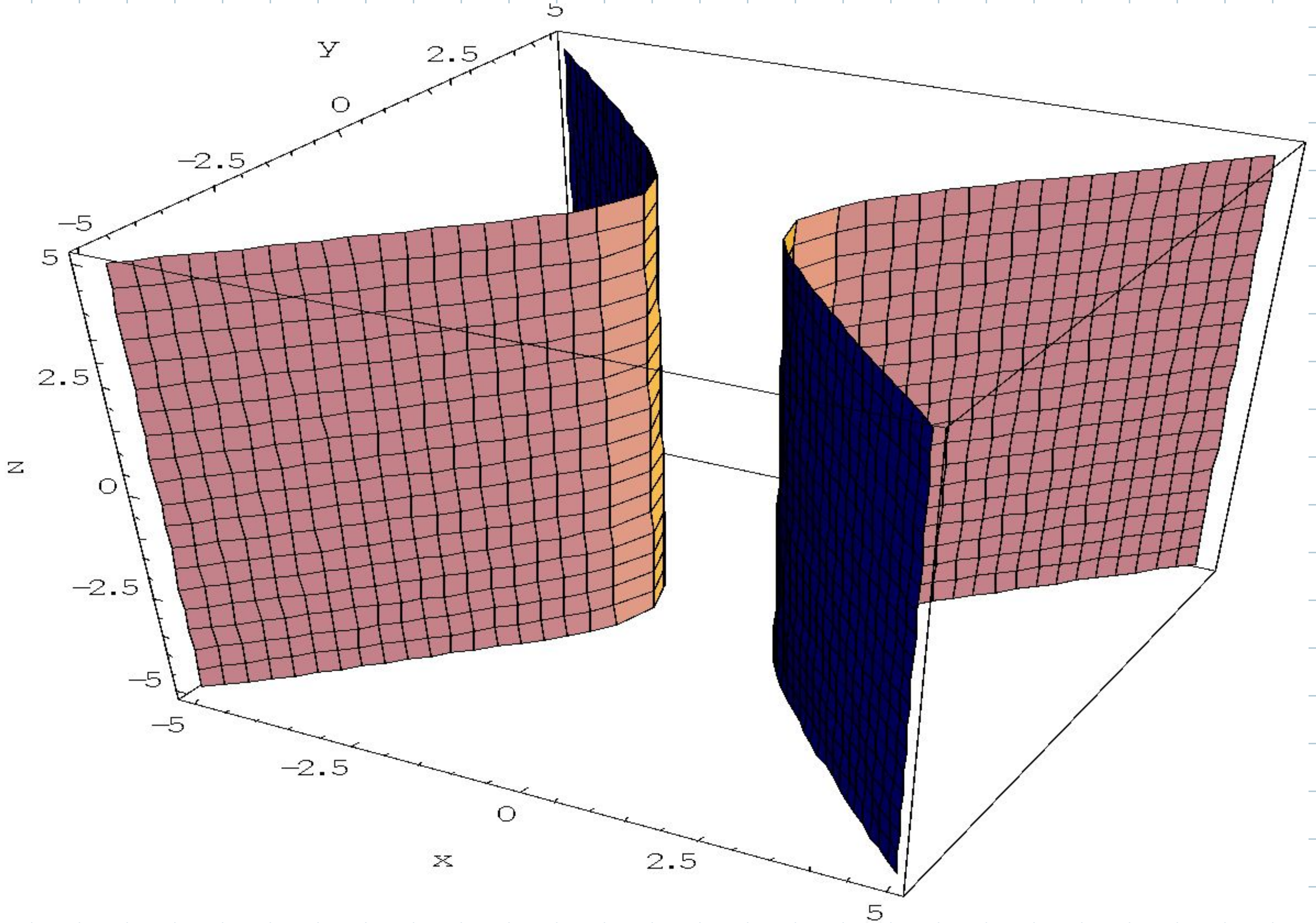
2.5.2 ***Гиперболический цилиндр.***

Гиперболический цилиндр задается каноническим уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Его форма представлена на рисунке:

Гиперболический цилиндр



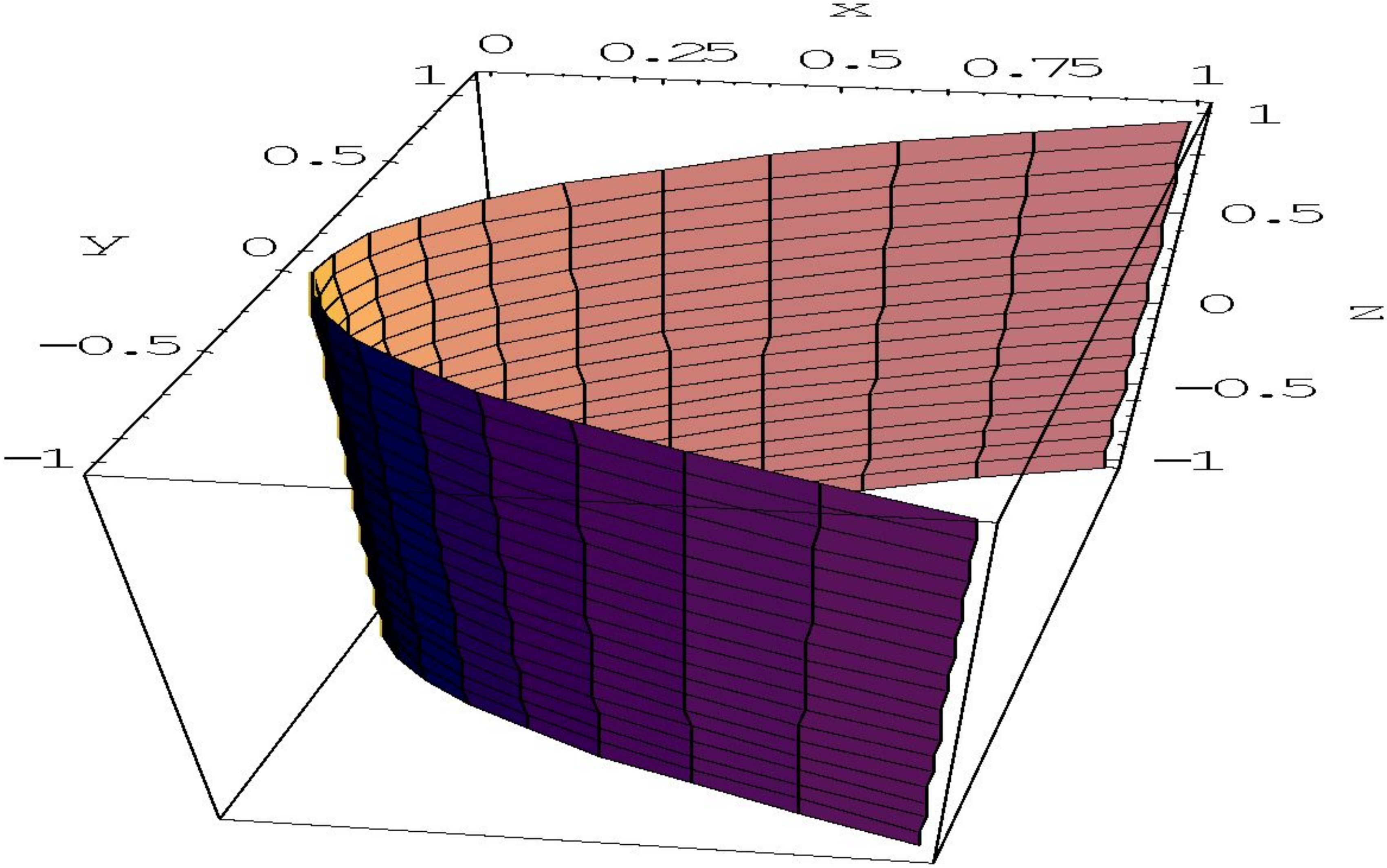
2.5.2 ***Параболический цилиндр.***

Параболический цилиндр задается каноническим уравнением:

$$\boxed{y^2 = 2px, \quad p > 0}$$

Его форма представлена на рисунке:

Параболический цилиндр



Замечание:

Признаком рассмотренных цилиндрических поверхностей является отсутствие одной из переменных в каноническом уравнении.