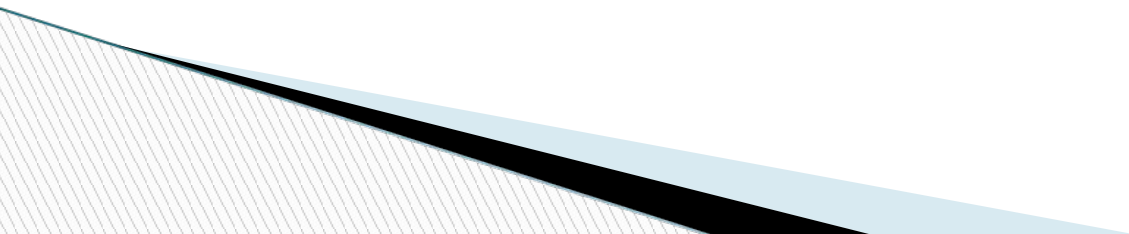


Практическое применение логарифмов в экономике



Непер Джон (1550 - 1617)

Известный английский математик, шотландский барон. Математика и астрономия были его увлечениями, а не профессией. Непер вошел в историю математики как изобретатель логарифмов, составитель первой таблицы логарифмов, которой он посвятил 20 лет своей жизни. Параллельно с ним над составлением таблицы логарифмов работал другой любитель математики - И. Бюрги. Непер вывел несколько формул для решения сферических треугольников, сделал ряд других математических открытий. Любил заниматься составлением математических таблиц, которые упрощали процесс счета.

- Можно найти применение логарифмам не только в математике, но и в других областях науки, например, экономике, в частности, в банковском деле

Пример 1. Задача о вкладчике.

Пусть вкладчик положил в банк 10 000 рублей под ставку 12 % годовых. Через сколько лет его вклад удвоится?

Через год на счету вкладчика будет сумма:

$$10000 + 10000 \cdot \frac{12}{100}$$

Еще через год эта сумма составит

$$\left(10000 + 10000 \cdot \frac{12}{100}\right) +$$

$$\left(10000 + 10000 \cdot \frac{12}{100}\right) \cdot \frac{12}{100}$$

**Попробуем найти закон образования суммы вклада
после каждого года**

После первого года

$$10000 + 10000 \cdot \frac{12}{100} = 10000 \left(1 + \frac{12}{100}\right)$$

После второго года

$$\begin{aligned} & 10000 \left(1 + \frac{12}{100}\right) + 10000 \left(1 + \frac{12}{100}\right) \cdot \frac{12}{100} = \\ & = 10000 \left(1 + \frac{12}{100}\right) \left(1 + \frac{12}{100}\right) = \\ & = 10000 \left(1 + \frac{12}{100}\right)^2 \end{aligned}$$

Через n лет хранения денег их количество составит

$$1000 \left(1 + \frac{12}{100} \right)^n \text{ рублей}$$

Вывели формулу, которая в экономике называется формулой сложных процентов

$$S = A \left(1 + \frac{P}{100} \right)^n, \text{ где}$$

A – начальная сумма вклада,

P – процентная ставка (годовая),

n – срок хранения (в годах),

S – накопительная (итоговая)

сумма вклада

В нашем случае деньги на вкладе накапливаются по формуле

$$S = 1000 \left(1 + \frac{12}{100} \right)^n \text{ рублей}$$

Нам необходимо найти n , при котором

$$20000 = 1000 \left(1 + \frac{12}{100} \right)^n \text{ рублей}$$

т.е. решить уравнение

$$2 = \left(1 + \frac{12}{100} \right)^n$$

по определению логарифма получим

$$n = \log_{1,12} 2$$

$$n = \log_{1,12} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1,12} \approx \frac{0,3010}{0,0492} = 6,11$$

Увеличение вклада произойдет через 6 лет (с небольшим)

Рассмотрим этот же пример в общем виде

Некоторая сумма денег в A рублей подвержена приросту в $p\%$ годовых. Через сколько лет эта сумма составит S рублей?

$$S = A \left(1 + \frac{12}{100} \right)^n$$

Прологарифмируем это уравнение по основанию 10, получим:

$$\lg S = \lg \left(A \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n \right),$$

$$\lg S = \lg A + \lg \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n,$$

$$\lg S - \lg A = n \cdot \lg \left(1 + \frac{p}{100} \right),$$

$$n = \frac{\lg S - \lg A}{\lg \left(1 + \frac{p}{100} \right)}$$

Пример.

Пенсионер 1 января положил на вклад все свои сбережения – 150 000 рублей под 5% годовых. Он намеревается каждый год 31 декабря снимать с вклада по 25 тыс.рублей. На протяжении какого периода времени он это может делать?

Рассмотрим ситуацию в общем виде. Пусть A – исходная сумма, S – снимаемая сумма ежегодно, P – процентная ставка.

Тогда через год на счету будет

$$A\left(1 + \frac{12}{100}\right) \text{ а после снятия денег } A\left(1 + \frac{12}{100}\right) - S$$

через два года

$$\left(A\left(1 + \frac{P}{100}\right) - S\right)\left(1 + \frac{P}{100}\right) - S \text{ или}$$

$$A\left(1 + \frac{P}{100}\right)^2 - S\left(1 + 1 + \frac{P}{100}\right);$$

В итоге получим, что закон образования суммы в конце каждого года после съема денег с вклада

$$A \left(1 + \frac{P}{100} \right)^n - S \cdot \frac{100}{P} \left(\left(1 + \frac{P}{100} \right)^n - 1 \right)$$

Для нашего случая получим:

$$150000 \left(1 + \frac{5}{100} \right)^n - 25000 \cdot \frac{100}{5} \left(\left(1 + \frac{5}{100} \right)^n - 1 \right)$$

Нам надо найти, при каком значении n эта сумма будет равна нулю.

$$150000 \left(1 + \frac{5}{100} \right)^n - 25000 \cdot \frac{100}{5} \left(\left(1 + \frac{5}{100} \right)^n - 1 \right) = 0$$

$$150000(1,05)^n = 500000 \cdot ((1,05)^n - 1);$$

$$15(1,05)^n = 50 \cdot ((1,05)^n - 1);$$

$$15(1,05)^n - 50 \cdot (1,05)^n = -50;$$

$$35(1,05)^n = 50;$$

$$(1,05)^n = \frac{10}{7};$$

$$\lg 1,05^n = \lg \frac{10}{7};$$

$$n \lg 1,05 = \lg \frac{10}{7};$$

$$n = \frac{\lg \frac{10}{7}}{\lg 1,05}; n = \frac{\lg \frac{10}{7}}{\lg 1,05} \approx \frac{0,1549...}{0,0212...} = 7,31$$

ВЫВОДЫ

- Логарифмы можно использовать при нахождении банковского процента по вкладам
- Зная процент по вкладам, который предлагают разные банки, можно определить какой из них более выгодный на данный момент