

«Повторение испытаний»

План

- I. Формула Бернулли
 - II. Локальная теорема Лапласа
 - III. Интегральная теорема Лапласа
 - IV. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях
-

I.

- Стоит задача, вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $(n - k)$ раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие A повторялось ровно k раз в определенной последовательности.
 - Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$ ($\#P_5(3)$).
 - Задачу можно решить с помощью формулы Бернулли
-

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

- Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно сложно, т.к. формула требует выполнения действий над громадными числами.
(# $P_{50}(30)$)

II.

- Естественно возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. Локальная теорема Лапласа дает формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления событий ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.
-

Th:

- Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции
-

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

при $x = (k - np) / \sqrt{npq}$

- $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ - локальная функция Лапласа ($x \geq 0$)
- Функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

.

- Найти приближенно вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.
 - $n = 400$
 - $k = 104$
 - $p = 0,2$, $q = 0,8$
-

$$P_{400}(104) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi\left(\frac{104 - 80}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) =$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \varphi\left(\frac{24}{8}\right) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(3) = \frac{1}{8} \cdot 0,0044 = 0,00055$$

$$P_{400}(104) \approx 0,0006$$

III. Интегральная теорема Лапласа

- **Th:** Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A , появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу.

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-x^2/2} dz,$$

$$x' = (k_1 - np) / \sqrt{npq} \quad \text{и} \quad x'' = (k_2 - np) / \sqrt{npq}$$

□ При решении задач пользуются специальной таблицей.

□ Таблица для интеграла $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz, \quad x > 0$

для $x < 0$ пользуемся той же таблицей, т.к. $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

□ В таблице приведены значения до $x = 5$ для $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0,5$

□ $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^0 e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-z^2/2} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-z^2/2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x'} e^{-z^2/2} dz = \Phi(x'') - \Phi(x')$$

- Итак, вероятность того, что событие **A** появиться в независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз,

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$$

#

- Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 70 и не более 80 раз.
 - $p = 0,75, q = 0,25$
 - $n = 100$
 - $k_1 = 70, k_2 = 80$
-

$$\begin{aligned} P_{100}(70, 80) &\approx \Phi\left(\frac{80-75}{\sqrt{75 \cdot 0,25}}\right) - \Phi\left(\frac{70-75}{\sqrt{75 \cdot 0,25}}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{5}{0,5 \cdot 5\sqrt{3}}\right) = 2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 2\Phi(1,15) = \\ &= 2 \cdot 0,3749 = 0,7498 \end{aligned}$$

IV.

- Поставим перед собой задачу найти вероятность того, что отклонение относительной частоты m/n от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\epsilon > 0$. Другими словами, найдем вероятность осуществления неравенства

$$|m/n - p| \leq \epsilon$$

-
- Эту вероятность будем обозначать так:

$$P(|m/n - p| \leq E) \approx 2\Phi(E\sqrt{n/(pq)})$$

Итак, вероятность осуществления неравенства $|m/n - p| \leq E$ приближенно равна значению удвоенной функции Лапласа

$$2\Phi(x) \text{ при } x = E\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

#

- Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний $p = 0,75$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсциссе величине не более чем на $0,001$
-

#

- Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна $0,2$. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности можно ожидать с вероятностью $0,9128$ при 5000 испытаниях.
-