

Курс высшей математики

УГТУ-УПИ
2004г.

Лекция 9

Поверхности второго порядка.

1. Основные понятия.

2. Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям.

1. Основные понятия.

Уравнением поверхности называется уравнение с тремя переменными

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

которому удовлетворяют координаты каждой точки, принадлежащей поверхности, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей поверхности.

Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \quad (2)$$

где не все коэффициенты при слагаемых второго порядка (A, B, C, D, E, F) равны одновременно нулю.

Т

Всякое уравнение (2), задающее невырожденную поверхность, путем преобразования координат можно привести к **каноническому виду** (при котором в уравнении поверхности отсутствуют слагаемые, содержащие смешанные произведения координат $xу, xz, yz$).

2. Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям.

Основным методом исследования формы поверхности по её уравнению является **метод сечений**, когда о форме поверхности судят по форме кривых, которые получаются при пересечении данной поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям :

$$x = \mathit{const}; \quad y = \mathit{const}; \quad z = \mathit{const}.$$

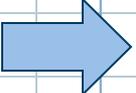
2.1 Эллипсоид.

Эллипсоидом называется поверхность второго порядка с каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ЭЛИПСОИДА МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ.

I. При $z = 0$ в сечении получим эллипс с полуосями a и b :

 $\Gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$ или $\Gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$

В случае, когда $z = h$ в сечении получается
тоже эллипс, но с полуосями a_1 и b_1 :

→ $\Gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$ ИЛИ $\Gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$

здесь $a_1 = a \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$; $b_1 = b \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$.

Если $0 < h < c$, то Γ – эллипс с полуосями

$$a_1 = a \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} < a; \quad b_1 = b \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} < b$$

если $h = c$, Γ – точка с координатами $(0, 0, c)$.

Если $h > c$, подкоренное выражение становится меньше нуля и исследуемая поверхность не имеет общих точек с рассматриваемой плоскостью.

Переменная Z содержится в уравнении во второй степени, значит плоскость $z = 0$ является *плоскостью симметрии* эллипсоида.

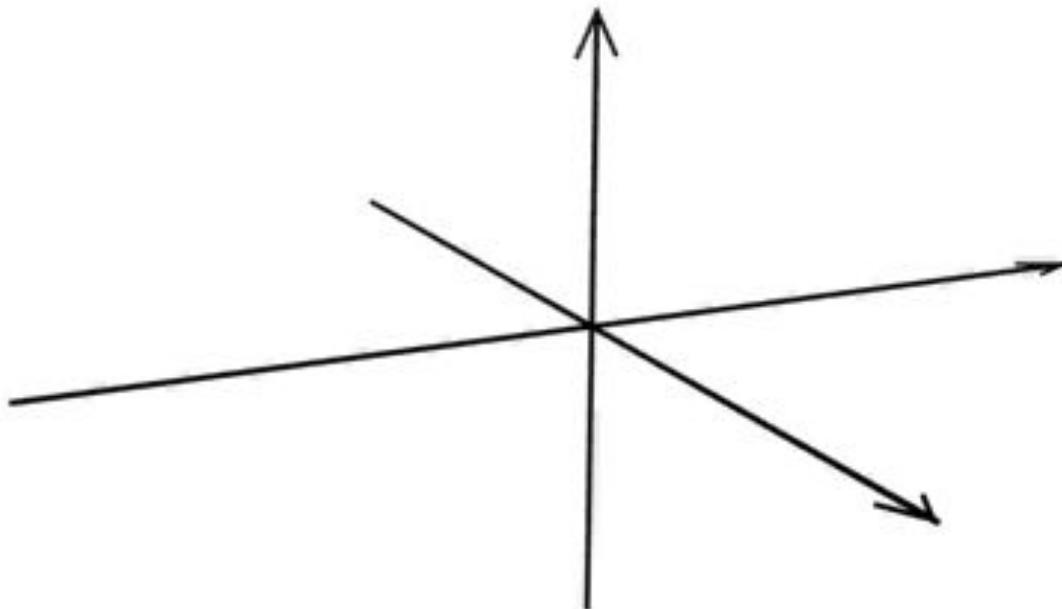
Точно также рассматриваются сечения эллипсоида другими плоскостями:

II. $x = \text{const}$

III. $y = \text{const}$

Выполненное исследование завершается построением чертежа:

Эллипсоид



2.2 Гиперболоиды.

2.2.1 Однополостный гиперболоид.

Однополостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка с каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ.

1. Линия пересечения гиперboloида и плоскости $z = 0$ задается системой уравнений,

$$\Rightarrow \Gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

определяющей эллипс с полуосями a и b .

В сечении плоскостью $z = h$ имеем кривую

$$\rightarrow \Gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

являющуюся также *эллипсом* с полуосями

$$a_1 = a \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}; \quad b_1 = b \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$

II. Рассмотрим сечение поверхности плоскостью

$$x = 0.$$

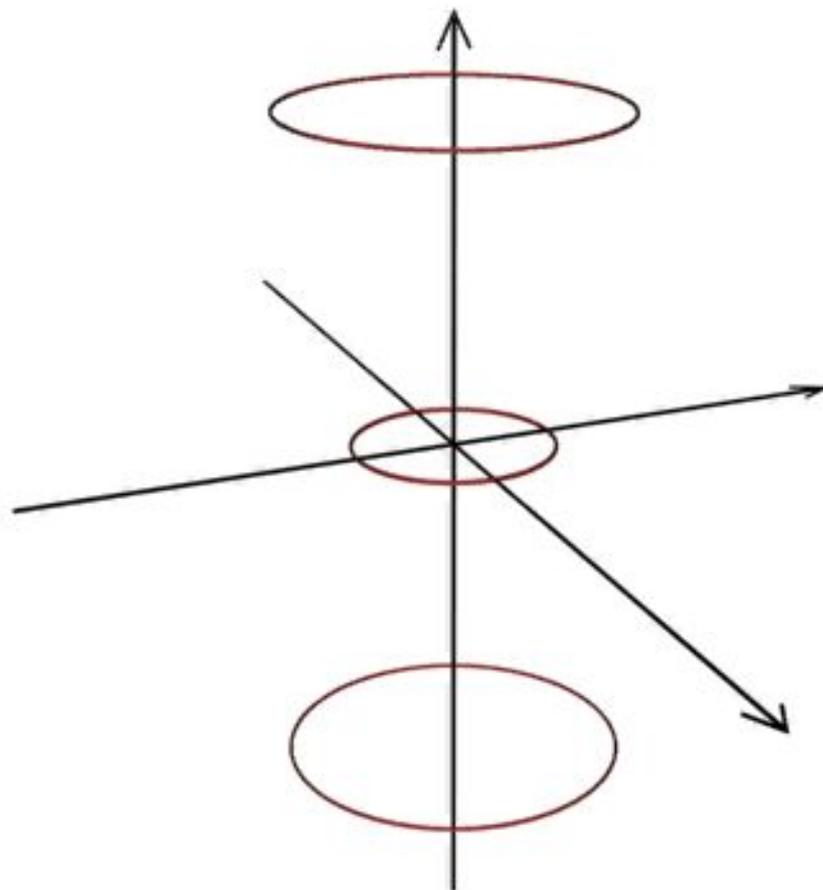
Уравнение линии пересечения

$$\Rightarrow \Gamma: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

задаёт *гиперболу*, пересекающую ось OY .

III. Сечение плоскостью $y = 0$ задаёт *гиперболу*, пересекающую ось OX .

Однополостный гиперболоид



2.2.2 Двухполостный гиперболоид.

Двухполостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка с каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ДВУХПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ.

I. В сечении плоскостью $z = h$ имеем кривую

$$\rightarrow \Gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

где $a_1 = a \cdot \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$; $b_1 = b \cdot \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$.

Если $h > c$, Γ – эллипс с полуосями a_1 , b_1 .

Если $h = c$, Γ – точка $(0, 0, c)$.

Если $-c < h < c$ – нет точек пересечения.

II. Сечение плоскостью $x = 0$

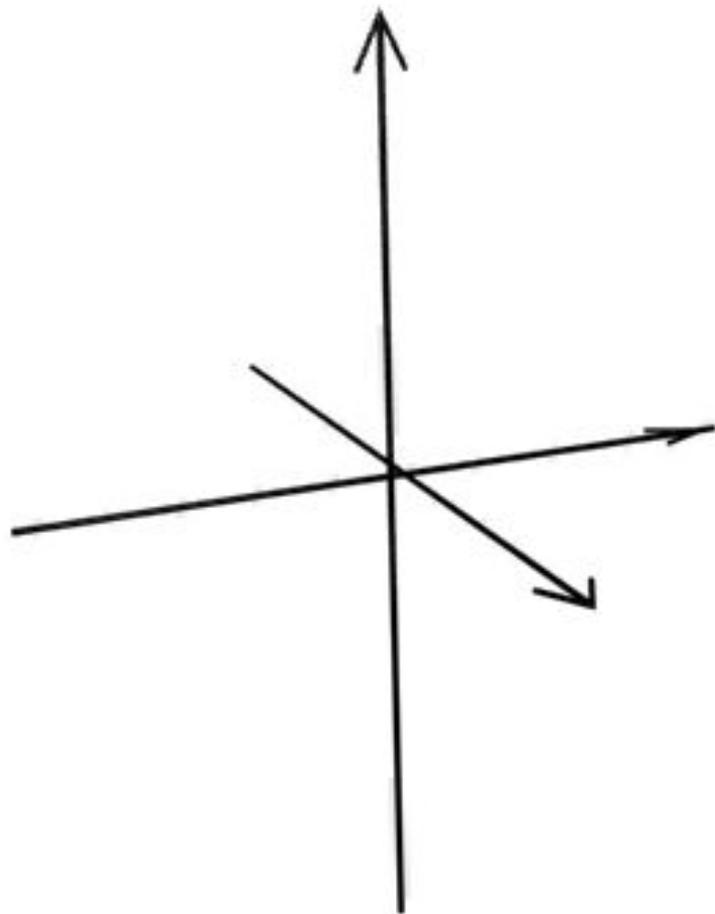

$$\Gamma : \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0 \end{cases}$$

задает *гиперболу*, пересекающую ось OZ .

III. Сечение плоскостью $y = 0$ также задает *гиперболу*, пересекающую ось OZ .

Итоговый чертеж представлен на рисунке:

Двуполостный гиперболоид

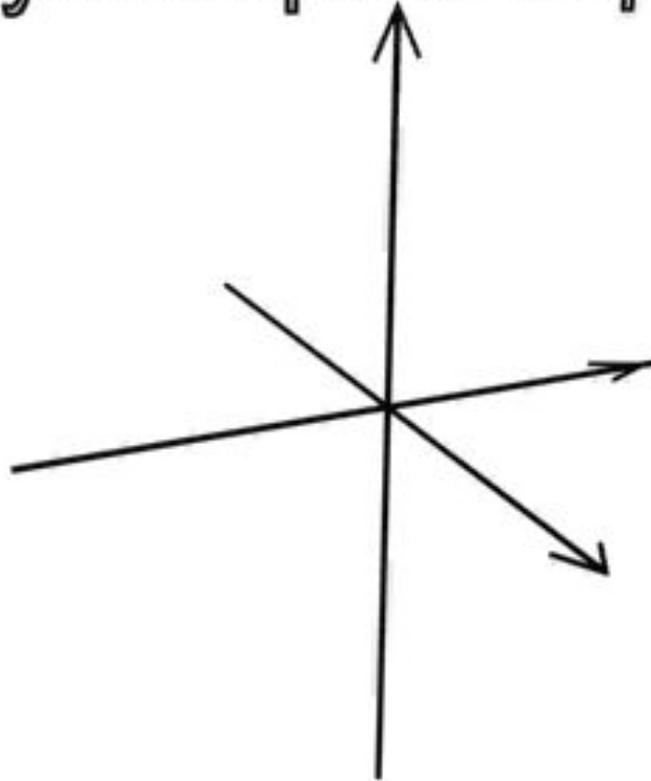


2.3 Конус.

Конусом второго порядка называется поверхность с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Конус второго порядка



Замечание

Осью конуса, заданного рассматриваемым каноническим уравнением, является ось OZ .

Продольные сечения являются прямыми линиями, поперечные сечения – эллипсы.

Если $a = b$, конус становится фигурой вращения.

2.4 Параболоиды.

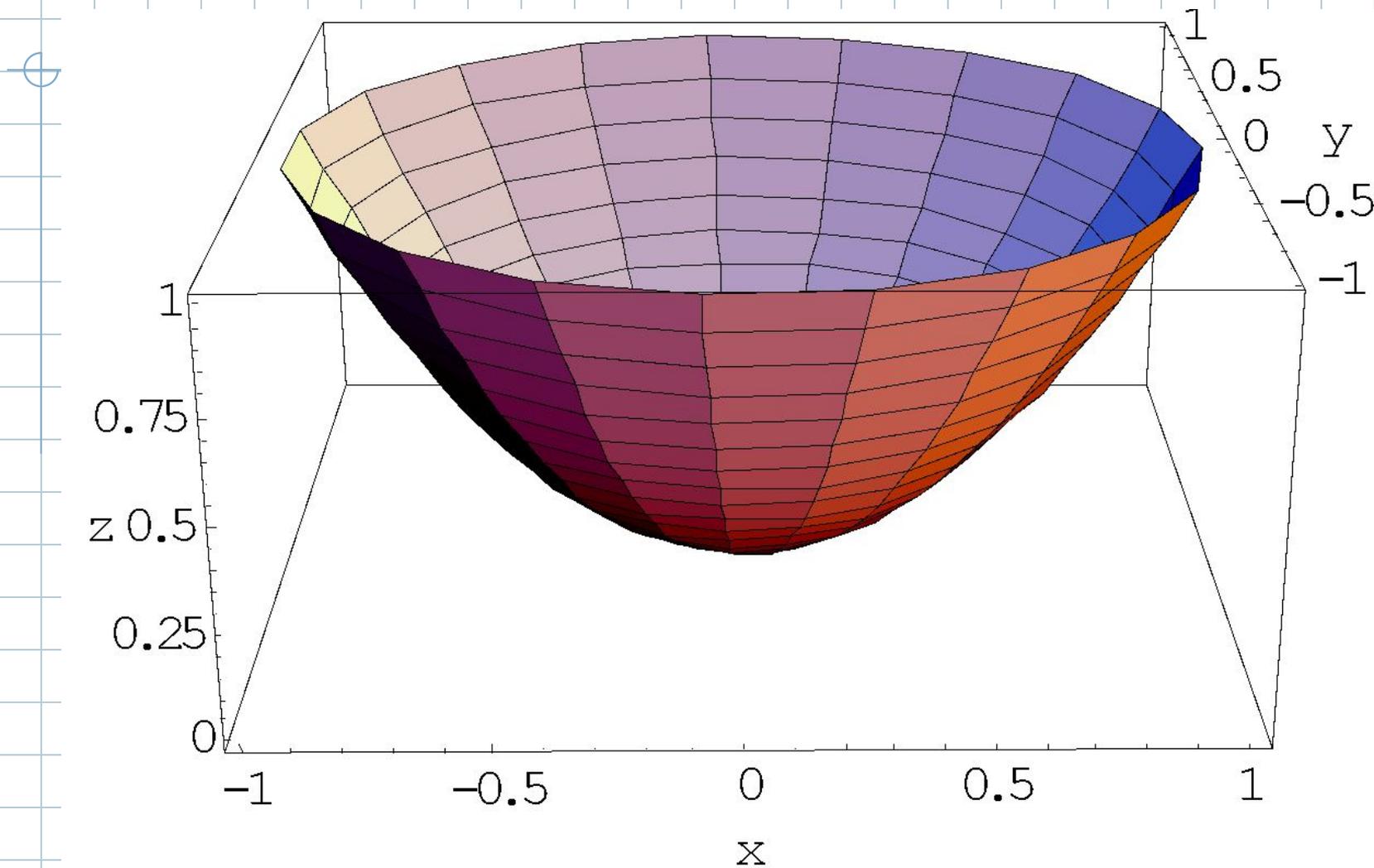
2.4.1 Эллиптический параболоид.

Эллиптическим параболоидом называется поверхность с каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

Его форма показана на рисунке:

Эллиптический параболоид



2.4.2 Гиперболический параболоид.

Гиперболическим параболоидом называется поверхность с каноническим уравнением:

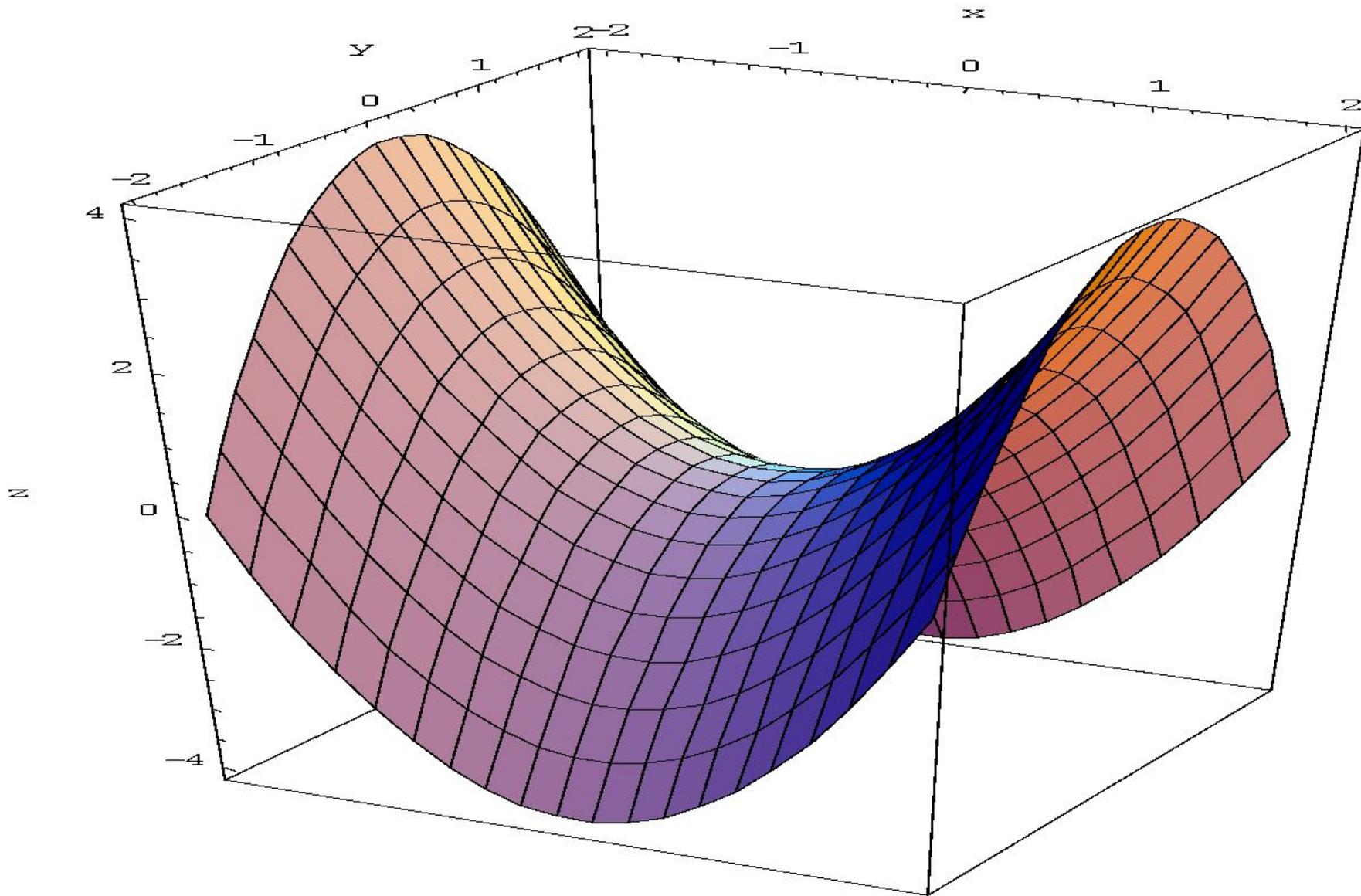
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ.

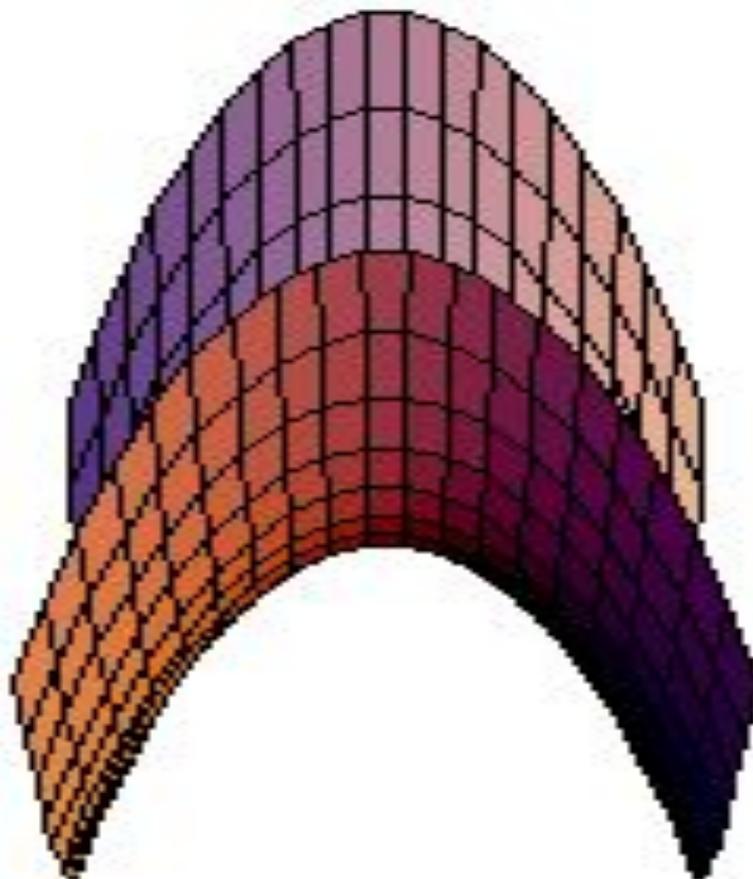
- I. В сечении плоскостями $z = h, h > 0 (h < 0)$ получаются *гиперболы*.
- II. В сечении плоскостями $x = h, h > 0$ *параболы*.
- III. В сечении плоскостями $y = h, h > 0$ *параболы*.

Отсюда и название исследуемой поверхности, форма которой представлена на рисунке:

Гиперболический параболоид

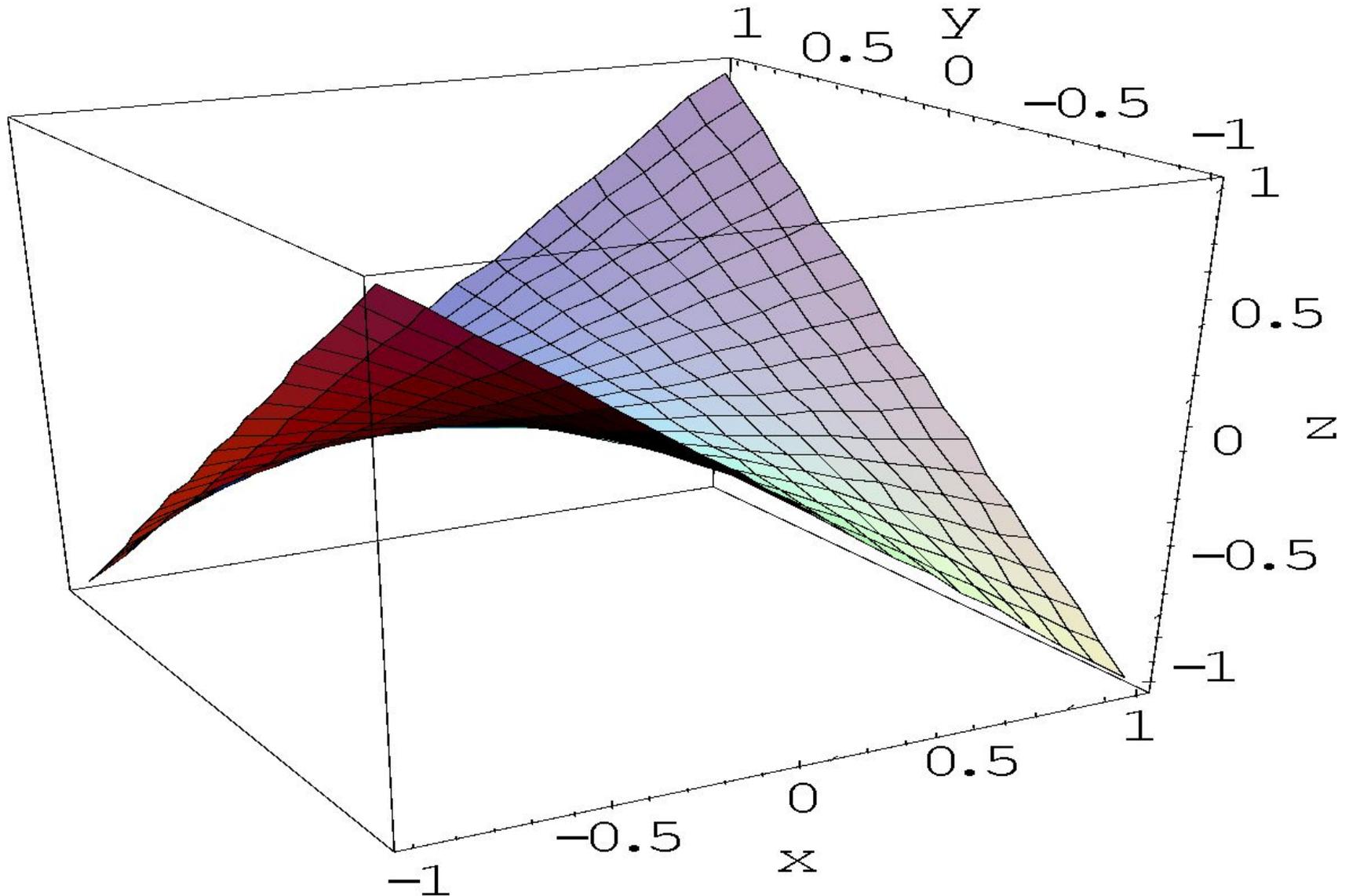


Гиперболический параболоид



Гиперболический параболоид

$$z = xy$$



2.5 Цилиндры второго порядка .

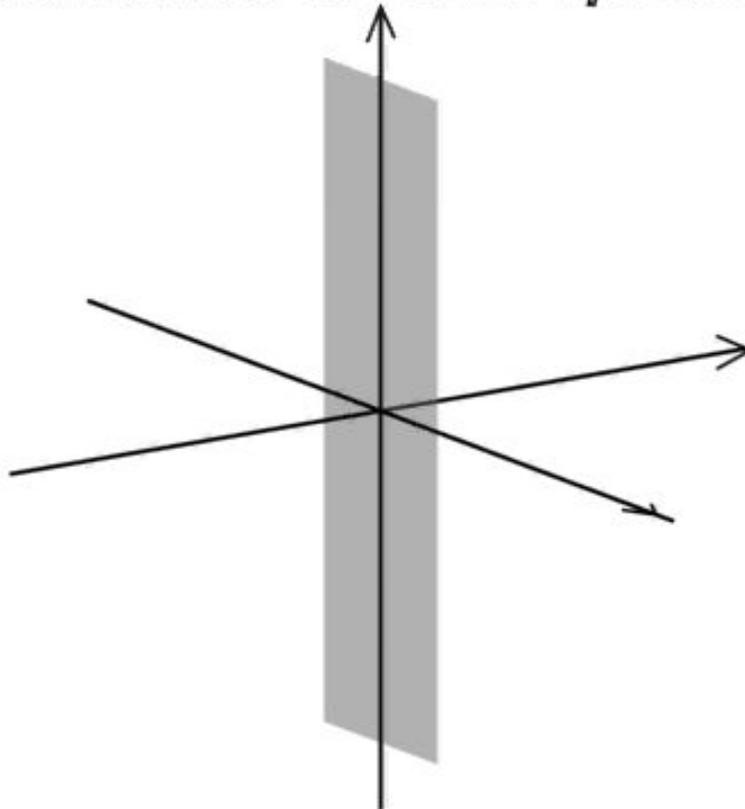
2.5.1 Эллиптический цилиндр.

Эллиптический цилиндр задается каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Осью цилиндра является координатная ось OZ ,
поперечные сечения – ЭЛЛИПСЫ.

Эллиптический цилиндр



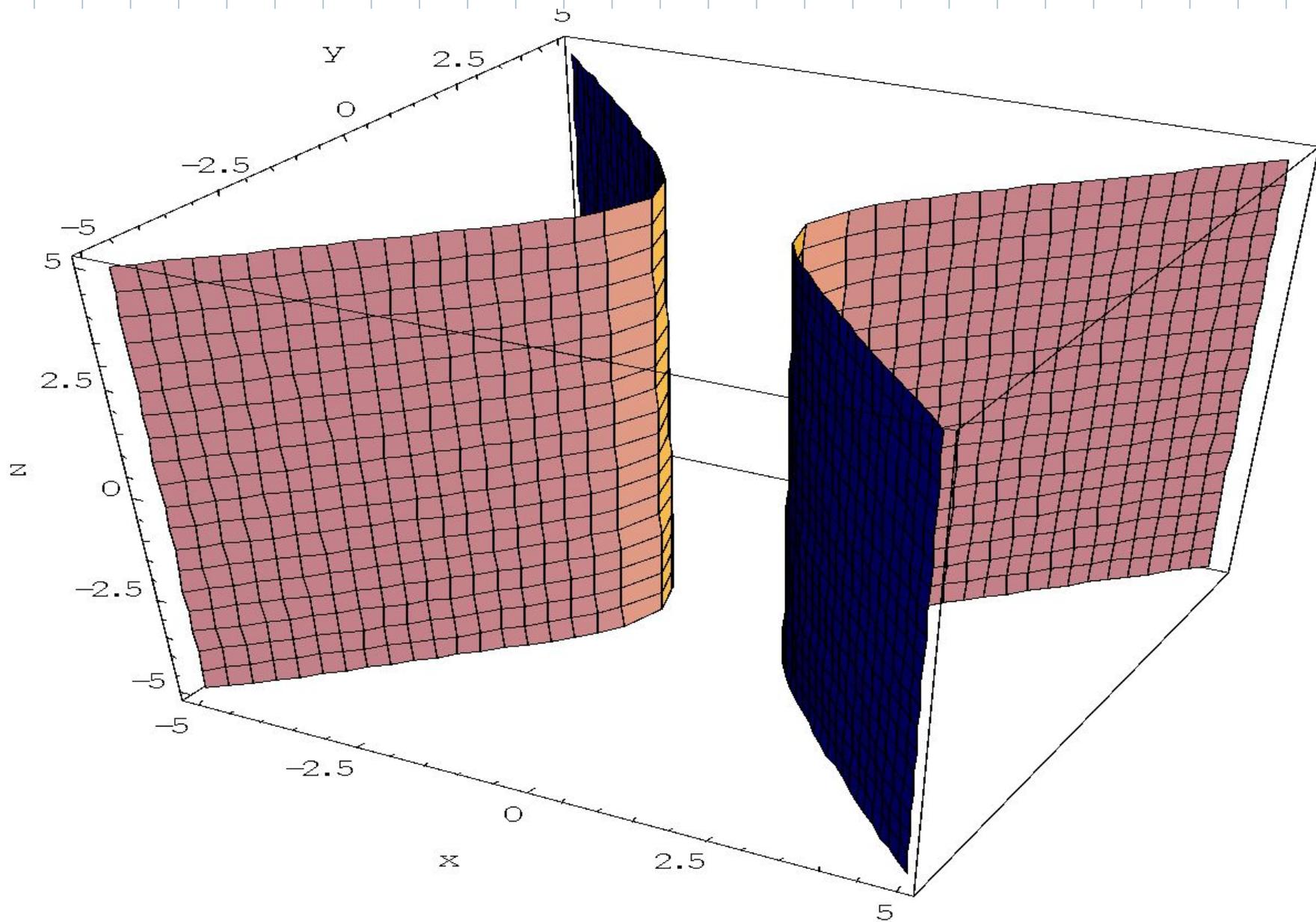
2.5.2 Гиперболический цилиндр.

Гиперболический цилиндр задается каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Его форма представлена на рисунке:

Гиперболический цилиндр



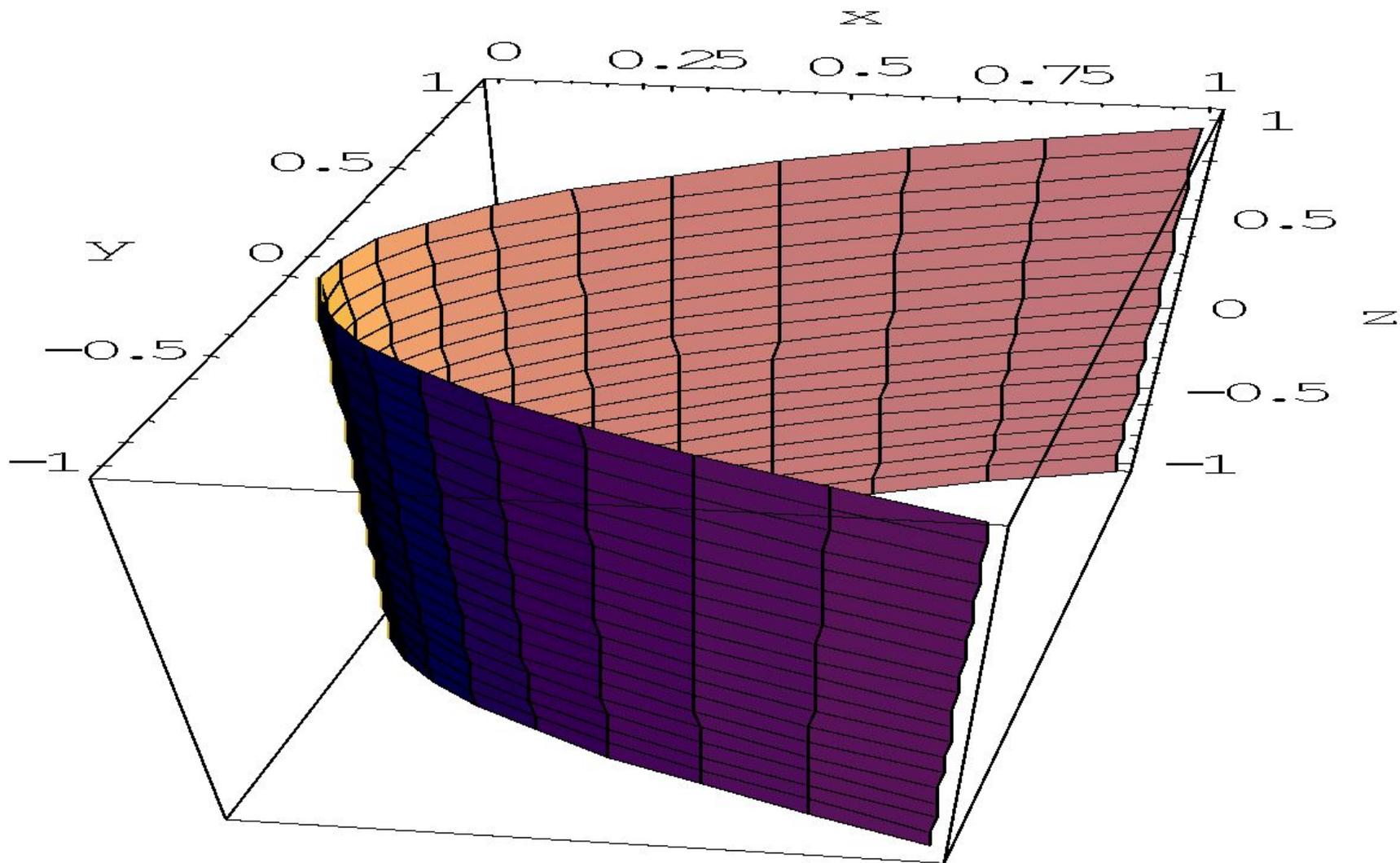
2.5.2 Параболический цилиндр.

Параболический цилиндр задается каноническим уравнением:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$

Его форма представлена на рисунке:

Параболический цилиндр



Замечание:

Признаком рассмотренных цилиндрических поверхностей является отсутствие одной из переменных в каноническом уравнении.